COLLÈGE François-Xavier VOGT B.P. : 765 Ydé – Tél. : 222 31 54 28 e-mail : collegevogt@yahoo.fr		Année scolaire 2026-2027
		Du 21/11/2026
CONTRÔLE		Classe : Tle D
EPREUVE DE MATHEMATIQUES		Durée : 03h45

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES (15,00 POINTS)

EXERCICE 1 : (05,00 POINTS)

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^3 + (-3+i)z^2 + 2(4-5i)z + 18 + 6i$.

1. Déterminer les racines carrées du nombre complexe $u = -8i$. **0,75pt**
2. Soit a un nombre complexe tel pour tout z dans $\mathbb{C}$ $P(z) = (z-a)(z^2 + 4iz - 4 + 2i)$.
   a) Déterminer a. **0,5pt**
   b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$. **0,5pt**
3. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 3 - i$; $z_B = 1 - 3i$; $z_C = -1 - i$
   a) Déterminer la forme exponentielle du rapport $\rho = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$. **0,5pt**
   b) En déduire la nature précise du triangle ABC. **0,25pt**
4. Soit D le point tel que $ADCB$ soit un parallélogramme, I est le milieu du segment $[AC]$.
   a) Montrer que l'affixe de D est $z_D = 1 + i$ et l'affixe de I est $z_I = 1 - i$. **0,75pt**
   b) Justifier que le point E d'affixe $z_E = -4i$ est l'image de B par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{3}{2}$. **0,5pt**
5. Soit S la similitude directe qui transforme B en C et I en D.
   a) Déterminer l'écriture complexe de S. **0,75pt**
   b) Déterminer le rapport, l'angle et le centre de S. **0,5pt**

EXERCICE 2 : (05,00 POINTS)

Soient a et b deux réels. On considère les fonctions f et h définies par :

$\begin{cases} f(x) = x^3 + 2x^2 + x + a + b, & si\ x < 0 \\ f(x) = ax^2 - bx + 1, & si\ 0 \le x < 1 \\ f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}, & si\ x \ge 1 \end{cases}$ et $h(x) = \frac{\sqrt{x+2} - 2}{2x^2 - 8}$. Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Déterminer le domaine de définition de f. **0,5pt**
2. Déterminer a et b pour que la fonction f soit continue en 0 et en 1. **1pt**
3. On suppose pour la suite de l'exercice que : $a = b = \frac{1}{2}$.
   a) Etudier la dérivabilité de f au point d'abscisse $x_0 = 1$. **1pt**
   b) Interpréter graphiquement les résultats. **0,25pt**
4. Justifier que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche infinie au voisinage de $+\infty$. **0,5pt**
5. Montrer que la droite $(D): y = 2x$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$. **0,75pt**
6. Montrer que h est prolongeable par continuité au point d'abscisse 2, puis donner l'expression de son prolongement par continuité en 2. **1pt**

sujetexa.com

EXERCICE 3 : (05,00 POINTS)

On considère les fonctions f et g définies par : $g(x) = 4x^3 - 3x - 8$ et $f(x) = \frac{x^3+1}{4x^2-1}$.

1. Dresser le tableau de variation de g. **0,75pt**
2. On considère l'équation $(E): g(x) = 0$.
   a) Montrer que (E) admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$. **0,5pt**
   b) Justifier que $\alpha \in]1; 2[$; puis donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}. **1pt**
   c) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x. **0,5pt**
3. Montrer que pour tout réel différent de $\frac{1}{2}$ et de $-\frac{1}{2}$, f est dérivable et que $f'(x) = \frac{xg(x)}{(4x^2-1)^2}$. **0,5pt**
4. Dresser le tableau de variation de f. **1pt**
5. Montrer que $f(\alpha) = \frac{3}{8}\alpha$, puis en déduire un encadrement de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près. **0,75pt**

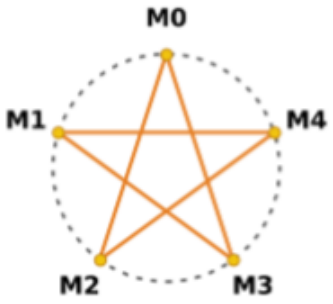
PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES (05,00 POINTS)

SITUATION :

À l'occasion de la fête de fin d'année, le comité de développement d'un quartier souhaite embellir la rue principale avec des guirlandes lumineuses installées sur des poteaux, et aménager une aire de repos. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé d'unité 1m.

Le nombre de poteaux nécessaires est le seul module entier parmi ceux des solutions dans $\mathbb{C}$, de l'équation $(E): z^3 - (5+12i)z^2 + 3z - (15+36i) = 0$. L'équation (E) admet une solution imaginaire pur. Les points M d'affixe z , de l'aire de repos vérifient le système suivant : $100 \leq |-2iz + 2 - 7i| \leq 150$. Pour être à l'aise chaque habitant doit disposer d'au moins 5 mètres carrés.

Sur chaque poteau sera accroché un motif en forme de pentagone. Les affixes des sommets du pentagone sont les solutions de l'équation complexe $(F): z^5 = 16\sqrt{3} + 16i$. Pour rendre le motif beau, le comité veut relier chaque sommet aux deux sommets qui ne lui sont pas voisins de façon à former une étoile à l'intérieur du pentagone. Seuls les segments de l'étoile sont bordés de guirlande.



Le coût de fabrication d'un poteau de hauteur x mètres est donné en milliers de francs CFA, par la formule $C(x) = 0{,}5x^3 + 2x + 10$, le comité a prévu un budget de 100 milliers de francs CFA pour la fabrication d'un poteau. Le président du comité affirme qu'il existe une unique hauteur pour laquelle le coût de fabrication est égal au budget.

NB : Si θ et α sont deux nombres réels alors $|e^{i\theta} - e^{i\alpha}| = 2\left|\sin\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)\right|$

TÂCHES :

1. Déterminer le nombre de poteaux, puis le nombre maximum d'habitants que l'aire de repos peut accueillir. **1,5pt**
2. Déterminer la longueur totale de guirlandes nécessaires pour décorer un motif. **1,5pt**
3. Examiner si l'affirmation du président est exacte en donnant une valeur approchée de cette hauteur au dixième près. **1,5pt**

Présentation : 0,5pt

sujetexa.com