COLLÈGE F-X. VOGT		Année scolaire 2026-2027
Département de Mathématiques	MINI-SESSION	Date : 02/11/2026

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Niveau : TC **Durée : 4 heures** **Coefficient: 7**

PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES (*15 POINTS*)

Exercice 1 : (*3 points*)

Soit r un nombre réel strictement positif, u le nombre complexe de module r et d'argument $-\frac{3\pi}{4}$

1) On considère la suite (A_n) de points définie par : $A_0 = 0$, l'affixe de A_1 est i et pour tout $n \in \mathbb{N} - \{1\}$, A_n est l'image de A_{n-2} par la similitude directe de centre A_{n-1}, de rapport r et d'angle $-\frac{3\pi}{4}$. On désigne par Z_n l'affixe de A_n.

a) Écrire, pour tout entier naturel n non nul et distinct de 1, une relation entre Z_n, Z_{n-1} et Z_{n-2}. **0,75pt**

b) Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^* - \{1\}, Z_n - Z_{n-1} = (-u)^{n-1}i$. **0,75pt**

2) **a)** Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe s qui transforme A_0 en A_1 et A_1 en A_2. **0,75pt**

b) Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, A_{n+1} = s(A_n)$. **0,75pt**

Exercice 2 : (*4,25 points*)

A/ 1) On considère dans le plan complexe les points A, B, C et D d'affixes respectives

$1 + 2i$; $1 + \sqrt{3} + i$; $1 + \sqrt{3} - i$ et $1 - 2i$.

a) Vérifier que $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = i\sqrt{3}$. **0,25pt**

b) En déduire la nature du triangle ABD. **0,25pt**

c) Prouver que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon. **0,75pt**

2) On considère l'équation complexe suivante : $z^2 - 2(1 + 2cos\theta)z + 5 + 4cos\theta = 0$, d'inconnue z et où θ est un nombre réel.

a) Résoudre cette équation dans $\mathbb{C}$. **0,75pt**

b) Montrer que les points ayant pour affixes les solutions de cette équation appartiennent au cercle (C). **0,25pt**

B/ Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue z : (E): $(1 + iz)^n = (1 - iz)^n$.

1) Montrer que toutes les solutions de (E) sont des réels. **0,25pt**

2) On rappelle que pour tout réel z, il existe un unique réel $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $z = tan\theta$. Exprimer en fonction de $e^{i\theta}$, le nombre $\frac{1+iz}{1-iz}$. **0,5pt**

3) Montrer que z est solution de (E) si et seulement si θ est solution de l'équation (E'): $e^{i(2n\theta)} = 1$. **0,75pt**

4) Pour $n = 6$, résoudre (E') et en déduire les solutions de (E). **0,5pt**

EXERCICE 3 : (4 *points*)

A/ Soit p un nombre premier plus grand que 2 et S la somme des diviseurs positifs de p^4.

1) Exprimer S en fonction de p . **0,5pt**

2) Démontrer que : $(2p^2 + p)^2 \leq 4S \leq (2p^2 + p + 2)^2$. **0,5pt**

sujetexa.com

3) On suppose que S est un carré parfait et on pose $S = n^2$ où n est un entier naturel.

a) Établir l'existence et l'unicité de n pour p fixé. **0,75pt**

b) Exprimer n en fonction de p . **0,5pt**

c) Établir que p vérifie la relation $3 + 2p - p^2 = 0$. **0,5pt**

d) Déduire de c) p et puis n . **0,5pt**

B/ Hamidou est né en $\overline{19ab}$. En 2004 son âge était égal à la somme des chiffres de son année de naissance. Quel est son âge en 2026 ? **0,75pt**

Exercice 4 : (3,*75 points*)

1) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x \sin x}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin x}$. **0,5pt + 0,5pt**

2) Soit f la fonction définie par $f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).

a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f. **0,25pt**

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Montrer que, pour tout $x \in]-\infty; -2]$, $f(x) = \frac{1}{(x+1)-\sqrt{x^2+2x}}$, puis en déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. **0,25pt + 0,25pt + 0,25pt**

c) Étudier les branches infinies de (C_f). **1pt**

3) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x + \sin x$ et (C_g) sa courbe représentative.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$. **0,25pt**

b) Étudier les branches infinies de (C_g)en $+\infty$. **0,5pt**

PARTIE B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES (*5 points*)

À l'occasion de la Fête de la Jeunesse, la commune d'arrondissement de ton quartier, à Yaoundé, fait aménager une « Place de la Jeunesse » : une place publique ornée d'une fontaine centrale, de lampadaires, de six kiosques et d'une allée dallée. Le bureau d'études a modélisé le plan de la place dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, l'unité graphique représentant 10 m. Le point O est le centre de la fontaine. Stagiaire dans ce bureau d'études, tu reçois du chef de chantier trois dossiers à traiter.

Dossier 1 : Une allée rectangulaire de 4,62 m de long et 1,98 m de large doit être entièrement recouverte de dalles carrées toutes identiques, dont le côté est un nombre entier de centimètres le plus grand possible, posées sans découpe ni chevauchement. Le reste du chantier nécessite 79 dalles du même modèle. Les dalles sont vendues par lots : un lot A contient 7 dalles et un lot B en contient 11. Le magasinier commande exactement le nombre de dalles nécessaire à l'ensemble du chantier (allée comprise), sans surplus. Le dépôt de matériel est protégé par un code égal au reste de la division euclidienne par 11 du nombre x^{2027}, où x désigne le nombre de lots A commandés.

Tâche 1 : Détermine le code du dépôt. **1,5pt**

Dossier 2 : Trois lampadaires L_1, L_2 et L_3 sont placés aux points dont les affixes sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E) : $z^3 - 5z^2 + 9z - 5 = 0$, L_1 étant le point d'affixe réelle et L_2 celui dont l'affixe a une partie imaginaire positive. Un transformateur T, d'affixe t, doit être installé de sorte que $2t - \bar{t}$ soit égal au carré de l'affixe de L_2 ($\bar{t}$ désigne le conjugué de t). Chacun de ces quatre points sera relié à la fontaine par un câble rectiligne issu de O ; l'entreprise ne dispose que de câbles de 25 m au maximum.

Tâche 2 : Un câble de 25 m suffit-il pour relier chacun des quatre points à la fontaine ? Justifie ta réponse. **1,5pt**

Dossier 2 : Six kiosques K_0, K_1, …, K_5 sont placés aux points dont les affixes k_0, k_1, …, k_5 sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^6 = 64$, numérotées dans l'ordre croissant de leurs arguments pris dans $[0 ; 2\pi[$ (k_0 est donc réel). Un robot de nettoyage part du kiosque K_0 à la minute 0. Chaque minute, il se rend au kiosque suivant en tournant autour de la fontaine dans le sens direct (de K_5, il repart vers K_0).

Tâche 3 : À quelle distance, en mètres, du kiosque K_1 se trouve le robot à la minute 2027 ? **1,5pt**

Présentation : **0,5pt**

sujetexa.com