Ministère des Enseignements Secondaires **Année scolaire : 2026-2027**
GROUPE « INNOVATION + » **Clase : T^le C**
Tel : 696 29 45 92 / 672 98 31 45 **Durée : 4h Coefficient : 07**
Responsable : DGADJEU DAVID **Prof : Dgadjeu David**

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGES SUR LES NOMBRES COMPLEXES

Partie I : EVALUATION DES RESSOURCES

EXERCICE 1

I- Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2 - 2\overline{z} + 1 = 0$

b) $z^2 + |z|^2 - 8 = 0$

II- Soit le polynôme P défini dans $\mathbb{C}$ par : $P(z) = z^4 + 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 + 3z + 1$

1°) Montrer que $P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$

2°) En déduire que si z_0 est solution e l'équation $P(z) = 0$, alors $\overline{z_0}$, $\frac{1}{z_0}$ et $\frac{1}{\overline{z_0}}$ sont aussi solution de cette équation

3°) Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une racine de la forme $a + i$ où a est un réel que l'on déterminera.

4°) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

EXERCICE 2

I- A tout nombre complexe z différent de i, on associe le nombre complexe $f(z) = \frac{1-iz}{1+iz}$

1°) Montrer que si z est un complexe de module 1, alors $f(z)$ est un imaginaire pur.

2°) On pose $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels.

a) Montrer que $f(z) = \frac{1-(x^2+y^2)}{(y-1)^2+x^2} + i\frac{-2x}{(y-1)^2+x^2}$

b) Déterminer et caractériser l'ensemble (Γ) des points $M(x\,;y)$ du plan tels que $f(z)$ soit un imaginaire pur.

c) Déterminer et caractériser l'ensemble (D) des points $M(x\,;y)$ du plan tels que $f(z)$ soit un nombre réel.

II- Soit $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$. On considère l'équation d'inconnue z,

$(E) : (1 + iz)^3(1 - itan\theta) = (1 - iz)^3(1 + itan\theta)$

1°) Soit z_0 une solution de (E).

Montrer que $|1 + iz_0| = |1 - iz_0|$ et en déduire que z_0 est un réel.

2°) Montrer que $\frac{1+itan\theta}{1-itan\theta} = e^{i2\theta}$

3°) Soit $z \in \mathbb{R}$, on pose $z = tan\alpha$ avec $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

a) Montrer que l'équation (E) est équivalente à une équation (E') en α que l'on déterminera

b) Résoudre l'équation (E') en α.

c) En déduire les solutions de (E).

EXERCICE 3

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_0) : z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

2°) En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(E) : \left(\frac{z-i}{z+1}\right)^3 + \left(\frac{z-i}{z+1}\right)^2 + \left(\frac{z-i}{z+1}\right) + 1 = 0$

EXERCICE 4

I- Soit le polynôme complexe P défini par : $P(z) = z^3 - 2(1+2i)z^2 + 7iz + 3(1-3i)$

1°) Démontrer qu'il existe un imaginaire pur ib solution de l'équation : $P(z) = 0$

2°) Déterminer les complexes α et β tels que : $P(z) = (z - ib)(z^2 + \alpha z + \beta)$

3°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

II- Soit l'équation (E) : $z^4 - 5z^3 + 6z^2 - 5z + 1 = 0$

a) Justifier que 0 n'est pas solution de (E)

b) Démontrer que l'équation (E) est équivalente au système $\begin{cases} u = z + \frac{1}{z} \\ u^2 - 5u + 4 = 0 \end{cases}$

c) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

EXERCICE 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On pose $z = x + iy$.

Déterminer, dans chacun des cas suivants, l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que :

a) $\left|\frac{z+i}{z-i}\right| = 3$; b) $\left|\overline{z} + \frac{3}{2}i\right| = \sqrt{5}$; c) $|z + \overline{z} - 1| = 4$;

d) $|z + 5 - i| = |\overline{z} - 2 - i|$

e) $|z + 1 + i| = |3z - 9 - 3i|$

f) $(z\overline{z})^2 - z\overline{z} - 6 = 0$; g) $z^2 - (1-2i)^2 = \overline{z}^2 - (1+2i)^2$

h) $\frac{2z-1}{z^2}$ est un nombre réel ;

i) $\frac{z-2+4i}{z+1-2i}$ est un nombre réel ; j) $\frac{z-2+4i}{z+1-2i}$ est un imaginaire pur

k) $\left|\frac{z+2+3i}{z+1-2i}\right| = 1$

EXERCICE 6

A- Dans cet exercice, $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes et $Re(z)$ la partie réelle du complexe z.

On note $P(z) = z^3 - (6+5i)z^2 + (3+20i)z + 10 - 15i$

1°) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $w = -2i$.

2°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (3+3i)z + 5i = 0$

3-a) Montrer que $3 + 2i$ est une racine de P

Déterminer les complexes a, b et c tels que $P(z) = (az^2 + bz + c)\big(z - (3+2i)\big)$

b) Déduire dans $\mathbb{C}$, les solutions de l'équation (E) : $P(z) = 0$

On notera $z_1,\ z_2, z_3$ les trois solutions de (E) telles que : $Re(z_1) < Re(\ z_2) < Re(z_3)$.

B- Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1 + i\sqrt{3}$, $z_B = -1 - i$ et $z_C = \big(2 + \sqrt{3}\big) + i$.

1°) Calculer les distances AB, BC et AC. Quelle est la nature du triangle ABC ?

2-a) Ecrire z_A, z_B et $\frac{z_A}{z_B}$ sous forme trigonométrique.

b) Ecrire $\frac{z_A}{z_B}$ sous forme algébrique.

c) En déduire les valeurs exactes de $cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

C- Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$. On considère pour tout nombre complexe $z = x + iy$ différent de 1, le nombre complexe z' tel que $z' = \frac{z-1}{\bar{z}-1}$. On note M le point d'affixe z et M' le point d'affixe z'.

1°) Calculer z', puis donner une interprétation géométrique de ce calcul.

2°) Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et y.

3°) Donner et construire l'ensemble des points M pour lesquels z' est un réel.

EXERCICE 7

1°) P est un polynôme à variable complexe défini par : $P(z) = z^3 + 3iz - 5 + 5i$.

a) Vérifier que le nombre complexe $-1 - i$ est une racine de P.

b) Déterminer les complexes a et b tels : $P(z) = (z + 1 + i)(z^2 + az + b)$.

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

2°) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -1 - i$, $z_B = 2 - i$ et $z_C = -1 + 2i$.

a) Déterminer l'ensemble (D) des points M d'affixe z tels que : $|z - 2 + i| = |z + 1 - 2i|$, puis vérifier que le point A appartient à (D).

b) Déterminer un argument du nombre complexe $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$, puis en déduire la mesure principale de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}\right)$.

c) En déduire la nature exacte du triangle ABC.

3°) On considère la similitude directe S de centre B qui transforme A en C.

a) Donner le rapport et l'angle de la similitude S.

b) Donner l'écriture complexe de S.

c) $(\mathcal{C})$ est le cercle circonscrit au triangle ABC. Déterminer les caractéristiques de $(\mathcal{C}')$ image de $(\mathcal{C})$ par S.

EXERCICE 8

I- 1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_1) : $z^2 - 2z\cos\alpha + 1 = 0$ où α est un paramètre réel.

2°) Donner la forme trigonométrique des solutions de l'équation (E_n) : $z^{2n} - 2z^n\cos\alpha + 1 = 0$ où n est un entier naturel non nul.

II- Soit $P_\alpha(z) = z^{2n} - 2z^n\cos\alpha + 1$.

1°) Montrer que $P_\alpha(z) = \prod_{k=0}^{n-1}\left[z^2 - 2\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + 1\right]$

2-a) Calculer $P_\alpha(1)$

b) En déduire que $\prod_{k=0}^{n-1}\sin^2\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2n}\right)}$

3°) Pour tout $\alpha \in]0\,;\pi[$ et pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose :

$H_n(\alpha) = \prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)$.

a) Montrer que $2^{n-1}H_n(\alpha) = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2n}\right)}$

b) Quelle est la limite de $H_n(\alpha)$ lorsque α tend vers 0 ?

EXERCICE 9

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

1°) On considère l'équation (E) : $z^3+\left(-4\sqrt{3}+8i\right)z^2+\left(16-32\sqrt{3}i\right)z+128i=0$.

a) Montrer que $-8i$ est solution de (E).

b) On pose $P(z)=z^3+\left(-4\sqrt{3}+8i\right)z^2+\left(16-32\sqrt{3}i\right)z+128i$.

Déterminer a et b tels que $P(z)=(z+8i)(z^2+az+b)$.

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2°) Soient A, B et C les points d'affixes $z_A=2\sqrt{3}-2i,\ z_B=2\sqrt{3}+2i$ et $z_C=-8i$.

Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ qui transforme C en un point D. Soit h l'homothétie de centre O qui transforme B en D.

a) Montrer que OAB est un triangle équilatéral.

b) Montrer que l'affixe du point D est : $z_D=4\sqrt{3}+4i$.

c) Montrer que OAD est un triangle rectangle.

d) Déterminer l'écriture complexe de l'homothétie h.

3°) Soit S la similitude directe de centre D qui transforme B en A.

a) Démontrer que l'écriture complexe de S est : $z'=\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{3}i\right)z-8i$.

b) En déduire les éléments caractéristiques de S.

c) Soit $M(x\,;y)$ un point du plan et $M'(x';y')$ son image par S.

(i) Déterminer l'expression analytique de S.

(ii) Déterminer l'mage (D') par S de la droite (D) : $x-2y+1=0$.

EXERCICE 10

1°) On considère h la transformation du plan qui à tout point $M(x\,;y)$ associe le point $M'(x';y')$ tel que : $\begin{cases} x'=x-y\sqrt{3}+\frac{3}{2} \\ y'=x\sqrt{3}+y+\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$. Soient z et z' les affixes respectives de M et M'.

a) Ecrire z' en fonction de z.

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de h.

2°) Soit $n\in\mathbb{N}$, on définit la suite (z_n) par : $\begin{cases} z_0=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_{n+1}=\left(1+i\sqrt{3}\right)z_n \end{cases}$ Soit A_n le point d'affixe z_n.

On pose $r_n=|z_n|$ et $\beta_n=Arg(z_n)$; ainsi on a $z_n=r_ne^{i\beta_n}$.

a) Ecrire z_0 et z_1 sous forme exponentielle.

b) Déterminer les racines cubiques de z_1.

c) Montrer que (r_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le 1er terme.

d) Montrer que (β_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le 1er terme.

e) En déduire l'expression de z_n en fonction de n.

f) On pose $L_n=A_0A_1+A_1A_2+\cdots+A_{n-1}A_n=\sum_{k=1}^{n}A_{k-1}A_k$ la ligne brisée engendrée par les points $A_0, A_1, \ldots., A_n$.

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n$

EXERCICE 11

1°) On considère l'équation $(E) : z^3 - 6z^2 + 12z - 16 = 0$.

a) Montrer que (E) admet une solution réelle z_0.

b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2°) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives 4, $1 + i\sqrt{3}$ et $1 - i\sqrt{3}$.

a) Représenter A, B et C.

b) Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

3°) Soit K le point d'affixe $-\sqrt{3} + i$. F et l'image de K par la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et G est l'image de K par la translation t de vecteur $\overrightarrow{OB}$.

a) Déterminer les écritures complexes de la rotation r et de la translation t.

b) Quelles sont les affixes respectives de F et de G ?

c) Montrer que les droites (OC) et (OF) sont perpendiculaires.

4°) Soit H le quatrième sommet du parallélogramme $COFH$.

a) Calculer l'affixe de H.

b) Montrer que $COFH$ est un carré.

EXERCICE 12

L'exercice comporte (03) parties I/, II/ et III/.

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique $1cm$.

Soient A, B, C et D quatre points du plan complexe d'affixes respectives :

$z_A = -1 - i$; $z_B = 2 - 4i$; $z_C = 5 - i$ et $z_D = 2 + 2i$.

I/ On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^3 + (-3 + 5i)z^2 - (4 + 8i)z + 12 - 4i = 0$.

1°) Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle z_0 que l'on déterminera.

2°) Déterminer deux nombres complexes a et b tels que pour tout nombre complexe z, on ait : : $z^3 + (-3 + 5i)z^2 - (4 + 8i)z + 12 - 4i = (z - 2)(z^2 + az + b)$.

3-a) Vérifier que $(3 - 3i)^2 = -18i$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

4-a) Calculer sous forme algébrique les rapports $\frac{z_B - z_A}{z_B - z_C}$ et $\frac{z_D - z_A}{z_D - z_C}$

b) Déduire la nature exacte des triangle ABC et ADC.

c) Déduire que les points A, B, C et D sont cocycliques, puis déterminer le rayon et les coordonnées du centre du cercle $(\mathcal{C})$ circonscrit au quadrilatère ABCD (On désignera par E son centre).

d) Placer les points A, B, C, D et E dans le plan, puis tracer le cercle $(\mathcal{C})$.

II/ Soit f la similitude directe qui laisse B invariant et qui transforme C en A.

1°) Déterminer le centre, le rapport et l'angle de f.

2-a) Donner l'écriture complexe de la similitude f.

b) Déterminer les caractéristiques (centre et rayon) du cercle $(\mathcal{C}')$ image du cercle $(\mathcal{C})$ par la similitude f.

c) Donner une équation cartésienne de la droite (D') image de la droite $(D) : 2x - y = 1$ par f.

III/ Soit g la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $g(z)$ tel que $g(z) = \frac{z+1}{z+i}$

On considère les points G et H d'affixes respectives $z_G = -1$ et $z_H = -i$.

1-a) Déterminer sous forme algébrique les racines carrées du nombre complexe $4-2i$.
b) En déduire l'ensemble des points invariants par g.

2°) On pose $z=x+iy$ où x et y sont des nombres réels.

a) Exprimer en fonction de x et y les parties réelle et imaginaire de $g(z)$.
b) Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan d'affixe z tel que $g(z)$ soit un réel.
c) Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan d'affixe z tels que $|g(z)|=1$.

Partie II : EVALUATION DES COMPETENCES

Situation 1 :

M. MOUAFFO possède trois terrains dont il veut absolument clôturer car il lui est rapporté que des personnes mal intentionnées utilisent ces espaces non occupées à des mauvaises fins. M. MOUAFFO décide donc d'acheter du fil barbelé pour clôturer ses trois terrains. Le rouleau de $5m$ de fil barbelé est vendu à 3500 frs.

Le premier terrain : est formé de l'ensemble de tous les points $M(x\,;y)$ du plan complexe vérifiant $|2iz-1-3i|=8$.

Le second terrain : quant à lui est de forme rectangulaire et dont les dimensions sont la partie réelle et la partie imaginaire solution de l'équation $(1+4i)z+(3-4i)\overline{z}=4-8i$ où $\overline{z}$ est le conjugué de z.

Le troisième terrain : est formé de l'ensemble des points M d'affixe z du plan complexe tels que $Re(Z)=0$ avec $Z=\frac{z}{z+2i}$

NB : Les distances dans tous ces terrains sont exprimées en décamètre.

Tâches :

1°) Quel est le montant à dépenser par M. MOUAFFO pour l'achat du fil barbelé permettant de clôturer entièrement le premier terrain ?

2°) Quel est le montant à dépenser par M. MOUAFFO pour l'achat du fil barbelé permettant de clôturer entièrement le deuxième terrain ?

3°) Quel est le montant à dépenser par M. MOUAFFO pour l'achat du fil barbelé permettant de clôturer entièrement le troisième terrain ?

Situation 2 :

M. Roma est copté par le P.C.O d'un évènement sportif olympique pour réaliser les patrons des nouvelles aires de jeu de certains sports.

- L'aire de jeu de basket est donnée par l'ensemble des points M d'affixe z privée de 1 tels que $\frac{z-1-2i}{z-1}$ soit imaginaire pur.
- L'aire de jeu de la course de résistance est donnée par l'ensemble des points M d'affixe z tels que $z^4=-4$.
- L'aire de jeu du lancer de javelot est donnée par l'ensemble des points M d'affixe z tels que $(z-1)[z^2-(1+4i)z-5+5i]=0$.

Tâches :

1. Déterminer la nature exacte puis représenter dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ l'aire de jeu de basket.

2. Déterminer la nature exacte puis représenter dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ l'aire de la course de résistance.
3. Déterminer la nature exacte, puis représenter dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ l'aire de jeu du lancer de javelot.

Situation 3 : LE RESEAU TELEPHONIQUE DE LA COMMUNE

La commune de Fokoué veut améliorer la couverture téléphonique de trois de ses villages A, B et C. Le plan de la commune (schéma 1) est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité **500m** ; les villages A, B et C ont pour affixes respectives $-4,\ 4$ et $8i$. Le central téléphonique est situé au point O.

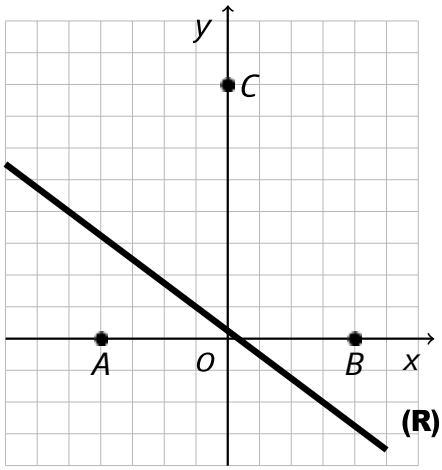


Schéma 1 : plan de la commune

<u>L'antenne-relais</u>. Le village C est deux fois plus peuplé que chacun des villages A et B. L'opérateur évalue la desserte d'un point M par l'indice $I(M) = MA^2 + MB^2 + 2MC^2$
et la juge bonne lorsque $I(M) \leq 196$. L'antenne-relais doit être implantée au bord de la zone (R), ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-2-5i| = |z+4+3i|$, à un endroit où la desserte est bonne.

<u>Le câblage</u>. Le poste électrique de la commune doit être relié au central par une ligne de **4km** exactement. Le fournisseur vend le câble en rouleaux de **35 m** à **20 000 FCFA** et en rouleaux de **55 m** à **30 000 FCFA** ; les rouleaux sont raccordés bout à bout, sans être coupés.

<u>Les relais de la vallée</u>. Pour couvrir la vallée, l'opérateur installe des relais $R_0, R_1, R_2, \ldots$: R_0 a pour affixe $r_0 = 32$ et pour tout entier naturel n, l'affixe de R_{n+1} est $r_{n+1} = \frac{1+i}{2} r_n$. Un relais n'est utile que s'il est situé à **au moins 1 km** du central ; parmi les relais utiles, seuls ceux qui sont situés sur la route nationale, qui est l'axe $(O\,;\vec{u})$, peuvent être raccordés au réseau électrique.

Tâches :
1°) Quelle est la longueur de la portion de la route (R) sur laquelle l'antenne-relais peut être implanté ?
2°) Combien de rouleaux de chaque type faut-il acheter pour que la ligne électrique coûte le moins cher possible ?
3°) Combien de relais seront utiles, et combien d'entre eux pourront être raccordés au réseau électrique ?