GROUPE DE RÉPÉTITION VISION SUCCÈS Département de Mathématiques Examinateur : **M. SCEO BREKA OLIVIER**	**PRÉPARATION-ÉVAL 2** Classe : **Première C**	Année scolaire **2026/2027** Durée : **03 h** Coef. : **6**

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Calculatrice autorisée. La rigueur de la rédaction et la clarté des justifications sont prises en compte.

PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES (15 points)

EXERCICE 1 : Équations et inéquations dans $\mathbb{R}$, trigonométrie — *3,5 pts*

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $(E)\ \sqrt{2x+7} = x+2$ — *0,5 pt*

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $(I)\ \sqrt{5-2x} \leq x+1$ — *0,75 pt*

3) Soit $R(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$. Vérifier que 2 est un zéro de R, factoriser $R(x)$, puis résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $R(x) \leq 0$. — *0,75 pt*

4) On pose $T(x) = 2\cos^2 x - (1+\sqrt{2})\cos x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ l'équation $T(x) = 0$ puis l'inéquation $T(x) \leq 0$. — *0,75 + 0,75 pt*

EXERCICE 2 : Démonstrations en trigonométrie — *3 pts*

1) Démontrer que pour tout réel x : $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$. — *0,5 pt*

2) Pour $\theta = \dfrac{\pi}{5}$, justifier que $\cos 3\theta = -\cos 2\theta$, puis montrer que $c = \cos\dfrac{\pi}{5}$ vérifie $4c^3 + 2c^2 - 3c - 1 = 0$. — *0,5 pt*

3) Factoriser $4c^3 + 2c^2 - 3c - 1$ et en déduire que $\cos\dfrac{\pi}{5} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$. — *0,5 pt*

4) Calculer $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ puis en déduire la valeur exacte de $\sin\dfrac{\pi}{10}$. — *0,5 pt*

5) Démontrer que pour tout réel x tel que $\sin 2x \neq 0$ et $\cos 2x \neq 0$: $\dfrac{1}{\tan x} - \tan x = \dfrac{2}{\tan 2x}$. — *0,5 pt*

6) En déduire que $\tan\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$. — *0,5 pt*

EXERCICE 3 : Système à trois inconnues et changement de variables — *2,5 pts*

1) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ par la méthode du pivot de Gauss : $(S)\ \begin{cases} 2x + 2y + z = 1 \\ 4x - 2y + z = 4 \\ 2x + 4y - z = -2 \end{cases}$ — *1 pt*

2) On considère le système $(S')\ \begin{cases} 2\cos a + 2\sin b + \tan c = 1 \\ 4\cos a - 2\sin b + \tan c = 4 \\ 2\cos a + 4\sin b - \tan c = -2 \end{cases}$ d'inconnues $a \in]-\pi\,;\pi]$, $b \in [0\,;2\pi[$ et $c \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$. Déduire de la question 1) la résolution du système (S'). — *1,5 pt*

EXERCICE 4 : Dénombrement : démonstrations — *2,5 pts*

Dans cet exercice, n et p sont des entiers naturels avec $1 \leq p \leq n$.

1) Démontrer que si $p \leq n-1$ alors $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$. — *0,5 pt*

2) Démontrer que $p\,C_n^p = n\,C_{n-1}^{p-1}$. Interpréter cette égalité en dénombrant de deux façons les comités de p membres, dont un président, choisis parmi n personnes. — *0,5 pt*

3) En déduire que $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} p\,C_n^p = n\,2^{n-1}$. — *0,5 pt*

4) Pour $n \geq 2$, montrer que $C_{n+2}^3 - C_n^3 = n^2$ puis résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $C_{n+2}^3 - C_n^3 = 196$. — *0,5 pt*

5) Un club de 12 membres élit un comité de 4 membres dont un président. Calculer de deux façons le nombre de comités possibles. — *0,5 pt*

EXERCICE 5 : Barycentres et géométrie analytique — *3,5 pts*

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. On donne $A(-1\,;2)$, $B(5\,;2)$ et $C(-1\,;-4)$.

1) Montrer que ABC est un triangle rectangle isocèle en A, puis déterminer les coordonnées du barycentre G de $\{(A\,;2),(B\,;1),(C\,;1)\}$. *0,5 pt*

2) Montrer que pour tout point M : $2MA^2+MB^2+MC^2=4MG^2+54$, puis déterminer l'ensemble (Γ) des points M tels que $2MA^2+MB^2+MC^2=70$ et en donner une équation cartésienne. *0,75 pt*

3) Pour tout réel m, on considère le système $\{(A\,;m-1),(B\,;2),(C\,;1)\}$. Déterminer la valeur de m pour laquelle il n'admet pas de barycentre. Pour les autres valeurs, on note G_m le barycentre ; montrer que $G_m\left(\dfrac{10-m}{m+2}\,;\dfrac{2m-2}{m+2}\right)$. *0,5 pt*

4) Déterminer l'ensemble des points G_m lorsque m décrit $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$. *0,5 pt*

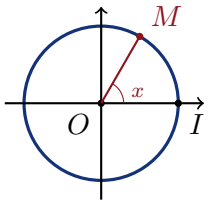
5) Déterminer une équation cartésienne du cercle $(\mathcal{C})$ circonscrit à ABC et celle de sa tangente en A. *0,75 pt*

6) Déterminer la valeur de m pour laquelle G_m appartient à $(\mathcal{C})$. *0,5 pt*

PARTIE B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES (5 points)

Situation : La commune de Mbouda aménage une place publique. Pour clôturer un potager communautaire adossé à un mur, un géomètre indique que la longueur L (en mètres) de grillage disponible est la solution de l'équation $\sqrt{2L-20}=L-50$. Le potager est rectangulaire : le grillage, entièrement utilisé, forme les deux côtés perpendiculaires au mur, de longueur x chacun, et le côté parallèle au mur. L'aire du potager doit être d'au moins 400 m^2.

Le parc de la place est un disque de centre O et de rayon 20 m. Soit I le point du bord repérant l'origine des angles : un point M du bord est repéré par la mesure $x\in[0\,;2\pi[$ de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM})$. Quatre bornes sont placées aux points du bord dont les mesures x sont les solutions de l'équation $(2\cos x-\sqrt{2})(2\sin x+1)=0$. La zone délimitée par ces quatre bornes sera engazonnée ; 5 kg de semences permettent d'ensemencer 150 m^2.



L'association « Mbouda Propre » compte 8 hommes et 7 femmes. Elle doit former une commission de gestion de 5 membres dont un président, qui doit être un homme, et comptant au moins deux femmes.

Tâche 1 : Déterminer la largeur maximale x du potager. *1,5 pt*

Tâche 2 : Déterminer, au dixième de kilogramme près, la masse de semences nécessaire à la zone engazonnée. *1,5 pt*

Tâche 3 : Déterminer le nombre de commissions de gestion possibles. *1,5 pt*

Présentation : *0,5 pt* *Examinateur : M. SCEO BREKA OLIVIER*