

-Appréciations de la production : Expert (A+) [18-20] — Acquis (A) [15-17] — En cours d'acquisition (EA) [11-14] — Non acquis (NA) [0-10]

## PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES (15 pts)

### EXERCICE I (5 pts)

Soit le polynôme  $P(z) = z^3 + 9iz^2 + 2(6i - 11)z - 3(4i + 12)$  où  $z \in \mathbb{C}$ .

1. Montrer que  $P$  admet une racine réelle à déterminer. **(0,5 pt)**
2. Trouver les nombres complexes  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que  $P(z) = (z + 2)(az^2 + bz + c)$ . **(1,5pt)**
3. Déterminer les racines carrées de  $-5 - 12i$ . **(1 pt)**
4. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $z^2 + (9i - 2)z - 6(i + 3) = 0$ . **(1 pt)**
5. En déduire les solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation :  $P(z) = 0$ . **(1 pt)**

### EXERCICE II (5 pts)

1. On considère dans l'ensemble  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$  des nombres complexes, le système

$$(S) \quad \begin{cases} (2 + 3i)z - 3iz' = 1 - i \\ (-1 + 2i)z + (3 - i)z' = i \end{cases} \quad \text{a. Résoudre (S). (1,5 pt)}$$

b. Déterminer le module du nombre complexe  $v = \frac{i(1+6i)}{(3-i)^2}$ . **(0,5 pt)**

2. Soit  $z$  un nombre complexe on pose :  $U = (1 + i)z + 1$

a. Montrer pour  $z \neq i$ ,  $\frac{U-z}{i-z}$  est un imaginaire pur à préciser **(0,75 pt)**

b. En déduire que  $z \neq i$ ,  $\frac{U-z}{2iz+2}$  est un réel à préciser **(0,75pt)**

3) Soit  $F$  la fraction définie pour tout complexe  $z \neq i$  par  $F(z) = \frac{iz+3-4i}{z+i}$ .

a) Démontrer qu'il existe deux valeurs de  $z$ , que l'on déterminera, tel que  $F(z)=z$ . **(0,75pt)**

b) Déterminer l'ensemble (T) des points M d'affixe  $z$  tels que  $F(z)$  soit un réel. **(0,75pt)**

### EXERCICE III (5 pts)

On considère la fonction  $h$  définie par  $h(x) = \frac{x+2}{x+1}$ .

I/1. Étudier les variations de la fonction  $h$ . **(0,5 pt)**

2) Sans résoudre  $h$ , montrer que l'équation  $h(x) = x$  admet une unique solution  $\alpha$  appartenant à  $[1; 2]$ . **(1 pt)**

3) Montrer que  $|h'(x)| \leq \frac{1}{4}$  sur  $[1; 2]$ . **(1 pt)**

4) En déduire que  $|h(x) - \alpha| < |x - \alpha|$ . **(0,5 pt)**

II) soit la fonction  $f$  définie par  $g(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$  et  $(C)$  sa courbe représentative

1) Étudier les variations de  $f$ . **(0,5 pt)**

2) Montrer que  $(C)$  admet un point d'inflexion  $\Omega$  dont on précisera les coordonnées. **(0,75 pt)**

3) Étudier les branches infinies de  $g(x)$ . **(0,5 pt)**

4) Montrer que  $f$  réalise une bijection sur l'ensemble  $J$  que l'on déterminera. **(0,25 pt)**

## PARTIE B : ÉVALUATION DE COMPÉTENCES (5 pts)

Denzel, Zaelle et Zena sont des anciens élèves de M. Poutchoko.

Le docteur Denzel a une clinique sur un terrain ayant la forme d'un triangle rectangle dont deux bordures sont  $(OI)$  et  $(OJ)$  sur un repère orthonormé  $(O; I; J)$  d'unité 10 m. L'autre bordure est constituée sur la carte par l'ensemble des points  $M(x; y)$  du plan complexe muni du repère orthonormé précédent tels que  $|iz + 1 - 4i| = |\bar{z} + 6 - 3i|$  avec  $z = x + iy$ . Sur la carte, 1 cm sera utilisé pour représenter 10 m.

L'agronome Zaelle a cinq studios identiques en location. Elle veut refaire le carrelage des salons et des chambres tous rectangulaires. Elle a prévu 463.000 Frs pour cela. Les dimensions de chaque salon sont, en m, la partie réelle et la partie imaginaire d'une solution de l'équation  $iz^2 + (9 - 9i)z - 42 + 2i = 0$ , tandis que celles de chaque chambre sont, en m, la partie réelle et la partie imaginaire de l'autre solution de cette équation. Le carrelage nécessite 10.500 Frs par  $m^2$ .

La géomètre Zena a un jardin dans sa cour et les bordures sont constituées de l'ensemble des points  $M(x; y)$  du plan complexe muni d'un repère orthonormé d'unité 1 m tels que  $Z = \frac{z+1-2i}{z-2+i}$  soit imaginaire pur avec  $z = x + iy$ . Ce jardin doit être entouré d'une triple rangée de fil barbelé dont le mètre coûte 200 Frs. La main d'œuvre et le reste du matériel sont estimés à 12.000 Frs et Zena a prévu au total 15.000 Frs pour cela. On prendra  $\pi \simeq 3,14$ .

1. Faites une représentation précise du terrain du docteur Denzel sur votre feuille. **(1,5 pt)**
2. Zaelle a-t-elle prévu assez d'argent pour réaliser ses travaux ? **(1,5 pt)**
3. Zena pourra-t-elle entourer son jardin avec la somme prévue ? **(1,5 pt)**

**Présentation : 0,5 pt**

Examineur : M Poutchoko Hermann