

COURS DE PHYSIQUE

Année scolaire 2026-2027 | Classe : Terminale D et TI

PHYSIQUE

Chapitre 2 : Équations aux dimensions

Leçon 2 : Dimensions d'une grandeur – Homogénéité d'une relation

Compétences visées

Chapitre 2 : utiliser les équations aux dimensions pour contrôler, établir ou exploiter une relation entre grandeurs physiques.

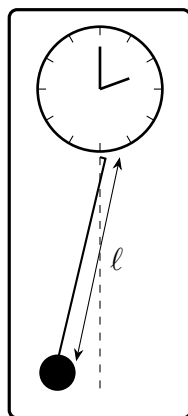
Leçon 2 : déterminer la dimension d'une grandeur et vérifier l'homogénéité d'une relation afin de valider une formule, trouver l'unité d'une constante ou établir une loi physique.

1. Situation de vie

Contexte

M. ATANGANA, horloger au marché central de Yaoundé, répare une horloge à balancier qui **retarde** : la période d'oscillation de son balancier est trop grande. Pour savoir s'il doit allonger ou raccourcir le balancier, il demande à ses trois apprentis la formule de la période T d'un pendule de longueur ℓ et de masse m (g : intensité de la pesanteur). Ils proposent :

$$(1) T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{\ell}} ; \quad (2) T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} ; \quad (3) T = 2\pi\sqrt{\frac{m\ell}{g}}.$$



Tâche : aide M. ATANGANA à identifier, sans calcul de valeur numérique, la seule formule qui peut être exacte, puis dis-lui s'il doit allonger ou raccourcir le balancier.

2. Prérequis

- **Unités de base du SI** : mètre (m), kilogramme (kg), seconde (s), ampère (A), kelvin (K), mole (mol), candela (cd).
- **Relations usuelles** : $v = \frac{d}{t}$ (d : distance) ; $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$; $F = ma$; $P = mg$; $W = Fd$; $E_c = \frac{1}{2}mv^2$; $\mathcal{P} = \frac{W}{t}$; $\rho = \frac{m}{V}$; $p = \frac{F}{S}$; $q = It$; $\mathcal{P} = UI$; $U = RI$.
- **Puissances** : $x^a x^b = x^{a+b}$; $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$; $(x^a)^b = x^{ab}$; $\sqrt{x} = x^{1/2}$; $x^0 = 1$.
- **Système d'équations linéaires** à deux ou trois inconnues (méthode de substitution).

3. Activités

Activité 1 : dimension d'une grandeur et homogénéité

On note $[G]$ la dimension d'une grandeur G , et L, M, T les dimensions de la longueur, de la masse et du temps.

- À partir des relations de définition, exprime la dimension de la vitesse v , de l'accélération a , de la force F et de l'énergie cinétique E_c .
- Déduis-en l'expression du newton et du joule en unités de base du SI.
- Un élève écrit pour la position d'un mobile : $x = \frac{1}{2}at + v_0t + x_0$. Montre que cette relation est fautive et corrige-la.

Exploitation

- $[v] = \frac{[d]}{[t]} = L \cdot T^{-1}$; $[a] = \frac{[v]}{[t]} = L \cdot T^{-2}$; $[F] = [m][a] = M \cdot L \cdot T^{-2}$; $[E_c] = \left[\frac{1}{2}\right] [m][v]^2 = M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$ (le nombre $\frac{1}{2}$ est sans dimension).
- $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$; $1 \text{ J} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$.
- $[x] = L$, $[v_0t] = L \cdot T^{-1} \cdot T = L$, mais $[\frac{1}{2}at] = L \cdot T^{-2} \cdot T = L \cdot T^{-1} \neq L$: on ne peut pas additionner une vitesse et une longueur, la relation est fautive. Relation correcte : $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$.

Activité 2 : analyse dimensionnelle

- La loi de la gravitation s'écrit $F = G \frac{mm'}{d^2}$. Détermine la dimension et l'unité SI de la constante G .
- On suppose que la célérité c du son dans un gaz ne dépend que de la pression p du gaz et de sa masse volumique ρ : $c = k p^x \rho^y$ (k sans dimension). Détermine x et y .

Exploitation

- $G = \frac{F d^2}{m m'} \Rightarrow [G] = \frac{M L T^{-2} \cdot L^2}{M^2} = M^{-1} \cdot L^3 \cdot T^{-2}$; unité : $\text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$ (ou $\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$).

$$b) [\rho] = \frac{[F]}{[S]} = M L^{-1} T^{-2} \text{ et } [\rho] = M L^{-3}. [c] = [\rho]^x [\rho]^y \Leftrightarrow L T^{-1} = M^{x+y} L^{-x-3y} T^{-2x}.$$

Par identification : $M : x + y = 0$; $T : -2x = -1$; $L : -x - 3y = 1$. D'où $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$

(et $L : -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$, vérifié). Donc $c = k \sqrt{\frac{\rho}{\rho}}$.

4. Résumé du cours

4.1 Grandeurs fondamentales

Toute grandeur physique s'exprime à partir de sept grandeurs fondamentales :

Grandeur fondamentale	Dimension	Unité SI	Symbole
Longueur	L	mètre	m
Masse	M	kilogramme	kg
Temps	T	seconde	s
Intensité du courant électrique	I	ampère	A
Température thermodynamique	Θ	kelvin	K
Quantité de matière	N	mole	mol
Intensité lumineuse	J	candela	cd

4.2 Équation aux dimensions

L'équation aux dimensions d'une grandeur G exprime sa dimension $[G]$ en fonction des dimensions fondamentales :

$$[G] = M^\alpha L^\beta T^\gamma I^\delta \Theta^\varepsilon N^\zeta J^\eta.$$

Une grandeur dont tous les exposants sont nuls est **sans dimension** : $[G] = 1$ (nombres, angles, rapports de deux grandeurs de même nature, rendement, coefficient de frottement...).

Règles de calcul :

- $[A \cdot B] = [A] \cdot [B]$; $\left[\frac{A}{B}\right] = \frac{[A]}{[B]}$; $[A^n] = [A]^n$;
- $[k A] = [A]$ si k est un nombre ;
- $\left[\frac{dA}{dt}\right] = \frac{[A]}{T}$; $\left[\int A dt\right] = [A] \cdot T$.

4.3 Dimensions de quelques grandeurs dérivées

Grandeur	Relation	Dimension	Unité SI (en unités de base)
Vitesse	$v = d/t$	$L T^{-1}$	$m \cdot s^{-1}$
Accélération	$a = \Delta v / \Delta t$	$L T^{-2}$	$m \cdot s^{-2}$
Force	$F = ma$	$M L T^{-2}$	$N = kg \cdot m \cdot s^{-2}$
Travail, énergie	$W = Fd$	$M L^2 T^{-2}$	$J = kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$
Puissance	$\mathcal{P} = W/t$	$M L^2 T^{-3}$	$W = kg \cdot m^2 \cdot s^{-3}$
Pression	$p = F/S$	$M L^{-1} T^{-2}$	$Pa = kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$
Masse volumique	$\rho = m/V$	$M L^{-3}$	$kg \cdot m^{-3}$
Fréquence, pulsation	$f = 1/T, \omega = 2\pi f$	T^{-1}	$Hz = s^{-1}, rad \cdot s^{-1}$
Charge électrique	$q = It$	$I T$	$C = A \cdot s$
Tension électrique	$U = \mathcal{P}/I$	$M L^2 T^{-3} I^{-1}$	$V = kg \cdot m^2 \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$
Résistance	$R = U/I$	$M L^2 T^{-3} I^{-2}$	$\Omega = kg \cdot m^2 \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$

4.4 Homogénéité d'une relation

Principe d'homogénéité : une relation physique est **homogène** si ses deux membres ont la même dimension. Toute relation physique exacte est homogène.

Conséquences :

- on ne peut additionner, soustraire ou comparer que des grandeurs de même dimension ; tous les termes d'une somme ont la même dimension ;
- l'argument d'une fonction mathématique (sin, cos, tan, exp, ln) est sans dimension, et la fonction elle-même est sans dimension ;
- une relation non homogène est **forcément fausse** ; une relation homogène n'est **pas forcément juste** (l'homogénéité ne fixe ni les coefficients numériques comme $\frac{1}{2}$ ou 2π , ni les signes) : c'est une condition **nécessaire mais non suffisante**.

4.5 Utilisations des équations aux dimensions

1. **Vérifier** une relation : on compare les dimensions des deux membres et de chaque terme d'une somme.
2. **Trouver la dimension et l'unité** d'une constante : on l'isole dans la relation où elle apparaît.
3. **Établir une loi (analyse dimensionnelle)** : si G ne dépend que de A, B, C , on pose $G = k A^x B^y C^z$ (k sans dimension) ; on écrit $[G] = [A]^x [B]^y [C]^z$, puis on identifie les exposants de $M, L, T \dots$ dans les deux membres et on résout le système obtenu. La constante k se détermine par l'expérience ou par la théorie.
4. **Convertir** une unité dérivée en unités de base (exemple : $1 V = 1 kg \cdot m^2 \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$).

5. Retour à la situation de vie

Dimension de chaque formule ($[2\pi] = 1$, $[g] = \text{LT}^{-2}$, $[\ell] = \text{L}$, $[m] = \text{M}$; on cherche $[T] = \text{T}$) :

$$(1) \left[\sqrt{g/\ell} \right] = \left(\frac{\text{LT}^{-2}}{\text{L}} \right)^{1/2} = \text{T}^{-1} \neq \text{T} : \text{formule } \mathbf{fausse}.$$

$$(2) \left[\sqrt{\ell/g} \right] = \left(\frac{\text{L}}{\text{LT}^{-2}} \right)^{1/2} = \text{T} : \text{formule } \mathbf{homogène}.$$

$$(3) \left[\sqrt{m\ell/g} \right] = \left(\text{MT}^2 \right)^{1/2} = \text{M}^{1/2} \text{T} \neq \text{T} : \text{formule } \mathbf{fausse}.$$

Conclusion : seule la formule (2) $T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$ peut être exacte (c'est bien la formule du pendule simple, la constante 2π étant confirmée par l'expérience). La période augmente avec la longueur ℓ . Comme l'horloge retarde, la période du balancier est trop grande : M. ATANGANA doit **raccourcir le balancier** (remonter la masse) pour diminuer T .