

LA PENSÉE ÉDUC	TRAVAIL - MÉTHODE - RÉUSSITE	TEL : 688321756
Centre de PRÉPAS : CEP - BEPC - PROBATOIRE - BAC - BTS	16 ANS D'EXPÉRIENCE ET DE RÉUSSITE	Proposé par M. NOUMBOU DEGAULE

FICHE DE TRAVAUX DIRIGÉS

Dénombrement, barycentre, systèmes d'équations et trigonométrie

Mathématiques – Classe : Première D & TI – Année scolaire 2026 – 2027

Nom et prénom :

Classe :

Compétences visées par la fiche : (1) dénombrer, utiliser le barycentre et déterminer des lieux géométriques (lignes de niveau) ; (2) résoudre des systèmes de trois équations à trois inconnues, éventuellement après un changement de variables, et des problèmes qui s'y ramènent ; (3) calculer des valeurs trigonométriques et résoudre des équations et inéquations trigonométriques ; (4) résoudre une situation problème en mobilisant ces ressources et en communiquant à l'aide du langage mathématique.

Cette fiche comporte deux parties. Toutes les réponses doivent être justifiées et rédigées avec soin.

Rappels de cours

1 · Dénombrement

Principe multiplicatif. $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$; $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ (listes ordonnées sans répétition) ; $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ (parties à p éléments, sans ordre). Anagrammes d'un mot de n lettres dont certaines se répètent $n_1, n_2, \dots$ fois : $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots}$. Listes avec répétition de p éléments parmi n : n^p . « Au moins un » = total – « aucun ».

2 · Barycentre et lignes de niveau

$G = \text{bar}\{(A_i, \alpha_i)\}$ existe $\iff \sum \alpha_i \neq 0$; $\sum \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = (\sum \alpha_i) \overrightarrow{MG}$; $x_G = \frac{\sum \alpha_i x_i}{\sum \alpha_i}$, $y_G = \frac{\sum \alpha_i y_i}{\sum \alpha_i}$; coordonnées barycentriques normalisées : $\frac{\alpha_i}{\sum \alpha_j}$. **Barycentre partiel** : on remplace une partie des points par leur barycentre affecté de la somme des coefficients. **Lignes de niveau** : $MA^2 - MB^2 = k$ est une droite perpendiculaire à (AB) ; $\alpha MA^2 + \beta MB^2 = k$ se ramène à $MG^2 = \dots$ (Leibniz : $\sum \alpha_i MA_i^2 = (\sum \alpha_i) MG^2 + \sum \alpha_i GA_i^2$) ; $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$ (I milieu de $[AB]$).

3 · Systèmes d'équations

Système 3×3 : combinaisons linéaires ou substitution ; changement de variable ($X = \frac{1}{x}$, $X = x^2, \dots$) puis retour aux inconnues initiales. Pour un problème : choisir les inconnues, traduire chaque phrase par une équation, résoudre, vérifier, conclure.

4 · Trigonométrie

$\pi \text{ rad} = 180^\circ$. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$; $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$; $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$; $\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}$. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$; $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$. **Équations** : $\cos x = \cos a \iff x = \pm a + 2k\pi$; $\sin x = \sin a \iff x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - a + 2k\pi$; $\tan x = \tan a \iff x = a + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). $a \cos x + b \sin x = R \cos(x - \varphi)$ avec $R = \sqrt{a^2 + b^2}$.

PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES

EXERCICE 1

- Un club compte 14 membres : 8 garçons et 6 filles.
 - De combien de façons peut-on choisir un président, un vice-président et un secrétaire (trois personnes distinctes) ?
 - Combien de comités de 4 membres peut-on former ? Parmi eux, combien comprennent exactement 2 filles ? au plus 1 fille ?
- Combien d'anagrammes (avec ou sans signification) possède chacun des mots DOUALA et YAOUNDE ?
- Un code est formé de 4 chiffres choisis parmi 0, 1, ..., 9. Combien y a-t-il de codes : **a)** sans condition ? **b)** dont les 4 chiffres sont distincts ? **c)** comportant au moins un chiffre répété ?
- Une urne contient 5 boules blanches et 4 boules noires, indiscernables au toucher. On tire 3 boules.
 - Simultanément : combien de tirages possibles ? Combien comportent 2 blanches et 1 noire ? Combien comportent au moins une noire ?
 - Successivement avec remise, puis successivement sans remise : combien de tirages possibles ?

EXERCICE 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points $A(1; 2)$, $B(-3; -2)$ et $C(3; -4)$.

- Soit G_1 le barycentre de $\{(A, 3), (B, 1)\}$. Réduire l'expression $3\vec{MA} + \vec{MB}$, calculer les coordonnées de G_1 et exprimer $\vec{AG_1}$ en fonction de $\vec{AB}$.
- Soit G_2 le barycentre de $\{(A, 2), (B, -1)\}$. Justifier son existence, réduire $2\vec{MA} - \vec{MB}$, calculer les coordonnées de G_2 et montrer que A est le milieu de $[BG_2]$.
- Soit G le barycentre de $\{(A, 1), (B, 2), (C, 1)\}$.
 - Donner les coordonnées barycentriques de G dans le repère affine (A, B, C) .
 - Soit H le barycentre de $\{(A, 1), (C, 1)\}$. Construire H , puis construire G par la méthode du barycentre partiel.
 - Calculer les coordonnées de H , puis celles de G . Vérifier en calculant directement les coordonnées de G .

EXERCICE 3

On reprend les points $A(1; 2)$ et $B(-3; -2)$ de l'exercice 2, et on note I le milieu de $[AB]$. Déterminer et construire chacun des ensembles suivants.

- (E_1) : ensemble des points M tels que $MA^2 - MB^2 = -8$. Montrer que cet ensemble est une droite perpendiculaire à (AB) et vérifier que $O \in (E_1)$.
- (E_2) : ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = 48$.
- (E_3) : ensemble des points M tels que $3MA^2 + MB^2 = 40$ (utiliser le barycentre G_1 de l'exercice 2).
- (E_4) : ensemble des points M tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$.
- Soit k un réel. Discuter, suivant les valeurs de k , la nature de l'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = k$.

EXERCICE 4

- Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système (S_1) :
$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - y + z = 8 \\ x + 2y - z = -3 \end{cases}$$

- En posant $X = \frac{1}{x}$, $Y = \frac{1}{y}$ et $Z = \frac{1}{z}$, résoudre dans $(\mathbb{R}^*)^3$ le système (S_2) :
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z} = 1 \\ \frac{2}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 5 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = -2 \end{cases}$$

- Trois frères a, b, c (du plus âgé au plus jeune) ont à eux trois 45 ans. L'aîné a le double de l'âge du benjamin, et la somme des âges du cadet et du benjamin dépasse de 5 ans l'âge de l'aîné. Déterminer l'âge de chacun.
- Un commerçant vend des cahiers, des stylos et des règles. Lundi, il vend 5 cahiers, 3 stylos et 2 règles pour 1 900 FCFA ; mardi, 3 cahiers, 4 stylos et 1 règle pour 1 450 FCFA ; mercredi, 2 cahiers, 1 stylo et 4 règles pour 1 050 FCFA. Calculer le prix d'un cahier, d'un stylo et d'une règle.

EXERCICE 5

- Convertir en radians : 135° , 210° , 72° . Convertir en degrés : $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{4}$, $\frac{\pi}{10}$.
- Déterminer la mesure principale (dans $] -\pi; \pi]$) de chacun des angles de mesures $\frac{25\pi}{3}$, $-\frac{17\pi}{4}$ et $\frac{19\pi}{6}$.
- Donner les valeurs exactes de $\cos \frac{7\pi}{6}$, $\sin \frac{5\pi}{4}$, $\tan \frac{2\pi}{3}$, $\cos(-\frac{\pi}{3})$ et $\sin \frac{11\pi}{6}$.
- En écrivant $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, calculer les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$, $\sin \frac{\pi}{12}$ et $\tan \frac{\pi}{12}$. En déduire $\cos \frac{5\pi}{12}$.
- Soit $x \in]\frac{\pi}{2}; \pi[$ tel que $\sin x = \frac{3}{5}$. Calculer $\cos x$, $\tan x$, $\sin 2x$ et $\cos 2x$.

EXERCICE 6

- Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $] -\pi; \pi]$, les équations suivantes :
 - $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
 - $2\sin x + \sqrt{2} = 0$.
 - $\tan x = -1$.
 - $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$.
 - $\sin 2x = \cos x$.
- Montrer que, pour tout réel x , $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2\cos(x - \frac{\pi}{3})$.
 - En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$, puis dans $] -\pi; \pi]$, de l'équation $\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$.
- Résoudre dans $] -\pi; \pi]$ les inéquations : **a)** $\cos x \geq \frac{1}{2}$; **b)** $\sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

PARTIE B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES

Consigne : pour chaque tâche, réfléchis par toi-même : pose et résous les deux questions intermédiaires qui te permettent de répondre à la tâche demandée.

COMPÉTENCE 1

Compétence visée : résoudre une situation problème en déployant un raisonnement mathématique et en communiquant à l'aide du langage mathématique dans des situations de vie où interviennent le dénombrement et les systèmes d'équations.

SITUATION 1 :

Le lycée de Bandjoun possède un club scientifique de 14 membres : 8 garçons et 6 filles. Pour préparer le concours annuel, le club doit former une délégation de 4 membres comprenant **au plus une fille**. Pour le goûter de fin d'année, le professeur achète chaque semaine des sacs de riz, des bidons d'huile et des cartons de savon, aux mêmes prix unitaires :

	Riz	Huile	Savon	Montant (FCFA)
Semaine 1	2 sacs	1 bidon	1 carton	65 000
Semaine 2	1 sac	2 bidons	1 carton	60 000
Semaine 3	1 sac	1 bidon	3 cartons	65 000

Enfin, trois frères du club, Abel, Blaise et Clovis, ont à eux trois 60 ans. Abel est le plus âgé : il a trois fois l'âge de Clovis, le benjamin, et Blaise a 5 ans de plus que Clovis.

Tâches :

- Combien de délégations différentes le club peut-il former ?
- Quel est le prix d'un sac de riz, d'un bidon d'huile et d'un carton de savon ?
- Quel est l'âge de chacun des trois frères ?

COMPÉTENCE 2

Compétence visée : résoudre une situation problème en déployant un raisonnement mathématique et en communiquant à l'aide du langage mathématique dans des situations de vie où interviennent le barycentre, les lignes de niveau et la trigonométrie.

SITUATION 2 :

Un domaine agricole est repéré dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 100 m. Trois bâtiments sont situés aux points $A(0;0)$, $B(6;0)$ et $C(0;6)$.

- Un entrepôt doit être construit en un point G tel que $3\vec{GA} + 2\vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.
- Une borne d'irrigation doit être posée sur le chemin (AB) en un point M tel que la somme des carrés de ses distances aux bâtiments A et B soit égale à 26 (en unité de 100 m).

- Depuis un point P situé à 60 m du pied d'un pylône, au sol, on voit le sommet du pylône sous un angle de $\frac{\pi}{12}$ radian au-dessus de l'horizontale.

Tâches :

1. À quelle distance (en mètres) du bâtiment A se trouve l'entrepôt G ?
2. Quels sont les emplacements possibles de la borne d'irrigation sur le chemin (AB) ?
3. Quelle est la hauteur exacte du pylône, puis sa valeur approchée au décimètre près ?

Bon courage ! Rédige chaque réponse avec soin : énoncer la propriété utilisée, calculer, puis conclure par une phrase.

sujetexa.com