MATH'EX TERMINALE S

Mathématiques pour s'entraîner

T.C ln T.D



HARRISSON ONDO

Scanné avec CamScanner

Sommaire

Thème 1 : Suites numériques 4

Thème 2 : Limites – Dérivation 20

Thème 3 : Barycentre – Géométrie analytique dans l'espace 39

Thème 4 : Étude des fonctions – Primitives 67

Thème 5 : Nombres complexes – Forme algébrique, équations et trigonométrie 85

Thème 6 : Arithmétique dans Z 99

Thème 7 : Fonction logarithme népérien (1) 124

Thème 8 : Nombres complexes – Géométrie, équations 130

Thème 9 : Fonction logarithme népérien – Calcul intégral 149

Thème 10 : Les isométries du plan 165

Thème 11 : Fonction exponentielle – Calcul intégral – Équations différentielles 183

Thème 12 : Dénombrement – Probabilités 201

Thème 13 : Bases et repères 219

Thème 14 : Trigonométrie – Courbes paramétrées – Coniques (1) 240

Thème 15 : Arithmétique (2) (Codage affine) 261

Thème 16 : Calcul intégral – Courbes paramétrées 278

Thème 17 : Équations différentielles – Fonction puissance 290

Thème 18 : Probabilités (2) 306

Thème 19 : Statistiques à deux variables réelles 315

Thème 20 : Applications affines – Similitudes 328

Thème 21 : Applications de l'espace 342

Principes pédagogiques et remédiation

Les principes pédagogiques suivis par l'auteur de cet ouvrage sont ceux énoncés par De Ketele et Paquay. Les exercices et les exemples suivent les stratégies de remédiation de De Ketele et Paquay. Une des stratégies étant :

Les remédiations par répétition ou par travaux complémentaires

pourquoi cette remédiation ?

Pour De Ketele et Paquay, la remédiation doit répondre à la difficulté réellement repérée chez l'apprenant. Lorsque les difficultés viennent surtout d'une notion insuffisamment maîtrisée ou de prérequis fragiles, il peut être pertinent de reprendre l'apprentissage et de proposer ensuite des travaux complémentaires. La répétition n'est donc pas une simple répétition mécanique : elle permet de revoir la partie de la matière qui pose problème, tandis que les exercices supplémentaires donnent à l'élève l'occasion de réinvestir, d'entraîner et de consolider ce qui vient d'être repris.

- **1. Reprendre ce qui n'est pas maîtrisé :** revoir précisément la partie de la leçon à l'origine de la difficulté.
- **2. Travailler davantage :** proposer d'autres exercices permettant de mobiliser la même connaissance dans des situations variées.
- **3. Reprendre les prérequis :** lorsqu'une difficulté actuelle provient d'un apprentissage antérieur insuffisant, revenir à ce prérequis.
- **4. Consolider :** faire réutiliser les connaissances et compétences afin de stabiliser les acquis.

: la remédiation par répétition ou travaux complémentaires vise à combler une lacune ciblée et à permettre à l'apprenant de reconstruire progressivement les acquis nécessaires avant de poursuivre les apprentissages.

Dans les présentations pédagogiques qui reprennent la classification de De Ketele et Paquay, la « remédiation par répétition ou par travaux complémentaires » constitue l'une des grandes catégories de remédiation. Elle comprend notamment la révision de la matière concernée, les exercices complémentaires, la reprise des prérequis non maîtrisés et les travaux destinés à consolider ces prérequis.

Thème 1 : Suites numériques

Sommaire

1. Généralités sur les suites numériques **2**
Calcul des termes 2

2. Bornes d'une suite **2**

3. Monotonie d'une suite **3**

4. Représentation graphique d'une suite récurrente **5**

5. Suites arithmétiques et géométriques **6**

6. Notation sigma (Σ) **8**

7. Sommes des termes d'une suite arithmétique / géométrique **9**

8. Suites adjacentes **10**

9. Le raisonnement par récurrence **10**
Inégalité de Bernoulli 11

10. Représentations graphiques complémentaires **12**

11. Exercices de synthèse **13**

1. Généralités sur les suites numériques

Définition. On appelle **suite numérique** toute fonction de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$) vers $\mathbb{R}$, notée

$$U_n = U(n).$$

- Les éléments de la suite sont appelés les **termes**.
- Les numéros sont appelés **indices** ou **rangs**.

Exemple. U_0, U_1, U_2 et U_3 sont des termes d'une suite (U_n).
Une suite peut être définie de façon **explicite** :

$$U_n = 3n^2 - 2n + 1 \qquad \text{ou} \qquad U_n = \frac{1}{n}.$$

Une suite peut aussi être définie par une formule de **récurrence** :

$$\begin{cases} U_0 = a, \quad a \in \mathbb{R} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

Calcul des termes

Exemple. Soit la suite (U_n) définie par $U_n = -1 + 4n$. Calculons U_0, U_1, U_2.

$$\begin{aligned} U_0 &= U(0) = -1 + 4(0) = -1 & \Rightarrow\ U_0 &= -1 \\ U_1 &= U(1) = -1 + 4(1) = 3 & \Rightarrow\ U_1 &= 3 \\ U_2 &= U(2) = -1 + 4(2) = 7 & \Rightarrow\ U_2 &= 7 \end{aligned}$$

Exercice 1.
Soit la suite (U_n) définie par $U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Calculer U_0, U_1, U_2 et U_3.

$$\begin{aligned} U_0 &= \left(\tfrac{1}{2}\right)^0 = 1 & U_1 &= \left(\tfrac{1}{2}\right)^1 = \tfrac{1}{2} \\ U_2 &= \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4} & U_3 &= \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 = \tfrac{1}{8} \end{aligned}$$

Exercice 2.
Soit la suite (U_n) définie par

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + 2 \end{cases}$$

Calculer U_1, U_2 et U_3.

$$\begin{aligned} U_1 &= U_0 + 2 = 1 + 2 = 3 \\ U_2 &= U_1 + 2 = 3 + 2 = 5 \\ U_3 &= U_2 + 2 = 5 + 2 = 7 \end{aligned}$$

2. Bornes d'une suite

Une suite peut être **minorée**, **majorée** ou **bornée**. Soit (U_n) une suite réelle.

Définition. Une suite **majorée** est une suite dont tous les termes sont inférieurs ou égaux à un **majorant** :

$$U_n \leqslant M, \qquad M \text{ est le majorant.}$$

Une suite **minorée** est une suite dont tous les termes sont supérieurs ou égaux à un **minorant** :

$$U_n \geqslant m, \qquad m \text{ est le minorant.}$$

Une suite **bornée** est une suite qui est à la fois minorée et majorée :

$$m \leqslant U_n \leqslant M.$$

Exercice 3.
Soit la suite (V_n) définie par $V_n = \dfrac{2n+3}{n+1}$.

1) Effectuer la division euclidienne.

2) Montrer que la suite (V_n) est minorée par 2.

3) Montrer que la suite (V_n) est majorée par 3.

4) En déduire que la suite (V_n) est bornée.

1) Division euclidienne

$$\begin{array}{r|l} 2n+3 & n+1 \\ \underline{-(2n+2)} & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{2n+3}{n+1} = 2 + \frac{1}{n+1}, \qquad V_n = 2 + \frac{1}{n+1}.$$

2) Montrons que la suite est minorée par 2 — signe de $V_n - 2$

$$V_n - 2 = 2 + \frac{1}{n+1} - 2 = \frac{1}{n+1}.$$

Or $1 > 0$ et $n+1 > 0$ car $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $\dfrac{1}{n+1} > 0$, donc $V_n - 2 > 0$, c'est-à-dire $V_n > 2$.

Donc la suite (V_n) est minorée par 2.

3) Montrons que (V_n) est majorée par 3 — signe de $V_n - 3$

$$V_n - 3 = 2 + \frac{1}{n+1} - 3 = \frac{1}{n+1} - 1 = \frac{1-(n+1)}{n+1} = \frac{-n}{n+1}.$$

$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 0$ et $n+1 > 0$, donc $\dfrac{n}{n+1} \geqslant 0$, c'est-à-dire $\dfrac{-n}{n+1} \leqslant 0$.

Donc $V_n - 3 \leqslant 0$ et $V_n \leqslant 3$. **Ainsi la suite (V_n) est majorée par 3.**

4) La suite (V_n) est minorée par 2 et majorée par 3, donc (V_n) est bornée : on a

$$2 \leqslant V_n \leqslant 3.$$

3. Monotonie d'une suite

Définition. Les suites **monotones** sont les suites croissantes et décroissantes.

- $\forall n \in I$, la suite (U_n) est **croissante** ssi $U_{n+1} - U_n \geqslant 0$.
- La suite (U_n) est **décroissante** ssi $U_{n+1} - U_n \leqslant 0$.
- La suite (U_n) est **constante** ssi $U_{n+1} = U_n$.

Exercice 4.
Soit la suite (V_n) définie par $V_n = \dfrac{2n+3}{n+1}$.

1) Effectuer la division euclidienne de V_n.

2) Montrer que la suite (V_n) est décroissante.

1) Division euclidienne : comme ci-dessus, $V_n = 2 + \dfrac{1}{n+1}$.

2) Montrons que (V_n) est décroissante

$$V_{n+1} = \frac{2(n+1)+3}{(n+1)+1} = \frac{2n+5}{n+2}.$$

$$\begin{aligned} V_{n+1} - V_n &= \frac{2n+5}{n+2} - \frac{2n+3}{n+1} = \frac{(2n+5)(n+1) - (2n+3)(n+2)}{(n+2)(n+1)} \\ &= \frac{2n^2+2n+5n+5-(2n^2+4n+3n+6)}{(n+2)(n+1)} = \frac{2n^2+7n+5-2n^2-7n-6}{(n+2)(n+1)} \\ V_{n+1} - V_n &= \frac{-1}{(n+2)(n+1)} \end{aligned}$$

Or $-1 < 0$, $n+2 > 0$ et $n+1 > 0$ car $n \in \mathbb{N}$, donc $\dfrac{-1}{(n+2)(n+1)} < 0$, c'est-à-dire $V_{n+1} - V_n \leqslant 0$.

La suite (V_n) est décroissante.

Exemple. Soit la suite (U_n) définie par $U_n = n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Montrons que (U_n) est croissante.

$$U_{n+1} - U_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1.$$

Or $1 > 0$, $2 > 0$, $n \geqslant 0$ car $n \in \mathbb{N}$, donc $2n+1 \geqslant 0$, ainsi $U_{n+1} - U_n \geqslant 0$.

Donc la suite (U_n) est croissante.

- Toute suite croissante et majorée est **convergente**.
- Toute suite décroissante et minorée est **convergente**.
- Toute suite non convergente est dite **divergente**.

Exercice 5.
Étudier la monotonie des suites suivantes :

1) $U_n = \dfrac{n+1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$

2) $U_n = \dfrac{5^n}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$

3) $U_n = \dfrac{3^n}{2n}$, $n \in \mathbb{N}^*$

4) $U_n = \dfrac{e^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$, où $n! = n(n-1)(n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$ et $(n+1)! = (n+1)\,n!$

1) $U_n = \dfrac{n+1}{n}$, donc $U_{n+1} = \dfrac{n+2}{n+1}$.

$$U_{n+1} - U_n = \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n} = \frac{(n+2)n - (n+1)^2}{n(n+1)} = \frac{n^2+2n-(n^2+2n+1)}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)}.$$

Or $-1 < 0$, $n(n+1) > 0$ car $n \in \mathbb{N}^*$, donc $U_{n+1} - U_n < 0$. **La suite est décroissante.**

2) $U_n = \dfrac{5^n}{n}$, donc $U_{n+1} = \dfrac{5^{n+1}}{n+1}$.

$$U_{n+1} - U_n = \frac{5^{n+1}}{n+1} - \frac{5^n}{n} = 5^n\left(\frac{5}{n+1} - \frac{1}{n}\right) = 5^n\left(\frac{5n-(n+1)}{n(n+1)}\right) = 5^n\left(\frac{4n-1}{n(n+1)}\right).$$

Or $4n-1>0$, $5^n>0$ et $n(n+1)>0$ car $n\in\mathbb{N}^*$, donc $U_{n+1}-U_n>0$. **La suite est croissante.**

3) $U_n = \dfrac{3^n}{2n}$, donc $U_{n+1} = \dfrac{3^{n+1}}{2n+2}$.

$$U_{n+1} - U_n = \frac{3^{n+1}}{2n+2} - \frac{3^n}{2n} = 3^n\left(\frac{3}{2n+2} - \frac{1}{2n}\right) = 3^n\left(\frac{3(2n)-(2n+2)}{2n(2n+2)}\right) = 3^n\left(\frac{4n-2}{2n(2n+2)}\right).$$

Or $4n-2>0$, $2n+2>0$ pour $n\in\mathbb{N}^*$, donc $\dfrac{4n-2}{2n(2n+2)}>0$ et $U_{n+1}-U_n>0$. **La suite est croissante.**

4) $U_n = \dfrac{e^n}{n!}$, donc $U_{n+1} = \dfrac{e^{n+1}}{(n+1)!}$.

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{e^{n+1}}{(n+1)!}\times\frac{n!}{e^n} = \frac{e^n\times e}{(n+1)\,n!}\times\frac{n!}{e^n} = \frac{e}{n+1}.$$

Comme $e\approx 2{,}7$, on a $\dfrac{e}{n+1}<1$ dès que $n\geqslant 2$. Donc, à partir du rang 2, $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}<1$, c'est-à-dire $U_{n+1}<U_n$.

La suite (U_n) est décroissante à partir du rang $n=2$.

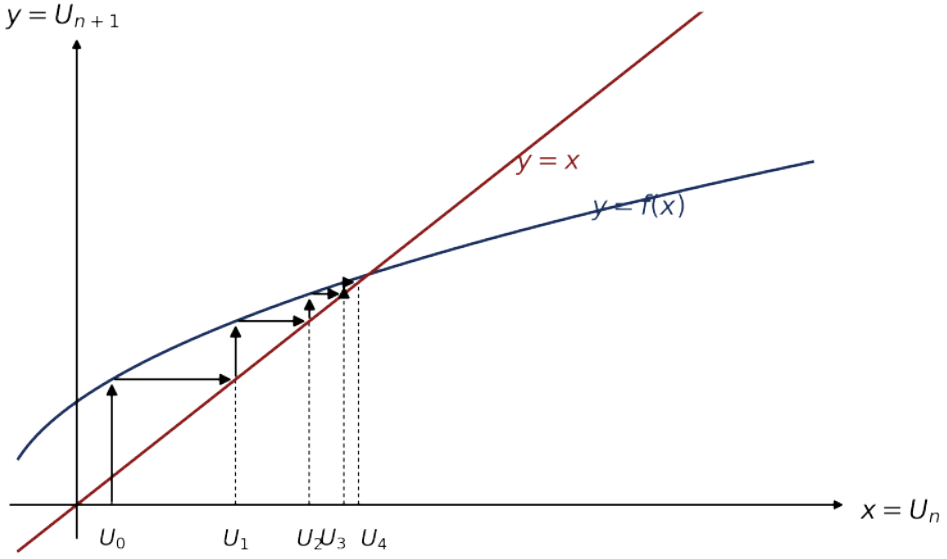
4. Représentation graphique d'une suite récurrente

Une telle suite est définie par une relation du type $U_{n+1} = f(U_n)$.

Méthode :

1) Tracer le graphe de la fonction f.
2) Tracer la droite d'équation $y=x$.
3) Placer le point de coordonnées $(U_0;0)$, puis construire l'escalier (ou la spirale) entre la courbe de f et la droite $y=x$.

Esquisse :



Exercice 6.
Construire le graphe de la suite (U_n) définie par

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 3U_n + 2 \end{cases}$$

5. Suites arithmétiques et géométriques

Suites arithmétiques

Définition. Une suite arithmétique est une suite définie par la relation $U_{n+1} - U_n = r$ où $r \in \mathbb{R}$. r est la **raison** de la suite.
Terme général :

- Si le premier terme est U_0 : $U_n = U_0 + nr$.
- Si le premier terme est U_1 : $U_n = U_1 + (n-1)r$.
- Si le premier terme est U_p : $U_n = U_p + (n-p)r$.

Remarque. Si la suite (U_n) est telle que $U_1 - U_0 \neq U_2 - U_1$, alors (U_n) **n'est pas** une suite arithmétique.

Exercice 7.
Soit (U_n) définie par

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 5U_n - 7 \end{cases} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1) Calculer U_1, U_2.

2) Montrer que (U_n) n'est pas une suite arithmétique.

1)

$$U_1 = 5U_0 - 7 = 5(2) - 7 = 3 \qquad \Rightarrow U_1 = 3$$
$$U_2 = 5U_1 - 7 = 5(3) - 7 = 8 \qquad \Rightarrow U_2 = 8$$

2) $U_1 - U_0 = 3 - 2 = 1$ et $U_2 - U_1 = 8 - 3 = 5$. Or $1 \neq 5$, donc $U_1 - U_0 \neq U_2 - U_1$: **la suite (U_n) n'est pas arithmétique.**

Exercice 8.
Soit les suites (U_n) et (V_n) définies par

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{U_n + 1} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad V_n = \frac{1}{U_n}.$$

1) Calculer U_1, U_2, V_0, V_1.

2) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique ; donner le premier terme et la raison.

3) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

1)

$$U_1 = \frac{U_0}{U_0 + 1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, \qquad U_2 = \frac{U_1}{U_1 + 1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}.$$

$$V_0 = \frac{1}{U_0} = 1, \qquad V_1 = \frac{1}{U_1} = 2.$$

2)

$$V_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1}} = \frac{1}{\frac{U_n}{U_n+1}} = \frac{U_n+1}{U_n}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{U_n+1}{U_n} - \frac{1}{U_n} = \frac{U_n}{U_n} = 1.$$

Donc (V_n) est arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $V_0 = 1$.

3)

$$V_n = V_0 + nr = 1 + n, \qquad U_n = \frac{1}{V_n} = \frac{1}{n+1}.$$

Suites géométriques

Définition. Une suite (V_n) est **géométrique** ssi il existe un réel non nul q tel que

$$V_{n+1} = q \times V_n.$$

q est la **raison** de la suite.

Terme général :

- Si le premier terme est V_0 : $V_n = V_0 \times q^n$.
- Si le premier terme est V_1 : $V_n = V_1 \times q^{n-1}$.
- Si le premier terme est V_p : $V_n = V_p \times q^{n-p}$.

Remarque. Si la suite (V_n) est telle que $\frac{V_1}{V_0} \neq \frac{V_2}{V_1}$, alors la suite **n'est pas** géométrique.

Exercice 9.

Soit les suites (U_n) et (V_n) définies par

$$\begin{cases} U_1 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n - 2 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad V_n = U_n + 3.$$

1) Montrer que (V_n) est géométrique, donner le premier terme et la raison.

2) Exprimer V_n en fonction de n, puis U_n en fonction de n.

Exercice 10.

Soit la suite (U_n) définie par

$$\begin{cases} U_1 = 2 \\ U_{n+1} = 2U_n - \frac{1}{3} \end{cases} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Déterminer le réel a pour que la suite (V_n) définie par $V_n = U_n - a,\ n \in \mathbb{N}^*$, soit une suite géométrique.

$$V_{n+1} = U_{n+1} - a = \left(2U_n - \frac{1}{3}\right) - a = 2\left(U_n - \frac{1}{6} - \frac{a}{2}\right).$$

Pour que (V_n) soit géométrique, il faut $V_{n+1} = 2V_n = 2(U_n - a)$, donc par identification :

$$\frac{1}{6} + \frac{a}{2} = a \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{6} = \frac{a}{2} \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{1}{3}.$$

$$\boxed{a = \frac{1}{3}}$$

Exercice 11.
(U_n) et (V_n) deux suites telles que

$$\begin{cases} U_0 = \dfrac{5}{4} \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{3}U_n - n - \dfrac{4}{3} \end{cases} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ V_n = U_n + na + b,\ a, b \in \mathbb{R}.$$

1) Déterminer a et b sachant que (V_n) est géométrique.

2) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

1) De $U_{n+1} = \dfrac{1}{3}U_n - n - \dfrac{4}{3}$, on tire $U_n = 3U_{n+1} - 3n - 3 - 4 = 3U_{n+1} + 3n...$, plus directement :

$$U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n - n - \frac{4}{3} \implies U_{n+2} = \frac{1}{3}U_{n+1} - (n+1) - \frac{4}{3}.$$

En posant $V_n = U_n + na + b$:

$$V_{n+1} = U_{n+1} + (n+1)a + b.$$

On veut (V_n) géométrique : $V_{n+1} = q\,V_n$. En écrivant U_{n+1} en fonction de U_n directement (ici la relation donnée porte sur U_{n+1}), on identifie :

$$V_{n+1} = \frac{1}{3}U_n - n - \frac{4}{3} + (n+1)a + b = \frac{1}{3}\Big(U_n + 3(a-1)n + 3a - 4 + 3b\Big).$$

Par identification avec $V_{n+1} = \dfrac{1}{3}V_n = \dfrac{1}{3}(U_n + na + b)$:

$$3(a-1) = a \implies 3a - 3 = a \implies a = \frac{3}{2},$$

$$3a - 4 + 3b = b \implies 2b = 4 - 3a = 4 - \frac{9}{2} = -\frac{1}{2} \implies b = -\frac{1}{4}.$$

$$\boxed{a = \frac{3}{2}, \qquad b = -\frac{1}{4}}$$

2) La suite (V_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{3}$ et de premier terme

$$V_0 = U_0 + 0 \cdot a + b = \frac{5}{4} - \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

$$V_n = V_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n, \qquad U_n = V_n - na - b = \left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{3}{2}n + \frac{1}{4}.$$

6. Notation sigma (Σ)

Exemple. Méthode :

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (n-1) + n + (n+1) = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1).$$

Calculer :

$$\sum_{k=0}^{3} 2\times 5^k = 2\times 5^0 + 2\times 5^1 + 2\times 5^2 + 2\times 5^3 = 2\left(5^0+5^1+5^2+5^3\right).$$

$\sum_{k=1}^{7} k^2 = ?$ $\qquad$ $\sum_{k=4}^{8}(-1)^k = (-1)^4+(-1)^5+(-1)^6+(-1)^7+(-1)^8 = 1-1+1-1+1 = 1.$

Propriétés. α et β deux réels, q et p des entiers naturels avec $q \leqslant p$, (a_n) et (b_n) des suites numériques :

$$\sum_{k=p}^{q}(a_k+b_k) = \sum_{k=p}^{q} a_k + \sum_{k=p}^{q} b_k, \qquad \sum_{k=p}^{q}(\alpha a_k+\beta b_k) = \alpha\sum_{k=p}^{q} a_k + \beta\sum_{k=p}^{q} b_k.$$

Télescopage dans une somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(U_{k+1}-U_k) = (U_1-U_0)+(U_2-U_1)+(U_3-U_2)+\cdots+(U_{n-1}-U_{n-2})+(U_n-U_{n-1})+(U_{n+1}-U_n)$$

$$S_n = -U_0 + U_{n+1} = U_{n+1} - U_0.$$

Exemple.

$$\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4} = \frac{15}{16}.$$

7. Sommes des termes d'une suite arithmétique / géométrique

Somme des termes d'une suite arithmétique :

$$S_n = (\text{nombre de termes}) \times \frac{(1^{\text{er}}\text{ terme}) + (\text{dernier terme})}{2}.$$

Somme des termes d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$:

$$1+q+q^2+\cdots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Exemple.

$$S = \sum_{k=1}^{n}(2+3k) = \sum_{k=1}^{n} 2 + 3\sum_{k=1}^{n} k = \underbrace{2+2+\cdots+2}_{n\text{ fois}} + 3\times\frac{n(n+1)}{2} = 2n + \frac{3n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{4n+3n^2+3n}{2} = \frac{3n^2+7n}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{S = \frac{n(3n+7)}{2}}$$

8. Suites adjacentes

Définition. Deux suites (U_n) et (V_n) sont **adjacentes** ssi

$$\begin{cases} (U_n) \text{ est croissante, } (V_n) \text{ est décroissante} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (V_n - U_n) = 0. \end{cases}$$

Exercice 12.
Soit les suites (U_n) et (V_n) définies par $V_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ et $U_n = 1 - \dfrac{1}{n}$.

1) Montrer que (U_n) est croissante et (V_n) décroissante.

2) Calculer $V_n - U_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (V_n - U_n)$.

3) Les suites (V_n) et (U_n) sont-elles adjacentes ?

Exercice 13.
Soit les suites (U_n) et (V_n) définies par $U_n = -\dfrac{1}{n}$ et $V_n = \dfrac{1}{n}$. Montrer que (V_n) et (U_n) sont adjacentes.

Exercice 14.
Soit les suites (U_n) et (V_n) définies par $U_n = 3 - \dfrac{1}{n}$ et $V_n = 3 + \dfrac{1}{n}$.

1) Étudier la monotonie des suites (U_n) et (V_n).

2) Montrer que (U_n) et (V_n) sont adjacentes.

Exercice 15.
Reprendre avec $U_n = 2 - \dfrac{1}{n}$ et $V_n = 3 + \dfrac{2}{n}$.

9. Le raisonnement par récurrence

Pour démontrer que la proposition $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$ est vraie, on utilise un raisonnement par récurrence en trois étapes.

$1^{\text{ère}}$ étape : On vérifie que la proposition $P(n)$ est vraie pour le premier terme.

$2^{\text{ème}}$ étape : On suppose que la proposition $P(n)$ est vraie, et on démontre qu'elle implique $P(n+1)$.

$3^{\text{ème}}$ étape : On donne la conclusion d'après le principe de raisonnement par récurrence.

Exercice 16.
Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = 0$, $U_{n+1} = \sqrt{U_n + 2}$. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \leqslant 2$.

Inégalité de Bernoulli

Montrer que si $x \geqslant -1$ alors $(1+x)^n \geqslant 1+nx,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

1) Initialisation : pour $n=1$, $1+x \geqslant 1+x$. Vraie.

2) Hérédité : supposons la propriété vraie au rang $n=k$: $(1+x)^k \geqslant 1+kx$. Montrons que $(1+x)^{k+1} \geqslant 1+(k+1)x$.

Pour $x \geqslant -1$, on a $x+1 \geqslant 0$. De $(1+x)^k \geqslant 1+kx$, en multipliant par $(1+x) \geqslant 0$:

$$(1+x)(1+x)^k \geqslant (1+x)(1+kx)$$

$$(1+x)^{k+1} \geqslant 1+kx+x+kx^2 = 1+(1+k)x+kx^2.$$

Or $x^2 \geqslant 0$ et $k>0$, donc $kx^2 \geqslant 0$, d'où

$$1+(1+k)x+kx^2 \geqslant 1+(1+k)x.$$

Ainsi

$$(1+x)^{k+1} \geqslant 1+(k+1)x.$$

3) Conclusion : d'après le principe de raisonnement par récurrence,

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 17.
Par récurrence, montrer que $22^n - 15$ est un multiple de 7.

Initialisation : pour $n=0$, $22^0 - 15 = 1-15 = -14 = -2(7)$, multiple de 7. La propriété est vraie au rang $n=0$.

Hérédité : supposons que $22^k - 15$ est multiple de 7 : $\exists m \in \mathbb{Z},\ 22^k - 15 = 7m$, c'est-à-dire $22^k = 7m+15$.

Montrons que $22^{k+1} - 15$ est multiple de 7 :

$$\begin{aligned} 22^{k+1} - 15 &= 22 \times 22^k - 15 = 22(7m+15) - 15 \\ &= 7(22m) + 15 \times 22 - 15 = 7(22m) + 15(22-1) = 7(22m) + 15(21) \\ &= 7(22m) + 15(3)(7) = 7\big(22m + 15 \times 3\big). \end{aligned}$$

Donc $22^{k+1} - 15 = 7m_1$ avec $m_1 = 22m + 45 \in \mathbb{Z}$.

Conclusion : $22^n - 15$ est multiple de 7 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 18.
Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = 4$, $U_{n+1} = \sqrt{3U_n - 2}$.

1) Montrer par récurrence que (U_n) est minorée par 2.

2) Étudier la monotonie de la suite (U_n).

3) En déduire que (U_n) est convergente.

Exercice 19.
Soit (U_n) une suite de termes positifs définie par $U_1 = 0$, $U_{n+1} = \sqrt{U_n + 2}$.

1) Montrer que (U_n) est minorée par 2.

2) Montrer que (U_n) est croissante.

3) Justifier que (U_n) est convergente.

Corrigé :

1) $U_n \leqslant 2$ par récurrence. Au rang $n = 0$: $U_0 = 0$ et $0 \leqslant 2$, donc $U_0 \leqslant 2$: la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Supposons $U_n \leqslant 2$. Montrons $U_{n+1} \leqslant 2$:

$$U_n \leqslant 2 \implies U_n + 2 \leqslant 4 \implies \sqrt{U_n + 2} \leqslant \sqrt{4} \implies U_{n+1} \leqslant 2.$$

La propriété est vraie au rang $n + 1$, donc, d'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \leqslant 2$.

2) Monotonie.

$$U_{n+1} - U_n = \sqrt{U_n + 2} - U_n = \frac{\left(\sqrt{U_n + 2}\right)^2 - U_n^2}{\sqrt{U_n + 2} + U_n} = \frac{U_n + 2 - U_n^2}{\sqrt{U_n + 2} + U_n}.$$

$U_n + 2 - U_n^2 = (1 + U_n) + (1 - U_n^2) = (1 + U_n) + (1 + U_n)(1 - U_n) = (1 + U_n)\big[1 + (1 - U_n)\big] = (1 + U_n)(2 - U_n)$.

Donc

$$U_{n+1} - U_n = \frac{(1 + U_n)(2 - U_n)}{\sqrt{U_n + 2} + U_n}.$$

Comme $U_n \geqslant 0$, $1 + U_n > 0$; et $U_n \leqslant 2$ donne $2 - U_n \geqslant 0$. Donc $(1 + U_n)(2 - U_n) \geqslant 0$. On a aussi $\sqrt{U_n + 2} + U_n > 0$.

Donc $U_{n+1} - U_n \geqslant 0$: **la suite (U_n) est croissante.**

3) La suite (U_n) est croissante et majorée par 2, donc (U_n) **est convergente.**

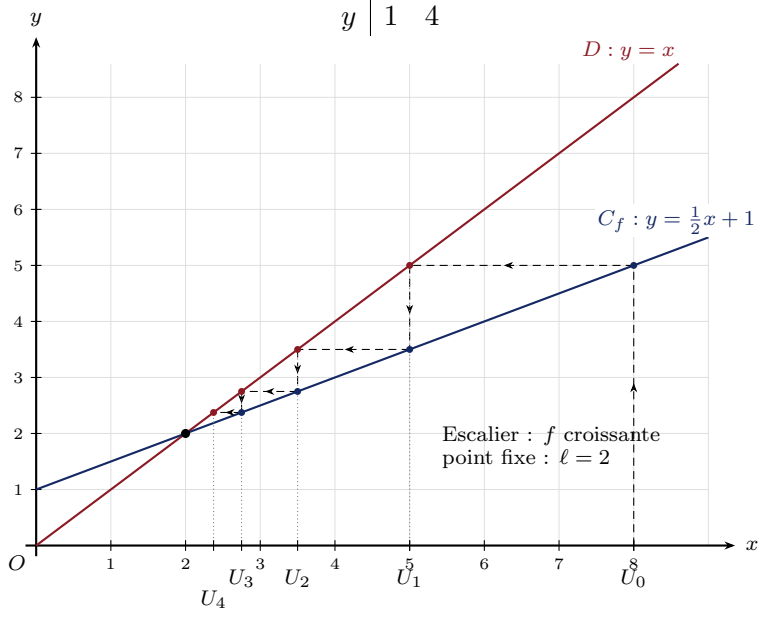
10. Représentations graphiques complémentaires

Exercice 20.

Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = 8$, $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 1$. Représenter graphiquement la suite.

On pose $y = U_{n+1}$ et $x = U_n$: on obtient la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

x	0	6
y	1	4

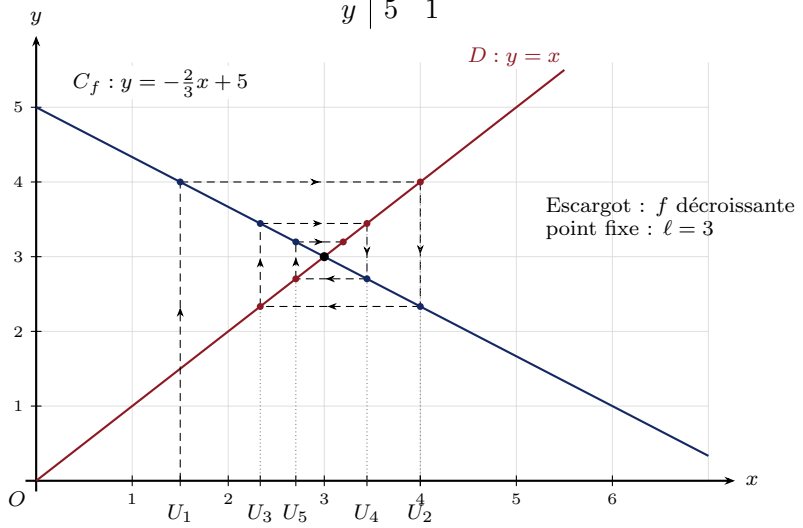


Exercice 21.

Soit la suite (U_n) définie par $1 < U_1 < 2$, $U_{n+1} = -\frac{2}{3}U_n + 5$. Représenter graphiquement la suite.

On pose $y = -\frac{2}{3}x + 5$: on obtient la fonction f définie par $f(x) = -\frac{2}{3}x + 5$.

x	0	6
y	5	1



Exercice 22.
Représenter graphiquement les suites récurrentes suivantes :

a) $U_0 = 2, \quad U_{n+1} = -\frac{3}{2}U_n + \frac{5}{2}$

b) $U_0 = 3, \quad U_{n+1} = -\frac{x}{3} + 4$

c) $U_0 = 5, \quad U_{n+1} = -\frac{1}{2}U_n + 3$

d) $U_0 = 0, \quad U_{n+1} = -\frac{1}{2}U_n + 3$

Exercice 23.
Représenter graphiquement la suite (U_n) définie par $U_n = 2n + 5$.

11. Exercices de synthèse

Exercice 24.
Soit la suite (U_n), $n \in \mathbb{N}^*$, de nombres réels définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad U_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}.$$

Montrer que (U_n) est décroissante et minorée, puis conclure.

Décroissance. On a $U_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$ et

$$U_{n+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}.$$

En retranchant les termes communs $\dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$:

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} = \frac{n(2n+2) + n(2n+1) - (2n+1)(2n+2)}{n(2n+1)(2n+2)} = \frac{-3n-2}{n(2n+1)(2n+2)}.$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n(2n+1)(2n+2) > 0$ et $-3n-2 < 0$, donc $U_{n+1} - U_n < 0$: **la suite (U_n) est décroissante.**

Minoration. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n} > 0$, $\dfrac{1}{n+1} > 0$, $\ldots$, $\dfrac{1}{n+n} > 0$, donc $U_n > 0$: **(U_n) est minorée par 0.**

(U_n) est décroissante et minorée, donc **(U_n) est une suite convergente.**

Exercice 25.

Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = -\dfrac{1}{2}$, $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{3 - 2U_n}$.

1) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n < 0$.

2) Étudier la monotonie de la suite (U_n).

3) On pose $V_n = \dfrac{U_n}{U_n - 1}$. Démontrer que (V_n) est géométrique.

4) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n, puis calculer $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$.

1) Au rang $n = 0$: $U_0 = -\dfrac{1}{2} < 0$. La propriété est vraie au rang 0.

Supposons $U_n < 0$. Montrons $U_{n+1} < 0$:

$$U_n < 0 \implies -2U_n > 0 \implies 3 - 2U_n > 3 > 0.$$

Comme $3 - 2U_n > 0$ et $U_n < 0$, on a $\dfrac{U_n}{3 - 2U_n} < 0$, c'est-à-dire $U_{n+1} < 0$.

D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n < 0$.

2)

$$U_{n+1} - U_n = \frac{U_n}{3 - 2U_n} - U_n = \frac{U_n - U_n(3 - 2U_n)}{3 - 2U_n} = \frac{U_n - 3U_n + 2U_n^2}{3 - 2U_n} = \frac{2U_n^2 - 2U_n}{3 - 2U_n} = \frac{2U_n(U_n - 1)}{3 - 2U_n}.$$

Or $3 - 2U_n > 0$, $U_n < 0$, $U_n - 1 < 0$, donc $2U_n(U_n - 1) > 0$, d'où $U_{n+1} - U_n > 0$.

La suite (U_n) est croissante.

3)

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1}}{U_{n+1} - 1} = \frac{\dfrac{U_n}{3 - 2U_n}}{\dfrac{U_n}{3 - 2U_n} - 1} = \frac{\dfrac{U_n}{3 - 2U_n}}{\dfrac{U_n - 3 + 2U_n}{3 - 2U_n}} = \frac{U_n}{3U_n - 3} = \frac{1}{3} \times \frac{U_n}{U_n - 1} = \frac{1}{3} V_n.$$

(V_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{3}$, de premier terme

$$V_0 = \frac{U_0}{U_0 - 1} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2} - 1} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}.$$

4)

$$V_n = V_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}.$$

De $V_n = \dfrac{U_n}{U_n - 1}$, on tire $U_n = V_n(U_n - 1) = V_nU_n - V_n$, donc $U_n(1 - V_n) = -V_n$, d'où

$$U_n = \frac{-V_n}{1 - V_n} = \frac{-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}.$$

Calcul de S_n :

$$S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} = \frac{1}{3}\left[1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] = \frac{1}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{S_n = \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]}$$

Exercice 26.
Montrer que $5^n - 4n + 15$ est un multiple de 16.

Initialisation : pour $n = 0$, $5^0 - 4(0) + 15 = 1 + 15 = 16 = 1 \times 16$, multiple de 16.
Hérédité : supposons $5^k - 4k + 15 = 16P$, $P \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire $5^k = 16P + 4k - 15$.
Montrons que $5^{k+1} - 4(k+1) + 15$ est multiple de 16 :

$$\begin{aligned} 5^{k+1} - 4(k+1) + 15 &= 5 \times 5^k - 4k - 4 + 15 = 5 \times 5^k - 4k + 11 \\ &= 5(16P + 4k - 15) - 4k + 11 = 80P + 20k - 75 - 4k + 11 \\ &= 80P + 16k - 64 = 16(5P + k - 4). \end{aligned}$$

Donc $5^{k+1} - 4(k+1) + 15 = 16G$ avec $G = 5P + k - 4 \in \mathbb{Z}$.
Conclusion : $5^n - 4n + 15$ est multiple de 16 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 27.
Démontrer par récurrence que $2^n > 2n + 1$ pour $n \geqslant 3$.

Initialisation : pour $n = 3$, $2^3 = 8$ et $2(3) + 1 = 7$, donc $2^3 > 2(3) + 1$. La propriété est vraie au rang 3.
Hérédité : supposons la propriété vraie au rang $n = k$, $k \geqslant 3$: $2^k > 2k + 1$.
Montrons que $2^{k+1} > 2(k+1) + 1 = 2k + 3$:

$$2^k > 2k + 1 \implies 2 \times 2^k > 2(2k + 1) \implies 2^{k+1} > 4k + 2.$$

Montrons que $4k + 2 > 2k + 3$:

$$(4k + 2) - (2k + 3) = 2k - 1.$$

Comme $k \geqslant 3$, $2k \geqslant 6$, donc $2k - 1 \geqslant 5 > 0$. Ainsi $4k + 2 > 2k + 3$.
On a donc $2^{k+1} > 4k + 2 > 2k + 3$, c'est-à-dire $2^{k+1} > 2(k+1) + 1$.
Conclusion : d'après le principe de raisonnement par récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 3$.

Exercice 28.
Démontrer par récurrence que $3^n > n^2$ pour $n \geqslant 2$.

Initialisation : pour $n = 2$, $3^2 = 9$ et $2^2 = 4$, donc $3^2 > 2^2$. La propriété est vraie au rang 2.
Hérédité : supposons vraie au rang $n = k$, $k \geqslant 2$: $3^k > k^2$. Montrons que $3^{k+1} > (k+1)^2$.

$$3^k > k^2 \implies 3 \times 3^k > 3k^2 \implies 3^{k+1} > 3k^2.$$

Montrons que $3k^2 \geqslant (k+1)^2$:

$$3k^2 - (k+1)^2 = 3k^2 - k^2 - 2k - 1 = 2k^2 - 2k - 1 = 2k(k-1) - 1.$$

Comme $k \geqslant 2$, $k(k-1) \geqslant 2$, donc $2k(k-1) \geqslant 4$, d'où $2k(k-1) - 1 \geqslant 3 > 0$.
Ainsi $3k^2 > (k+1)^2$, donc $3^{k+1} > 3k^2 > (k+1)^2$.
Conclusion : la propriété est vraie au rang $k+1$, donc, d'après le principe de récurrence, $3^n > n^2$ pour tout $n \geqslant 2$.

Exercice 29.
Soit (U_n) définie par $U_0 = 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \dfrac{7U_n - 25}{U_n - 3}$. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \neq 5$.

Initialisation : au rang $n = 0$, $U_0 = 2$ et $2 \neq 5$. La propriété est vraie au rang 0.
Hérédité — raisonnement par l'absurde. Supposons $U_n \neq 5$ et montrons que $U_{n+1} \neq 5$.
Rappel : la négation de « est différent de » est « est égal à ». Supposons par l'absurde que $U_{n+1} = 5$:

$$\frac{7U_n - 25}{U_n - 3} = 5 \implies 7U_n - 25 = 5(U_n - 3) \implies 7U_n - 25 = 5U_n - 15$$

$$\implies 2U_n = 10 \implies U_n = 5.$$

Or ceci contredit l'hypothèse $U_n \neq 5$: c'est **absurde**. Donc $U_{n+1} \neq 5$.
Conclusion : d'après le principe de raisonnement par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \neq 5$.

Exercice 30.
Démontrer par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Thème 2
Limites – Dérivation

Suites, fonctions, continuité et dérivabilité

Sommaire

I. Limites de suites
- Notion de limite, convergence, divergence
- Limites de référence
- Limites d'une suite géométrique
- Formes indéterminées
- Opérations sur les limites
- Limites par comparaison et encadrement (gendarmes)
- Limite d'une suite définie par récurrence
- Exercices résolus

II. Limites d'une fonction
- Limite en $+\infty$ / $-\infty$
- Limite en un réel a, asymptote verticale
- Opérations sur les limites
- Limites trigonométriques de référence
- Continuité d'une fonction
- Asymptote oblique
- Théorème des gendarmes (fonctions)
- Limite d'une fonction composée
- Exercices résolus

III. Dérivation
- Nombre dérivé, fonction dérivée
- Règles de dérivation
- Équation de la tangente
- Dérivée d'une fonction réciproque
- Exercices résolus

I. Limites de suites

3.1 – Limites de suites

Définition

Soit (u_n) une suite réelle et ℓ un réel.
On dit que la suite (u_n) tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$ si

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$

Si le réel ℓ est unique, on dit que la suite (u_n) **converge** vers ℓ.

- Une suite est dite **divergente** lorsqu'elle n'est pas convergente.

Limites de référence

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0 \quad (\alpha \in \mathbb{R}_+^*) \qquad \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$$

Exemple

$$\lim_{n\to+\infty} \left(2n + 1 + \frac{3}{n}\right) = ?$$

$\left.\begin{array}{l}\lim_{n\to+\infty}(2n+1)=+\infty\\ \lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{n}\right)=0\end{array}\right\}$ Par somme des limites $\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(2n+1+\dfrac{3}{n}\right)=+\infty$

On pose $V_n=n^2-n+3$. $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n=?$

$$V_n=n^2\left[1-\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}\right]$$

$\left.\begin{array}{l}\lim_{n\to+\infty} n^2=+\infty\\ \lim_{n\to+\infty}\left[1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{3}{n^2}\right]=1+0=1\end{array}\right\}$ Par produit des limites $\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} V_n=+\infty$

Limites d'une suite géométrique

Propriété

Soit q un réel. On a les limites suivantes :

- Si $q>1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=+\infty$
- Si $q=1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=1$
- Si $|q|<1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=0$
- Si $q\leq -1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$ n'existe pas

Formes indéterminées

$$\frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad 0\times\infty \qquad \infty-\infty \qquad 0^0$$

Exemple

$U_n=\left(\dfrac{2}{5}\right)^n+2-\dfrac{1}{n}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=?$

$\left.\begin{array}{l}\lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n=0\\ \lim_{n\to+\infty}\left(2-\dfrac{1}{n}\right)=2-0=2\end{array}\right\}$ Par somme des limites $\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n=2$

$V_n=(2-n)\times 3^n$ $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n=?$

$\left.\begin{array}{l}\lim_{n\to+\infty}(2-n)=-\infty\\ \lim_{n\to+\infty} 3^n=+\infty\end{array}\right\}$ Par produit des limites $\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} V_n=-\infty$

$V_n=\dfrac{n^2+1}{n+3}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n=?$

$$V_n=\frac{n^2\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)}{n\left(1+\dfrac{3}{n}\right)}=n\times\frac{1+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{3}{n}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)=1\\ \lim_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{3}{n}\right)=1\end{array}\right\}\text{Par quotient des limites}\implies\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n}}=1$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n}}=1\\ \lim_{n\to+\infty}n=+\infty\end{array}\right\}\text{Par produit des limites}\implies\lim_{n\to+\infty}V_n=+\infty$$

Opérations sur les limites

Propriété

Si $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\ell'$ alors

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n\pm v_n)=\ell\pm\ell'\qquad\lim_{n\to+\infty}(u_nv_n)=\ell\times\ell'$$

$$\text{si }\ell'\neq0,\quad\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{u_n}{v_n}\right)=\frac{\ell}{\ell'}$$

Limites par comparaison et encadrement

Théorème

(u_n), (v_n) et (w_n) trois suites. Si à partir d'un certain rang on a :

1) Théorème des gendarmes (théorème d'encadrement)

$$v_n\leq u_n\leq w_n\quad\text{et si}\quad\lim_{n\to+\infty}v_n=\lim_{n\to+\infty}w_n=\ell\quad\Longrightarrow\quad\lim_{n\to+\infty}u_n=\ell$$

2) Théorème de comparaison

- $u_n\geq v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=+\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$
- $u_n\leq w_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=-\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$

Exemple

Soit la suite (V_n) définie par $V_n=\dfrac{2n^2+\cos n}{n^2+5}$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}V_n$.

$\forall n\in\mathbb{N},\ -1\leq\cos n\leq1$

$$2n^2-1\leq2n^2+\cos n\leq2n^2+1$$

Or $n^2+5>0$, on obtient :

$$\frac{2n^2-1}{n^2+5}\leq\frac{2n^2+\cos n}{n^2+5}\leq\frac{2n^2+1}{n^2+5}$$

Calculons : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n^2-1}{n^2+5}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2\left(2-\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{5}{n^2}\right)}=\dfrac{2-0}{1+0}=2$

Par analogie, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n^2+1}{n^2+5}=2$.

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty}V_n=2$.

Exemple

Soit (V_n), $V_n = n - \sqrt{n^2+1}$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.

$$V_n = \frac{n-\sqrt{n^2+1}}{1} = \frac{\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)}{n+\sqrt{n^2+1}} = \frac{n^2-(n^2+1)}{n+\sqrt{n^2+1}} = \frac{-1}{n+\sqrt{n^2+1}}$$

$\left.\begin{array}{l}\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \\ \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+1} = +\infty\end{array}\right\}$ Par somme des limites $\implies \lim_{n\to+\infty}\left[n+\sqrt{n^2+1}\right] = +\infty$

$\left.\begin{array}{l}\lim_{n\to+\infty}(-1) = -1 \\ \lim_{n\to+\infty}\left[n+\sqrt{n^2+1}\right] = +\infty\end{array}\right\}$ Par quotient des limites $\implies \lim_{n\to+\infty} V_n = 0$

Exercices d'application

Exercice 1 — Calculez

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+2}{2n+1}$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n^2(n-2)}{(1-3n)(2+n^2)}$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$

e) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{n!-(n+1)!}$

f) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-2n^5+3n^2-10\right)$

g) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3-8n}{n+2}$

h) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4n^2}{-n+2}$

i) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{7n+2n^3}{7n^2-n-1}$

j) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-3n^2+4n}{4n^3-n+2}$

k) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(n+3)(2n-1)}{(n-3)^2}$

l) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n+2}{\sqrt{16n^4+6n^3-2}}$

m) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{9+n^2}{4n^2}}$

Exercice 2 — Calculez

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-2)^n}{5}$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} [2^n - 3^n]$

c) $V_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$

Exercice 3 — Théorème des gendarmes

$\forall n \in \mathbb{N}$, (u_n) est telle que $\frac{3}{n} + 4 \leq u_n \leq \frac{2}{n} + 4$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 4 — Pour chacune des suites (u_n) ci-dessous, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

a) $u_n = \dfrac{n+\sin(n)}{2n+1}$

b) $u_n = \dfrac{\cos(3n)+n}{n^3+2n+1}$

c) $u_n = \dfrac{\sin(n)}{n+1}+2$

Exercice 5 — Calculez

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)\right]$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right]$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\sqrt{n^2+5n}-n\right]$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^{2n+1}+3^{n+2}}{4^{n+2}+5}$

e) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\sqrt{n^2+n+3}-\sqrt{n^2-3n+1}\right]$

Exercice 1 — Corrigé

Corrigé

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+2}{2n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}=\dfrac{1+2\times 0}{2+0}=\dfrac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n^2(n-2)}{(1-3n)(2+n^2)}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n^3-4n^2}{2+n^2-6n-3n^3}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^3\left(2-\frac{4}{n}\right)}{n^3\left(-3+\frac{1}{n}-\frac{6}{n^2}+\frac{2}{n^3}\right)}=\dfrac{2-0}{-3+0-0+0}=-\dfrac{2}{3}$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2+n}{2n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2n^2}=\dfrac{1+0}{2}=\dfrac{1}{2}$

e) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(n+1)!}{n!-(n+1)!}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n!(n+1)}{n![1-(n+1)]}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+1}{-n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{-n}=\dfrac{1+0}{-1}=-1$

f) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-2n^5+3n^2-10\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}n^5\left(-2+\dfrac{3}{n^3}-\dfrac{10}{n^5}\right)=(+\infty)\times(-2+0-0)=-\infty$

g) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3-8n}{n+2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n\left(-8+\frac{3}{n}\right)}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}=\dfrac{-8+0}{1+0}=-8$

h) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4n^2}{-n+2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2(4)}{n\left(-1+\frac{2}{n}\right)}=\lim\limits_{n\to+\infty}n\times\dfrac{4}{-1+\frac{2}{n}}=(+\infty)\times(-4)=-\infty$

i) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{7n+2n^3}{7n^2-n-1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^3\left(\frac{7}{n^2}+2\right)}{n^2\left(7-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}=(+\infty)\times\dfrac{0+2}{7-0-0}=(+\infty)\times\dfrac{2}{7}=+\infty$

j) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-3n^2+4n}{4n^3-n+2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \times \dfrac{-3+\frac{4}{n}}{4-\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}} = 0 \times \dfrac{-3+0}{4-0+0} = 0$

k) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+3)(2n-1)}{(n-3)^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^2-n+6n-3}{n^2-6n+9} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2\left(2-\frac{5}{n}-\frac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(1-\frac{6}{n}+\frac{9}{n^2}\right)} = \dfrac{2-0-0}{1-0+0} = 2$

l) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n+2}{\sqrt{16n^4+6n^3-2}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n\left(3+\frac{2}{n}\right)}{n^2\sqrt{16+\frac{6}{n}-\frac{2}{n^4}}} = 0$

m) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{9+n^2}{4n^2}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{n^2\left(1+\frac{9}{n^2}\right)}{4n^2}} = \sqrt{\dfrac{1+0}{4}} = \dfrac{1}{2}$

Exercice 2 — Corrigé

Corrigé

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-2)^n}{5}$ n'existe pas (la suite $(-2)^n$ n'a pas de limite car $-2 \leq -1$).

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} [2^n - 3^n]$. On a $2^n - 3^n = 3^n\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - 1\right]$.

$\left.\begin{array}{l} \lim_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right] = 0-1 = -1 \\ \lim_{n\to+\infty} 3^n = +\infty \end{array}\right\}$ Par produit des limites $\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty}[2^n-3^n] = -\infty$

c) $V_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$$V_n = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] = 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = 2 - 2(0) = 2$$

Exercice 3 — Corrigé

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{3}{n} + 4 \leq u_n \leq \dfrac{2}{n} + 4$.

$\lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{n}+4\right) = 3(0)+4 = 4 \qquad \lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{n}+4\right) = 2(0)+4 = 4$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.

Exercice 5 — Corrigé (extraits)

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left[\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\right]$

$$\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1} = \frac{\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}\right)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}} = \frac{2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}$$

$$n\left[\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\right] = \frac{2n}{|n|\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+|n|\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} = \frac{2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}} = \frac{2}{2} = 1$$

c) $\lim_{n\to+\infty}\left[\sqrt{n^2+5n}-n\right]$

$$\sqrt{n^2+5n}-n=\frac{5n}{\sqrt{n^2+5n}+n}=\frac{5n}{n\left(\sqrt{1+\frac{5}{n}}+1\right)}=\frac{5}{\sqrt{1+\frac{5}{n}}+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\sqrt{n^2+5n}-n\right]=\frac{5}{\sqrt{1}+1}=\frac{5}{2}$$

d) $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{2^{2n+1}+3^{n+2}}{4^{n+2}+5}=\lim_{n\to+\infty}\dfrac{4^n\cdot 2+3^n\cdot 9}{4^n\cdot 16+5}=\lim_{n\to+\infty}\dfrac{4^n\left(2+9\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}{4^n\left(16+5\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)}=\dfrac{2+9(0)}{16+5(0)}=\dfrac{2}{16}=\dfrac{1}{8}$

e) $\lim_{n\to+\infty}\left[\sqrt{n^2+n+3}-\sqrt{n^2-3n+1}\right]$

$$=\frac{n^2+n+3-(n^2-3n+1)}{\sqrt{n^2+n+3}+\sqrt{n^2-3n+1}}=\frac{4n+2}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)}$$

$$=\frac{4+\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}}\implies\lim_{n\to+\infty}=\frac{4}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=\frac{4}{2}=2$$

II. Limites d'une fonction

Limite d'une fonction en $+\infty$

Définition

Soit f une fonction définie sur $]a;+\infty[$.

a) Si les valeurs $f(x)$ dépassent n'importe quel réel M donné dès que x est suffisamment grand, alors $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. On écrit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b) Si les valeurs de $f(x)$ sont aussi proches que l'on veut d'un réel b dès que x est assez grand, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$.

- On dit alors que la droite d'équation $y = b$ est une **asymptote horizontale** à la courbe de f.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, si $f(x) < 0$ et $|f(x)|$ dépasse n'importe quel réel M donné dès que x est suffisamment grand.

$f(x)$	x^2	x^3	$\sqrt{x}$	$\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0

Limite d'une fonction en un réel a

Définition

Soit f une fonction définie sur $]b;a[\cup]a;c[$.
La limite de $f(x)$ lorsque x est à gauche de a : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x)$
La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers la droite de a : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)$

- Si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x) = \pm\infty$, dans ce cas la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à la courbe de f. On donne la même interprétation si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = \pm\infty$.

Exemple

$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\x>3}} \dfrac{1}{x-3}$. Pour $x = 3$, $x - 3 = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{x-3} = \text{“}\dfrac{1}{0}\text{”}$.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$x-3$		$-$	0	$+$	

$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\x>3}} \dfrac{1}{x-3} = \text{“}\dfrac{1}{0^+}\text{”} = +\infty$, donc la droite d'équation $x = 3$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction $\dfrac{1}{x-3}$.

$$\lim_{\substack{x\to 3\\x<3}} \frac{1}{x-3} = \text{“}\frac{1}{0^-}\text{”} = -\infty$$

Exemple

On donne $f(x) = \dfrac{3x+2}{1-x}$. Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)$.

$1-x=0 \iff x=1$, donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \text{“}\dfrac{3(1)+2}{1-1}\text{”} = \text{“}\dfrac{5}{0}\text{”}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1}(3x+2)=5\\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(1-x)=0^+\end{array}\right\}$ Par quotient des limites $\Longrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = +\infty$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1}(3x+2)=5\\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(1-x)=0^-\end{array}\right\}$ Par quotient des limites $\Longrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = -\infty$

La droite d'équation $x=1$ est une asymptote verticale à la courbe de f.

Exercice 6 — Calculer : $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \dfrac{x}{x-2}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \dfrac{x}{x-2}$.

Opérations sur les limites

Propriété

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell'$ alors :

$$\lim_{x\to a}[k\,f(x)] = k\cdot\ell \quad (k\in\mathbb{R}) \qquad \lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)] = \ell\pm\ell'$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)\times g(x)] = \ell\times\ell' \qquad \lim_{x\to a} b = b \quad (b\in\mathbb{R}) \qquad \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\ell}{\ell'} \quad (\ell'\neq 0)$$

Propriété

- Si f est définie en a, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
- La limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'un polynôme est la limite de son terme de plus haut degré.
- La limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'une fonction rationnelle est la limite du quotient des termes de plus haut degré.

Exemple

$$\lim_{x\to 1}(2x^2+3x-1) = 2(1)^2+3(1)-1 = 4 \qquad \lim_{x\to+\infty}(3x^5-5x^4+x^2) = \lim_{x\to+\infty} 3x^5 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2-2x}{x^2+5x+3}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} 3 = 3$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+x-1}{x-1}\right) = \frac{0^2+0-1}{0-1} = \frac{-1}{-1} = 1$$

Exercice 7 — Calculer

$$\lim_{x\to 4}\left[2(x+3)-\frac{x}{x-2}\right] \qquad \lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{2x^2-3}{x^4+x^2+3} \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x}{x^2}$$

Corrigé — $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-2x}$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-2x} = \text{“}\dfrac{0}{0}\text{”}$. Résolvons $2x^2-3x-2=0$: $\Delta=(-3)^2+4(2)(2)=25$, donc $x_1=-\dfrac{1}{2}$ et $x_2=2$.

$$2x^2-3x-2 = 2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)$$

$$\frac{2x^2-3x-2}{x^2-2x} = \frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)}{x(x-2)} = \frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{x} = \frac{2x+1}{x}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x+1}{x} = \frac{2(2)+1}{2} = \frac{5}{2} \qquad \text{d'où} \qquad \lim_{x\to 2}\frac{2x^2-3x-2}{x^2-2x} = \frac{5}{2}$$

Exercice 8 — Calculer

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{2x^3+3x^2}{2x}$$

Corrigé — $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+8}+3x}$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+8}+3x} = \text{“}\frac{0}{0}\text{”}$$

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+8}+3x} = \frac{(x+1)\left(\sqrt{x^2+8}-3x\right)}{\left(\sqrt{x^2+8}+3x\right)\left(\sqrt{x^2+8}-3x\right)} = \frac{(x+1)\left(\sqrt{x^2+8}-3x\right)}{(x^2+8)-9x^2}$$

$$= \frac{(x+1)\left(\sqrt{x^2+8}-3x\right)}{8-8x^2} = \frac{(x+1)\left(\sqrt{x^2+8}-3x\right)}{-8(x^2-1)}$$

$$= \frac{(x+1)\left(\sqrt{x^2+8}-3x\right)}{-8(x+1)(x-1)} = \frac{\sqrt{x^2+8}-3x}{-8(x-1)}$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+8}+3x} = \lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+8}-3x}{-8(x-1)} = \frac{\sqrt{1+8}+3}{-8(-1-1)} = \frac{3+3}{-8(-2)} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

Exercice 9 — Calculer

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{2x^2+x+3}{3x^2+1} \qquad \lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2+x-6} \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+7}{2x^4+x^2+4} \qquad \lim_{x\to 2}\frac{\sin(\pi x)}{\sqrt{x}+4}$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{3x^2+x-10} \qquad \lim_{x\to -\infty}\frac{3x^3-x-1}{x^2-4x+3} \qquad \lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right] \qquad \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}}$$

Corrigé — $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

Puisque $x\to-\infty$, $x<0$, on a $|x|=-x$, d'où

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)=0$, d'où $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{-1}{\sqrt{1}}=-1$.

Limites trigonométriques de référence

Propriété

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(x)-1}{x}=0$ pour tout $x\neq0$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

Exemple

Calculer $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(4x)}{x}$.

On a $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(4x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}4\times\dfrac{\sin(4x)}{4x}$. On pose $u=4x$; quand $x\to0$, $u\to0$.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(4x)}{x}=4\lim_{u\to0}\frac{\sin u}{u}=4\times1=4$$

Fonction définie par morceaux

Soit la fonction f définie par $f(x)=\begin{cases}x-1, & x\geq0\\ x^2, & x<0\end{cases}$

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}(x)^2=1$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}(x-1)=0-1=-1\qquad\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}(x^2)=0$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)\neq\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}f(x)\quad\text{donc}\quad\lim_{x\to0}f(x)\text{ n'existe pas.}$$

Continuité d'une fonction

Définition

- La fonction f est telle que $f(a)$ existe, $a\in\mathbb{R}$.
- Si $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$, la fonction f est dite **continue** en a.

Exemple

$f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}$, $x \neq 2$ et $f(2) = 4$. Continuité de f en $x = 2$?

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)^2}{x-2} = \lim_{x \to 2} (x - 2) = 0$$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$ donc f n'est pas continue en $x = 2$.

Asymptote oblique

Définition

Soit f une fonction définie sur $]m; +\infty[$, (C_f) la courbe représentative de f et $(d) : y = ax + b$.

- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$, on dit que (d) est une asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$.
- Si $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$, la droite (d) est asymptote à (C_f) en $-\infty$.

Exemple

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x - 1} = x + 1 + \dfrac{3}{x - 1}$.

$$f(x) - (x + 1) = \frac{3}{x - 1}$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x + 1)] = \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x - 1} = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} [f(x) - (x + 1)] = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{3}{x - 1} \right) = 0$$

Donc la droite $(d) : y = x + 1$ est asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Théorème des gendarmes (fonctions)

Théorème

Si pour x assez proche de a, on a l'encadrement $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to a} h(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

Exemple

$f(x) = 2x - \sin x$. On a $-1 \leq \sin x \leq 1$, donc $-1 \leq -\sin x \leq 1$, d'où

$$2x - 1 \leq 2x - \sin x \leq 2x + 1$$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x - 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} (2x + 1) = +\infty$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

$f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. On a $-1 \leq \sin x \leq 1$, donc $-\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{\sin x}{x} \leq \dfrac{1}{x}$; comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x} \right) = 0$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Limite d'une fonction composée

Propriété

$$\lim_{x\to a}\left[f(g(x))\right] = f\left[\lim_{x\to a} g(x)\right]$$

Exemple

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x+\sin x}{4x-3\cos x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(5+\frac{\sin x}{x}\right)}{x\left(4-\frac{3\cos x}{x}\right)} = \frac{5+0}{4-3(0)} = \frac{5}{4}$$

Exercice 10 — Calculer : $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(5x)}{4x}$

III. Dérivation

Dérivée d'une fonction

Définition

La dérivée d'une fonction f est notée f'. Le nombre dérivé de f en un réel a est noté $f'(a)$ et

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \text{ou} \qquad f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Règles de dérivation

Soit a une constante et u, v des fonctions dérivables sur I.

$$(a)' = 0 \qquad (x^n)' = nx^{n-1} \qquad (au)' = au' \qquad (u^n)' = nu' \cdot u^{n-1}$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v' \qquad (uv)' = u'v + uv' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \ (v \neq 0)$$

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

Exemple

$(x^2)' = 2x^{2-1} = 2x$
$\left[(x^5 + 3x)^8\right]' = 8(x^5 + 3x)'(x^5 + 3x)^{8-1} = 8(5x^4 + 3)(x^5 + 3x)^7$
$f(x) = x + x^2 \ \Rightarrow \ f'(x) = 1 + 2x$
$f(x) = 3x(x^2 + 2) \ \Rightarrow \ f'(x) = 3(x^2 + 2) + 3x(2x) = 3x^2 + 6 + 6x^2 = 9x^2 + 6$
$f(x) = \dfrac{x}{x+1} \ \Rightarrow \ f'(x) = \dfrac{(1)(x+1) - x(1)}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

Déterminer les fonctions dérivées

$f(x) = \dfrac{\sin x}{x} \ \Rightarrow \ f'(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$
$f(x) = 2x\cos x \ \Rightarrow \ f'(x) = 2\cos x - 2x\sin x$
$f(x) = \sqrt{x+2} = (x+2)^{1/2} \ \Rightarrow \ f'(x) = \dfrac{1}{2}(x+2)^{-1/2} = \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}$
$f(x) = \sin^4 x = (\sin x)^4 \ \Rightarrow \ f'(x) = 4\cos x \sin^3 x$

Équation de la tangente en $x = a$

Propriété

$$T_a : \ y = f'(a)(x - a) + f(a) = f'(a)\,x + b$$

Exemple

$f(x) = 6 - x^3$, équation de la tangente en 1.
$f'(x) = -3x^2$; $f'(1) = -3$ et $f(1) = 5$.

$$T_1 : \ y = -3(x-1) + 5 \qquad T_1 : \ y = -3x + 8$$

Dérivée d'une fonction réciproque

Propriété

Si f admet une réciproque f^{-1} alors

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

Exemple

$f(x) = x^2$, $D_f =]0;+\infty[$. On a $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.
$f'(x) = 2x$ donc $f'\left(f^{-1}(x)\right) = f'(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x}$.

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Exercices résolus — Limites

Exemple

$\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^3-8}{x^2+x-6}\right) = \text{“}\dfrac{2^3-8}{2^2+2-6}\text{”} = \text{“}\dfrac{0}{0}\text{”}$

$$\frac{x^3-8}{x^2+x-6} = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+3)}$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^3-8}{x^2+x-6}\right) = \lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{x+3} = \frac{12}{5}$$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(\pi x)}{\sqrt{x}+4} = \dfrac{\sin(2\pi)}{\sqrt{2}+4} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$. On a $\dfrac{\tan x}{x} = \dfrac{\sin x}{\cos x}\times\dfrac{1}{x} = \dfrac{\sin x}{x}\times\dfrac{1}{\cos x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\times\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\right) = 1\times 1 = 1$$

Exercice 11 — *Calculer*

1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$ $(a\in\mathbb{R}_+)$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(ax)}{bx}$ $(b\neq 0)$ 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x}$

Corrigé

1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}$ (car $x-a = (\sqrt{x})^2-(\sqrt{a})^2$)

$$= \lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(ax)}{bx}$. Posons $u = ax$, $x = \dfrac{u}{a}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin u}{b\left(\frac{u}{a}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin u}{\frac{bu}{a}} = \lim_{x\to 0} a\times\frac{\sin u}{u}\times\frac{1}{b} = \frac{a}{b}\times\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u} = \frac{a}{b}\times 1$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{bx}=\frac{a}{b}}$$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\times\sin x\right)=1\times 0=0$

Exercice 12 — *Calculons* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\cos x}{x}\right)$

$$\frac{1-\cos x}{x}=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)}=\frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)}=\frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\times\frac{\sin x}{1+\cos x}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1+\cos x}=1\times\frac{0}{0+1}=1\times 0=0$$

Exercice 13 — *Tangente*

Soit $f(x)=x^2+2x$. Déterminons l'équation de la tangente T_1 en $x=1$.

$T_1:\ y=f'(1)(x-1)+f(1)\qquad f'(x)=2x+2,\quad f'(1)=2(1)+2=4,\quad f(1)=(1)^2+2(1)=3$

$$T_1:\ y=4(x-1)+3\qquad \boxed{T_1:\ y=4x-1}$$

Limite d'une suite définie par récurrence

Propriété

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et a un nombre réel et $(u_n):\begin{cases}u_0=a\\u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$.
Si (u_n) converge vers un réel k et que la fonction f est continue en k, alors la limite de la suite est solution de l'équation $f(\ell)=\ell$.

Exemple

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2+1}{4x^2-3}}$$

Posons $u=\dfrac{x^2+1}{4x^2-3}$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{4x^2-3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{4x^2}=\dfrac{1}{4}$
Quand $x\to+\infty$, $u\to\dfrac{1}{4}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2+1}{4x^2-3}}=\lim_{u\to\frac{1}{4}}\sqrt{u}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$

Exemple

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin 2x}{\sin x-\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(1+\frac{\sin 2x}{\sin x}\right)}{\sin x\left(1-\frac{\sin 2x}{\sin x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{2\cos x\sin x}{\sin x}}{1-\frac{2\cos x\sin x}{\sin x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1+2\cos x}{1-2\cos x}$$

$$=\frac{1+2\cos(0)}{1-2\cos(0)}=\frac{1+2(1)}{1-2(1)}=\frac{3}{-1}=-3$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Posons $u=\dfrac{1}{x}$, $x=\dfrac{1}{u}$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

$$x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{u}\sin u=\frac{\sin u}{u}\qquad\Longrightarrow\qquad\boxed{\lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x}=\lim_{u\to0}\frac{\sin u}{u}=1}$$

Exemple

Soit g une fonction définie par $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x+1}, & x<0\\ \dfrac{x+1}{x-1}, & x>0\\ -1, & x=0\end{cases}$

1) $g(0)=-1$

$$\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} g(x)=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{x-1}{x+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1\qquad\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} g(x)=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{x+1}{x-1}=\frac{0+1}{0-1}=-1$$

2) On a $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} g(x)=-1$ donc $\lim\limits_{x\to0} g(x)=-1$. g est continue en 0.

Exemple

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{6}}$

$$\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x\right]=2\left[\sin x\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-\cos x\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{6}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{x-\frac{\pi}{6}}$$

Posons $u=x-\dfrac{\pi}{6}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=0$, donc quand $x\to\dfrac{\pi}{6}$, $u\to0$.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{x-\frac{\pi}{6}}=\lim_{u\to0}\frac{\sin u}{u}=1\qquad\text{donc}\qquad\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{6}}=2\times1=2$$

Exercices résolus — Dérivation

Calculer les dérivées des fonctions définies par

1) $f(x) = x^2 - 3x - 1$

2) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

3) $f(x) = \sqrt{x}$

4) $f(x) = \dfrac{2-x}{2+x}$

5) $f(x) = \tan(x)$

6) $f(x) = \cot(x)$

7) $f(x) = \dfrac{3\cos x}{1+\sin x}$

8) $f(x) = \sin(x^2+1)$

9) $f(x) = (1-x^4)^5$

10) $f(x) = (1-x^5)^6$

11) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$, montrer que $f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$

12) $f(x) = \dfrac{x^n}{(1+x)^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $f'(x) = n\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{n-1} \times \dfrac{1}{(1+x)^2}$

13) $f(x) = \cos(x^2+1)$

14) $f(x) = (3x-2)\sqrt{(1+x)^3}$, montrer que $f'(x) = \dfrac{15}{2}x\sqrt{1+x}$

15) $f(x) = 2x - \sin(2x)$

16) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

17) $f(x) = x - 2 + \dfrac{1}{x-2}$

18) $f(x) = \dfrac{x^3}{3(1-x^2)}$

19) $f(x) = \dfrac{x^3-4x+1}{(x-1)^2}$ et $g(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 2$, montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x-1)^3}$

Corrigé — 18) $f(x) = \dfrac{x^3}{3(1-x^2)}$

$$f'(x) = \frac{(x^3)' \cdot 3(1-x^2) - x^3 \cdot \left[3(1-x^2)\right]'}{\left[3(1-x^2)\right]^2} = \frac{3x^2(3-3x^2) - x^3(-6x)}{9(1-x^2)^2}$$

$$= \frac{9x^2 - 9x^4 + 6x^4}{9(1-x^2)^2} = \frac{9x^2 - 3x^4}{9(1-x^2)^2} = \frac{3(3x^2-x^4)}{9(1-x^2)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{3x^2-x^4}{3(1-x^2)^2}}$$

Corrigé — 19) $f(x) = \dfrac{x^3-4x+1}{(x-1)^2}$, $g(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 2$

$$f'(x) = \frac{(x^3-4x+1)'(x-1)^2 - (x^3-4x+1)\left[(x-1)^2\right]'}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{(3x^2-4)(x-1)^2 - 2(x^3-4x+1)(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{(x-1)\left[(3x^2-4)(x-1) - 2(x^3-4x+1)\right]}{(x-1)^4} = \frac{(3x^2-4)(x-1) - 2(x^3-4x+1)}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{3x^3 - 3x^2 - 4x + 4 - 2x^3 + 8x - 2}{(x-1)^3} = \frac{x^3 - 3x^2 + 4x + 2}{(x-1)^3}$$

$$\Longrightarrow \qquad \boxed{f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^3}}$$

Exercice de synthèse

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \dfrac{\sin x}{x^2+1}$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^2 - \sin(3x)}{x^2 + 10}$
- $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
- $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

MATHÉMATIQUES

Thème 3

BARYCENTRE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE DANS L'ESPACE



Cours structuré, exemples et exercices corrigés

Notes de cours rémises en forme

Sommaire

- Présentation du barycentre
- Barycentre de deux points pondérés
- Coordonnées du barycentre dans un repère
- Barycentre de trois points pondérés
- Barycentre de n points pondérés – Isobarycentre
- Caractérisation vectorielle de la droite (AB)
- Fonction vectorielle de Leibniz
- Barycentre et plan (ABC)
- Lignes de niveau – Exercices résolus
- Exercice bilan : produit scalaire et fonction de Leibniz
- Droites et plans dans l'espace (représentation paramétrique, équation cartésienne)
- Déterminants et produit vectoriel
- La sphère dans l'espace
- Exercices d'application (énoncés et corrigés)
- Exercice bilan (QCM)

BARYCENTRE

Présentation

Le barycentre de *barys* (du grec $\beta\alpha\rho\acute{\upsilon}\varsigma$, qui signifie « poids ») est initialement le centre des poids.

Le premier à avoir étudié le barycentre en tant que centre des poids (ce qu'on appelle de nos jours **centre de gravité**) est le physicien et ingénieur grec **Archimède**. Le barycentre est donc, à l'origine, une notion de physique. En mathématiques, le barycentre est un point construit à partir d'un ensemble de points.

- En **statistique**, le barycentre correspond à la notion de moyenne ou d'espérance.
- En **physique**, le barycentre correspond à la notion de centre d'inertie ou de centre de gravité.

Définition – point pondéré

Un point A_i affecté d'un réel α_i est appelé **point pondéré** le couple (A_i, α_i).
Les points considérés appartiennent au plan ou à l'espace.

Barycentre de deux points pondérés

Définition

Soient (A, α) et (B, β) deux points pondérés tels que $\alpha + \beta \neq 0$. Il existe un unique point G tel que

$$\alpha\,\overrightarrow{GA} + \beta\,\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}.$$

Le point G est appelé **barycentre des points pondérés** (A, α) et (B, β).

Notation

$$G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline \end{array}$$

Construction du barycentre de deux points pondérés

Si $G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline \end{array}$ alors $\alpha + \beta \neq 0$ et $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$.

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = 0 \iff (\alpha+\beta)\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{AB} = 0 \iff (\alpha+\beta)\overrightarrow{GA} = -\beta\overrightarrow{AB}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}}$$

Attention

Si $\dfrac{\beta}{\alpha+\beta} \in \mathbb{R}^*$, alors G est l'image de B par l'homothétie de centre A et de rapport $\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}$.

- On pose $k = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}$.

- Si $k < 0$, les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont opposés.
- Si $k > 0$, $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont le même sens.

Propriétés

Propriété – homogénéité

Si $G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline \end{array}$ alors, pour tout $k \in \mathbb{R}^*$, G est aussi le barycentre de

$$\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline k\alpha & k\beta \\ \hline \end{array}$$

Si $G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline \alpha & \alpha \\ \hline \end{array}$ et $\alpha \neq 0$ alors $\alpha + \alpha \neq 0$ et $\alpha\overrightarrow{GA} + \alpha\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$, donc

$$\frac{\alpha}{\alpha}\overrightarrow{GA} + \frac{\alpha}{\alpha}\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0} \implies 1 \cdot \overrightarrow{GA} + 1 \cdot \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0} \implies G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

G est alors le milieu du segment $[AB]$; on l'appelle aussi **isobarycentre** des points A et B.

Propriété

La droite (AB) est l'ensemble des barycentres des points A et B.

Propriété

Si $G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline \end{array}$ alors, pour tout point M du plan (ou de l'espace),

$$\boxed{\alpha\,\overrightarrow{MA} + \beta\,\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\,\overrightarrow{MG}}$$

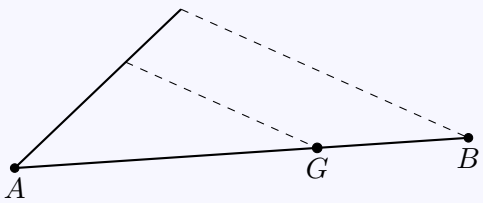
Exemple 1

Construire $G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}$.

$1 + 2 = 3 \neq 0$ donc $G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}$ existe.

$$\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0} \implies \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \implies 3\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \qquad \left\{h_{\left(A,\frac{2}{3}\right)}(B) = G\right\}$$



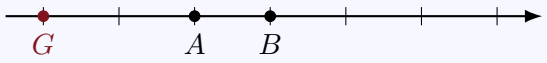
Exemple 2

Construire le barycentre de $(A, 3)$ et $(B, -2)$.

$3 - 2 = 1 \neq 0$ donc $G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline 3 & -2 \\ \hline \end{array}$ existe.

$$3\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0} \implies 3\overrightarrow{GA} - 2(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{0} \implies (3-2)\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{AB} \quad \implies \quad \boxed{\overrightarrow{AG} = -2\overrightarrow{AB}}$$



Coordonnées du barycentre

Dans un repère de l'espace $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ et $G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline \end{array}$.

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0} \iff \alpha\overrightarrow{GO} + \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{GO} + \beta\overrightarrow{OB} = \vec{0}$$
$$(\alpha+\beta)\overrightarrow{GO} = -\alpha\overrightarrow{OA} - \beta\overrightarrow{OB} \iff -(\alpha+\beta)\overrightarrow{OG} = -\alpha\overrightarrow{OA} - \beta\overrightarrow{OB}$$
$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OB}$$

D'où $x_G = \dfrac{1}{\alpha+\beta}(\alpha x_A + \beta x_B)$, soit :

$$x_G = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}x_A + \frac{\beta}{\alpha+\beta}x_B$$
$$y_G = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}y_A + \frac{\beta}{\alpha+\beta}y_B$$
$$z_G = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}z_A + \frac{\beta}{\alpha+\beta}z_B$$

Barycentre de trois points pondérés

Définition

Soient (A, α), (B, β) et (C, γ) trois points pondérés tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

$$\exists!\, G \;/\; \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

G est appelé le barycentre des trois points pondérés (A, α), (B, β) et (C, γ).

Propriété

$$G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \\ \hline \end{array} \text{ et } \alpha+\beta+\gamma \neq 0 \iff \forall M,\ \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$$

Construction du barycentre de trois points

$$G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \\ \hline \end{array} \text{ et } \alpha+\beta+\gamma \neq 0$$
$$\iff \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$
$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{GA} + \gamma\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$
$$(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{GA} = -\beta\overrightarrow{AB} - \gamma\overrightarrow{AC}$$
$$\boxed{\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}}$$

Attention

Pour la construction du barycentre de trois points pondérés, privilégier la construction *bout à bout*.

Propriété – homogénéité

Si $G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \\ \hline \end{array}$ alors, pour tout $k \neq 0$, G est aussi le barycentre de $\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline k\alpha & k\beta & k\gamma \\ \hline \end{array}$

Isobarycentre

Si $G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline \alpha & \alpha & \alpha \\ \hline \end{array}$ et $\alpha \neq 0$, alors G est appelé **l'isobarycentre** des points A, B et C.

L'isobarycentre de trois points non alignés est le centre de gravité du triangle ABC.

Exemple 1

Construire G le barycentre des points pondérés $(A, 1)$, $(B, 2)$ et $(C, -1)$.

Propriétés (compléments)

Pour tout point M : $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$.

Attention

Si $\alpha+\beta+\gamma=0$ alors $G=\text{bar}\begin{array}{|c|c|c|}\hline A&B&C\\\hline\alpha&\beta&\gamma\\\hline\end{array}$ n'existe pas.

Il faut alors utiliser la relation de Chasles pour éliminer le point M ; la somme est alors indépendante du point M et est égale au vecteur constant

$$\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}.$$

Barycentre de n points pondérés

Définition

Étant donné n points pondérés (A_i,α_i) tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\neq 0$, on appelle barycentre des points pondérés $(A_i,\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ le point G tel que

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,\overrightarrow{GA_i}=\overrightarrow{0}.$$

Notation

$$G=\text{bar}\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline A_1&A_2&\dots&A_n\\\hline\alpha_1&\alpha_2&\dots&\alpha_n\\\hline\end{array}\quad\text{ou}\quad G=\text{bar}\big\{(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),\dots,(A_n,\alpha_n)\big\}$$

Réduction d'une somme vectorielle

Propriété

Si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\neq 0$ alors

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,\overrightarrow{MA_i}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,\overrightarrow{MG}$$

car $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA_i})=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MG}+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{GA_i}$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{GA_i}=\overrightarrow{0}$.

Propriété

Si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=0$ alors le vecteur $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,\overrightarrow{MA_i}$ est indépendant de M.

Attention

Un système dont la somme des coefficients est nulle n'a pas de barycentre. Le barycentre, lorsqu'il existe, est unique.

Isobarycentre

On appelle isobarycentre des points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ le barycentre de ces points affectés d'un même coefficient non nul.

Exemple – centre de gravité

Le centre de gravité d'un triangle ABC vérifie $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

Exercice

On donne $\overrightarrow{AG} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{GB}$.

1) Déterminer α, β, γ tels que $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

2) Interpréter le résultat.

Exercice – réduire les sommes

Soit ABC un triangle. Réduire les sommes suivantes :

$$\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} \qquad \overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$$

Corrigé

Calcul de $\overrightarrow{u}$: $2 + 1 + 3 = 6 \neq 0$, on introduit le point $G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline 2 & 1 & 3 \\ \hline \end{array}$, c'est-à-dire $2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

$$\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{MG} + 3\overrightarrow{GC} = (2+1+3)\overrightarrow{MG} + \underbrace{2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC}}_{=\overrightarrow{0}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{u} = 6\,\overrightarrow{MG}}$$

Calcul de $\overrightarrow{v}$: $2-4+2 = 0$, donc le système $\{(A,2);(B,-4);(C,2)\}$ n'admet pas de barycentre.

$$\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AC} = (2-4+2)\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$$

$$\boxed{\overrightarrow{v} = -4\,\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AC}}$$

Caractérisation de la droite (AB)

Soit $G \in (AB)$; il existe donc un réel k tel que $\overrightarrow{AG} = k\,\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AG} = k(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}) = k\overrightarrow{AG} + k\overrightarrow{GB}$$

$$(1-k)\overrightarrow{AG} - k\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0} \implies -(1-k)\overrightarrow{GA} - k\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0} \implies (1-k)\overrightarrow{GA} + k\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$$

Or $(1-k)+k=1\neq 0$, donc

$$G=\text{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline A & B\\\hline 1-k & k\\\hline\end{array}$$

La fonction vectorielle de Leibniz

Définition

La fonction de Leibniz associée au système de points pondérés $(A_i, \alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est définie par

$$\overrightarrow{f}(M) = \alpha_1\overrightarrow{MA_1} + \alpha_2\overrightarrow{MA_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{MA_n}.$$

Si la masse $\sum \alpha_i$ est nulle, la fonction de Leibniz est constante (indépendante de M).

Exemple 1

Déterminer la fonction de Leibniz associée au système de points pondérés $(A, 2)$, $(B, 1)$ et $(C, -2)$.

$$\overrightarrow{\varphi}(M) = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$$

Exemple 2

La fonction vectorielle $\overrightarrow{\varphi}$ associée au système de points pondérés $(A, 2)$, $(B, 1)$, $(C, -3)$ est $\overrightarrow{\varphi}(M) = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$. Montrer que $\overrightarrow{\varphi}$ est constante.

Corrigé

$2 + 1 - 3 = 0$, le système n'admet pas de barycentre.

$$\overrightarrow{\varphi}(M) = 2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{AC} = (2+1-3)\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\varphi}(M) = \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}}$$

Barycentre et plan

Propriété

$G \in (ABC)$ si et seulement si il existe deux réels α et β tels que

$$\overrightarrow{AG} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}.$$

$$\overrightarrow{AG} = \alpha(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}) + \beta(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC}) = \alpha\overrightarrow{AG} + \alpha\overrightarrow{GB} + \beta\overrightarrow{AG} + \beta\overrightarrow{GC}$$

$$(1 - \alpha - \beta)\overrightarrow{AG} = \alpha\overrightarrow{GB} + \beta\overrightarrow{GC} \implies (1 - \alpha - \beta)\overrightarrow{GA} + \alpha\overrightarrow{GB} + \beta\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$$

Or $(1 - \alpha - \beta) + \alpha + \beta = 1 \neq 0$, donc

$$G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline 1-\alpha-\beta & \alpha & \beta \\ \hline\end{array}$$

Propriété

Le plan (ABC) est l'ensemble des barycentres des points A, B et C.

Lignes de niveau

Définition

Soit f l'application du plan qui à tout point M associe le réel $f(M)$; la **ligne de niveau** k de l'application f est l'ensemble des points M tels que $f(M) = k$.

Exercice 1 – fonction de Leibniz

$$\varphi(M) = k^2\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}, \qquad k \in \mathbb{R}$$

Déterminer les valeurs de k pour lesquelles φ est constante.

Corrigé

φ est constante si et seulement si $k^2 - k - 2 = 0$.

$$k^2 + k - 2k - 2 = 0 \implies k(k+1) - 2(k+1) = 0 \implies (k+1)(k-2) = 0$$

$$k = -1 \text{ ou } k = 2 \qquad \implies \qquad \boxed{\varphi \text{ est constante ssi } k \in \{-1\,;\,2\}}$$

Activité – ensemble des points M tels que $MA = kMB$

A et B sont des points fixes et $k \in \mathbb{R}_+^*$.

1) Si $k = 1$, on a $MA = MB$: l'ensemble des points M est la médiatrice du segment $[AB]$.

2) Si $k \neq 1$:

$$MA = kMB \iff MA^2 = k^2MB^2 \iff \overrightarrow{MA}^2 - k^2\overrightarrow{MB}^2 = 0 \iff (\overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{MA}-k\overrightarrow{MB}) = 0$$

Soit G_1 le barycentre de $\{(A,1);(B,k)\}$ et G_2 le barycentre de $\{(A,1);(B,-k)\}$. On a

$$(1+k)\overrightarrow{MG_1} \cdot (1-k)\overrightarrow{MG_2} = \vec{0} \implies (1-k^2)\,\overrightarrow{MG_1} \cdot \overrightarrow{MG_2} = 0 \implies \overrightarrow{MG_1} \cdot \overrightarrow{MG_2} = 0$$

$$\implies \overrightarrow{MG_1} \perp \overrightarrow{MG_2}$$

L'ensemble cherché est le **cercle de diamètre** $[G_1G_2]$.

Ligne de niveau de $\varphi : M \mapsto \sum \alpha_i MA_i^2$

Soit G le barycentre de $(A_i, \alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ avec $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$.

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_i})^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GA_i} + \overrightarrow{GA_i}^2\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MG}^2 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i}^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i}}_{=\vec{0}}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) MG^2 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i GA_i^2}$$

On pose $k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2$. Alors

$$MG^2 = \rho \quad \text{avec} \quad \rho = \frac{k - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i GA_i^2}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$$

- Si $\rho < 0$, (E_k) est l'ensemble vide.
- Si $\rho = 0$, l'ensemble E_k est tel que $E_k = \{G\}$.
- Si $\rho > 0$, l'ensemble E_k cherché est le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{\rho}$ dans le plan (dans l'espace, l'ensemble E_k est la sphère de centre G et de rayon $\sqrt{\rho}$).
- Si $\sum \alpha_i = 0$, la ligne de niveau k ($k \in \mathbb{R}$) de l'application $M \mapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2$ est soit l'ensemble vide, soit l'ensemble tout entier, soit une droite dans le plan (ou un plan dans l'espace).

Exercices 2 à 4

Ex2) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 6$.

Ex3) $ABCD$ un rectangle. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que

$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\| = \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\|$$

Ex4) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $3MA^2 + 6MB^2 = k$, $k \in \mathbb{R}$.

Corrigé Exercice 2

$3 - 2 + 1 = 2$, $2 \neq 0$ donc $G = \text{bar}$

A	B	C
3	-2	1

existe, avec $3\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

$$\|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|(3-2+1)\overrightarrow{MG} + 3\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\| = \|2\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{0}\| = 6$$

$$2\|\overrightarrow{MG}\| = 6 \implies \|\overrightarrow{MG}\| = 3$$

L'ensemble des points M est le **cercle de centre G et de rayon $R = 3$.**

Corrigé Exercice 3

$$\|4\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}\| = \|\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}\|$$

$1 + 1 + 1 + 1 = 4 \neq 0$: $G = \text{bar}$

A	B	C	D
1	1	1	1

existe, avec $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0}$.

$1 - 1 - 1 + 1 = 0$: le système $\{(A,1);(B,-1);(C,-1);(D,1)\}$ n'admet pas de barycentre.

$$\|4\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}\| = \|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD}\|$$

Comme $ABCD$ est un rectangle, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$, d'où

$$4\|\overrightarrow{MG}\| = \|2\overrightarrow{BA}\| \implies \boxed{\|\overrightarrow{MG}\| = \tfrac{1}{2}\|\overrightarrow{BA}\|}$$

L'ensemble des points M est le **cercle de centre G et de rayon $R = \frac{1}{2}BA$.**

Corrigé Exercice 4

$3MA^2 + 6MB^2 = k$, avec $3 + 6 = 9 \neq 0$: $G = \text{bar}$

A	B
3	6

existe.

$$3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + 6(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 = k$$

$$3MG^2 + 6\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GA} + 3GA^2 + 6MG^2 + 12\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GB} + 6GB^2 = k$$

$$9MG^2 + 3GA^2 + 6GB^2 + 2\overrightarrow{MG}\cdot(3\overrightarrow{GA} + 6\overrightarrow{GB}) = k \implies 9MG^2 + 3GA^2 + 6GB^2 = k$$

$$MG^2 = \rho, \qquad \rho = \frac{k - 3GA^2 - 6GB^2}{9}$$

- Si $\rho < 0$: E_k est l'ensemble vide.
- Si $\rho = 0$: $E_k = \{G\}$.
- Si $\rho > 0$: l'ensemble cherché est le **cercle de centre G et de rayon $R = \sqrt{\rho}$.**

Équation du type $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=k$

On introduit le point I milieu de $[AB]$: $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=k \iff (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})=k \iff (\overrightarrow{MI}-\tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{MI}+\tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB})=k$$

$$\overrightarrow{MI}^2-\tfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2=k \iff IM^2=k+\tfrac{1}{4}AB^2$$

On pose $\rho=k+\dfrac{1}{4}AB^2$, alors $IM^2=\rho$:

- Si $\rho<0$, l'ensemble $E_k=\varnothing$.
- Si $\rho>0$, l'ensemble E_k est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{\rho}$.
- Si $k=0$, on a $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$: l'ensemble cherché est le **cercle de centre I et de diamètre $[AB]$**.

Exercice 5 – réduire la somme

1) $\overrightarrow{u}=3\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}-4\overrightarrow{MC}+6\overrightarrow{MD}$

2) $\overrightarrow{v}=3\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}-4\overrightarrow{MC}+6\overrightarrow{MD}$

Corrigé

1) $3+5-4+6=10\neq 0$: $G=\text{bar}$

A	B	C	D
3	5	-4	6

existe, avec $3\overrightarrow{GA}+5\overrightarrow{GB}-4\overrightarrow{GC}+6\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{0}$.

$$\overrightarrow{u}=(3+5-4+6)\overrightarrow{MG}+3\overrightarrow{GA}+5\overrightarrow{GB}-4\overrightarrow{GC}+6\overrightarrow{GD}=10\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{0}$$

$$\boxed{\overrightarrow{u}=10\,\overrightarrow{MG}}$$

2) $3-5-4+6=0$: le système $\{(A,3);(B,-5);(C,-4);(D,6)\}$ n'admet pas de barycentre. En éliminant M par la relation de Chasles à partir du point B :

$$\overrightarrow{v}=3\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}-4\overrightarrow{MC}+6\overrightarrow{MD}=3\overrightarrow{BA}-4\overrightarrow{BC}+6\overrightarrow{BD}$$

Or $-4\overrightarrow{BC}+6\overrightarrow{BD}=4\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{BD}$, d'où

$$\boxed{\overrightarrow{v}=3\overrightarrow{BA}+4\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{BD}}$$

Exercice 6

Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

1) $\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|=16$

2) $\|6\overrightarrow{MA}-8\overrightarrow{MB}\|=\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\|$

3) $3MA^2+5MB^2+2MC^2=k$

Corrigé

1) $2+3-1=4\neq 0$ donc $G=\text{bar}\begin{array}{|c|c|c|}\hline A&B&C\\\hline 2&3&-1\\\hline\end{array}$ existe, avec $2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$.

$$2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MG}\iff \|4\overrightarrow{MG}\|=16\iff \|\overrightarrow{MG}\|=4$$

L'ensemble des points M est le **cercle de centre G et de rayon $R=4$**.

2) $6-8=-2\neq 0$ donc $G=\text{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline A&B\\\hline 6&-8\\\hline\end{array}$ existe, avec $6\overrightarrow{GA}-8\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$, et

$$6\overrightarrow{MA}-8\overrightarrow{MB}=-2\overrightarrow{MG}$$

$1+1=2\neq 0$ donc $G_1=\text{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline A&B\\\hline 1&1\\\hline\end{array}$ existe : G_1 est le milieu de $[AB]$, et $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MG_1}$.

$$\|-2\overrightarrow{MG}\|=\|2\overrightarrow{MG_1}\|\iff \|\overrightarrow{MG}\|=\|\overrightarrow{MG_1}\|$$

M appartient à la **médiatrice de $[GG_1]$**.

3) $3+5+2=10\neq 0$ donc $G=\text{bar}\begin{array}{|c|c|c|}\hline A&B&C\\\hline 3&5&2\\\hline\end{array}$ existe, avec $3\overrightarrow{GA}+5\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$.

$$3(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})^2+5(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})^2+2(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC})^2=k$$

$$10MG^2+3GA^2+5GB^2+2GC^2+2\overrightarrow{MG}\cdot\underbrace{(3\overrightarrow{GA}+5\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC})}_{=\overrightarrow{0}}=k$$

$$MG^2=\rho,\qquad \rho=\frac{k-(3GA^2+5GB^2+2GC^2)}{10}$$

- Si $\rho<0$: $E_k=\varnothing$.
- Si $\rho=0$: $E_k=\{G\}$.
- Si $\rho>0$: E_k est le **cercle de centre G et de rayon $R=\sqrt{\rho}$**.

Exercice bilan : produit scalaire et fonction de Leibniz

Enoncé

Soit ABC un triangle tel que $AB = AC = 5$ et $BC = 6$.

1) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

2) Soit G le barycentre de $(A, 2)$, $(B, 3)$ et $(C, 3)$.

   a) Calculer AG.

   b) Soit $f(M)$ une fonction scalaire de Leibniz définie par $f(M) = 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB})$. Montrer que $f(M) = 4MG^2 + f(G)$.

   c) Calculer $f(A)$ et $f(G)$.

   d) Déterminer l'ensemble des points M tels que $f(M) = f(A)$.

Corrigé

1) D'après le théorème d'Al-Kashi dans le triangle ABC :

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \implies \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2\,AB \cdot AC}$$

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{25 + 25 - 36}{2 \times 5 \times 5} = \frac{14}{50} = \frac{7}{25}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 5 \times 5 \times \frac{7}{25}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 7}$$

2a) $2 + 3 + 3 = 8 \neq 0$, donc G existe et $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

$$2\overrightarrow{GA} + 3(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) + 3(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{0} \implies 8\overrightarrow{GA} = -3\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{8}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

$$AG^2 = \frac{9}{64}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 = \frac{9}{64}\left(AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right) = \frac{9}{64}(25 + 25 + 14) = \frac{9}{64} \times 64 = 9$$

$$\boxed{AG = 3}$$

2b) En posant $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}$:

$$\begin{aligned} f(M) &= 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) \cdot (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) \cdot \big((\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})\big) \\ &= 2MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} \\ &\quad + 2MG^2 + \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GC} \\ &= 4MG^2 + \overrightarrow{MG} \cdot (3\overrightarrow{GC} + 3\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GA}) + 2\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GA} \cdot (\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) \\ &= 4MG^2 + \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{0} + 2\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GA} \cdot (\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) \end{aligned}$$

En prenant $M = G$ dans cette dernière expression on retrouve $f(G) = 2\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GA} \cdot (\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$, donc

$$\boxed{f(M) = 4MG^2 + f(G)}$$

2c) $f(A) = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA} \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{0} = 2 \times 7$

$$\boxed{f(A) = 14}$$

En prenant $M = A$ dans $f(M) = 4MG^2 + f(G)$: $f(A) = 4AG^2 + f(G) \Longrightarrow f(G) = f(A) - 4AG^2 = 14 - 4 \times 9$

$$\boxed{f(G) = -22}$$

2d) $f(M) = f(A) \Longleftrightarrow 4MG^2 + f(G) = f(A) \Longleftrightarrow 4MG^2 = f(A) - f(G) = 14 - (-22) = 36$

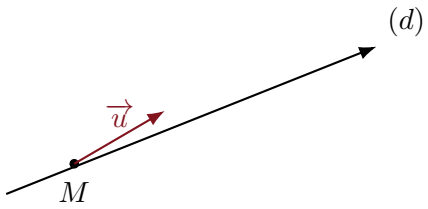
$$MG^2 = 9 \implies MG = 3$$

L'ensemble des points M est le **cercle de centre G et de rayon $R = 3$.**

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE DANS L'ESPACE

Caractérisation vectorielle d'une droite

Une droite est définie par un point et un vecteur directeur non nul.



Propriété

M appartient à la droite (d) passant par A si et seulement s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$.

Caractérisation dans l'espace

Soit $A(x_A, y_A, z_A)$, $\vec{u}(a, b, c)$ et $M(x, y, z)$ tel que $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$:

$$\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x - x_A = ka \\ y - y_A = kb \\ z - z_A = kc \end{cases} \iff \begin{cases} x = ka + x_A \\ y = kb + y_A \\ z = kc + z_A \end{cases}$$

Ce dernier système est appelé **équation paramétrique** de la droite (d) dans l'espace.

Exemple

Dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on donne $A(3, 4, 5)$ et $B(1, -2, 3)$.

1) Déterminer un vecteur directeur de (AB).

2) Déterminer l'équation paramétrique de (AB).

Corrigé

1) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (AB) :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 - 3 \\ -2 - 4 \\ 3 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2) Soit $M(x, y, z)$ tel que $M \in (AB)$, donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$:

$$\begin{pmatrix} x - 3 \\ y - 4 \\ z - 5 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = 3 - 2k \\ y = 4 - 6k \\ z = 5 - 2k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}$$

Équation paramétrique de la droite (AB).

Le produit scalaire

Définition

Le produit scalaire est le produit de deux vecteurs entre eux :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

Dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, avec $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, on a

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = xx' + yy' + zz' \qquad \text{et} \qquad \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Exemple

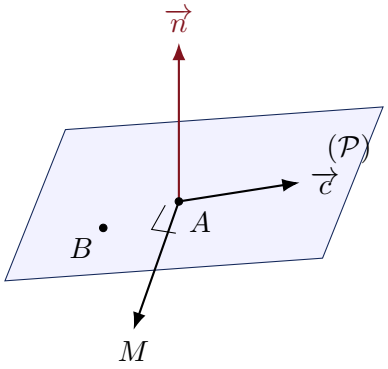
$\overrightarrow{AB}(-2, -6, -2)$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{44} = \sqrt{4 \times 11} = 2\sqrt{11}$$

Propriété

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits **orthogonaux** si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Équation d'un plan dans l'espace



$\overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$: on dit que $\vec{n}$ est un **vecteur normal** au plan $(\mathcal{P})$. Avec $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $M(x, y, z)$, $A(x_A, y_A, z_A)$, on a $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = \vec{0}$:

$$\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \implies a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

$$ax + by + cz + (-ax_A - by_A - cz_A) = 0 \implies ax + by + cz + d = 0$$

$$\boxed{(\mathcal{P}) : \ ax + by + cz + d = 0}$$

Exemple

Déterminer l'équation d'un plan $(\mathcal{P})$ de vecteur normal $\vec{n}(2, -3, -1)$ passant par $A(\sqrt{2}, -2, 5)$.

Corrigé

Soit $M(x, y, z)$ tel que $M \in (\mathcal{P})$ et $A \in (\mathcal{P})$, donc $\overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$, ainsi $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$:

$$\begin{pmatrix} x - \sqrt{2} \\ y + 2 \\ z - 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$2(x - \sqrt{2}) - 3(y + 2) - 1(z - 5) = 0 \implies 2x - 2\sqrt{2} - 3y - 6 - z + 5 = 0$$

$$\boxed{(\mathcal{P}) : \ 2x - 3y - z - 2\sqrt{2} - 1 = 0}$$

Le produit vectoriel

Déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1(4) - 2(3) = 4 - 6 = -2$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}$$

Exemple

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 4 & 6 & 0 \\ -3 & 1 & -3 \end{vmatrix}$.

Corrigé

$$D = 1\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - 9\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D = 1(-18 - 0) - 9(-12 - 0) + 2(4 + 18) = -18 + 108 + 44$$

$$\boxed{D = 134}$$

Exercice 7 – calculer les déterminants suivants

$$1)\ D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -9 & 18 \end{vmatrix} \qquad 2)\ \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 6 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} \qquad \delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 3 \\ -2 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

Corrigé

$$D = 1\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -9 & 18 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 18 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -9 \end{vmatrix} = 1(-18 + 36) - 4(36 - 0) - 7(-18 - 0)$$

$$D = 18 - 144 + 126 \implies \boxed{D = 0}$$

$$\Delta = 2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2(-3 - 5) + 1(18 - 4) - 2(30 + 4)$$

$$\Delta = 2(-8) + 14 - 2(34) = -16 + 14 - 68 \implies \boxed{\Delta = -70}$$

$$\delta = 3\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 3(3 - 21) - 2(4 + 6) - 1(28 + 6)$$

$$\delta = 3(-18) - 2(10) - 34 = -54 - 20 - 34 \implies \boxed{\delta = -108}$$

Le produit vectoriel

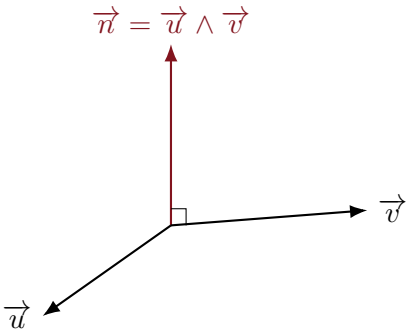
Dans une base orthonormée directe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, le produit vectoriel de $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ est

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = \vec{\imath}\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} - \vec{\jmath}\begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{\imath}(yz' - y'z) - \vec{\jmath}(xz' - x'z) + \vec{k}(xy' - x'y)$$

soit encore

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$



Exercice 8

Dans la base orthonormée directe $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$: $\overrightarrow{u}(2,1,-1)$, $\overrightarrow{v}(-3,4,1)$, $A(1,0,0)$, $B(1,1,1)$ et $C(2,-1,3)$.

1) Calculer $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$.

2) Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

3) Calculer $\|\overrightarrow{AB}\|$ et $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$.

Corrigé

1)

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\imath} & \overrightarrow{\jmath} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \overrightarrow{\imath}(1+4) - \overrightarrow{\jmath}(2-3) + \overrightarrow{k}(8+3)$$

$$\boxed{\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = 5\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath} + 11\overrightarrow{k}}$$

2) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\imath} & \overrightarrow{\jmath} & \overrightarrow{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \overrightarrow{\imath}(3+1) - \overrightarrow{\jmath}(0-1) + \overrightarrow{k}(0-1)$$

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath} - \overrightarrow{k}}$$

3)

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

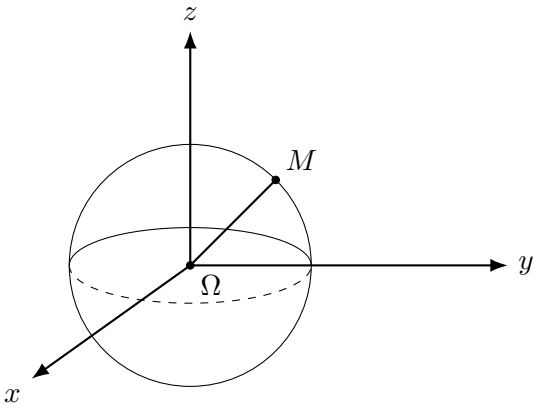
$$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{4^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}$$

Aires et volume

Propriété

- L'aire du parallélogramme est égale à la norme du produit vectoriel formé par 2 vecteurs : pour $ABCD$, $\mathcal{A} = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$.
- L'aire du triangle ABC : $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$.
- Le volume du tétraèdre $ABCD$: $V = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}\right|$ (u.v. : unité de volume).

La sphère



Définition

On appelle sphère $(\mathcal{S})$ de centre $\Omega(a,b,c)$ et de rayon R l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace situés à la distance R du centre Ω :

$$\Omega M^2 = R^2 \qquad \text{avec} \qquad \overrightarrow{\Omega M}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{pmatrix}$$

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2} \qquad \text{(équation de la sphère)}$$

En développant, on obtient : $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$.

Exemple

Déterminer le centre et le rayon de la sphère $(\mathcal{S})$: $x^2+y^2+z^2-6x-2y+4z+10=0$.

Corrigé

$$x^2-6x+y^2-2y+z^2+4z+10=0$$
$$(x-3)^2-9+(y-1)^2-1+(z+2)^2-4+10=0$$
$$(x-3)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=4=2^2$$

La sphère a pour **centre** $\Omega(3,1,-2)$ **et rayon** $R=2$.

Exercices d'application

Ex9

Dans la base orthonormée directe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$: $A(3,-2,2)$, $B(6,1,5)$, $C(6,-2,-1)$.

1) À l'aide du produit scalaire, démontrer que ABC est rectangle en A.

2) Déterminer une équation du plan de vecteur normal $\overrightarrow{AC}$ passant par A.

Corrigé Ex9

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6-3\\1+2\\5-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6-3\\-2+2\\-1-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$$

1)

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3\times 3+3\times 0+3\times(-3)=9+0-9=0$$

Donc $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$: le triangle ABC est **rectangle en** A.

2) Le plan $(\mathcal{P})$ a pour vecteur normal $\vec{n}=\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$ et passe par $A(3,-2,2)$:

$$3(x-3)+0(y+2)-3(z-2)=0 \implies 3x-9-3z+6=0 \implies 3x-3z-3=0$$

$$\boxed{(\mathcal{P}):\ x-z-1=0}$$

Ex10

Déterminer une équation paramétrique de (AC) avec $A(1,2,1)$ et $C(-1,0,2)$.

Ex11

$\vec{u}(2,-2,1)$ et $\vec{v}(1,5,1)$.

1) Déterminer $\vec{u}\wedge\vec{v}$.

2) Déterminer $\vec{v}\wedge\vec{u}$.

3) Commentaire.

Corrigé Ex11

1)

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{\imath}&\vec{\jmath}&\vec{k}\\2&-2&1\\1&5&1\end{vmatrix}=\vec{\imath}(-2-5)-\vec{\jmath}(2-1)+\vec{k}(10+2)$$

$$\boxed{\vec{u}\wedge\vec{v}=(-7,-1,12)}$$

2)

$$\vec{v}\wedge\vec{u}=\begin{vmatrix}\vec{\imath}&\vec{\jmath}&\vec{k}\\1&5&1\\2&-2&1\end{vmatrix}=\vec{\imath}(5+2)-\vec{\jmath}(1-2)+\vec{k}(-2-10)$$

$$\boxed{\vec{v}\wedge\vec{u}=(7,1,-12)}$$

3) Commentaire : on constate que $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$. Le produit vectoriel est **anti-symétrique** (anticommutatif) : pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u} = -(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$.

Ex12

Déterminer l'équation de la sphère de diamètre $[AB]$ avec $A(1,-1,2)$ et $B(0,2,-2)$.

Corrigé Ex12

Le centre de la sphère est le milieu Ω de $[AB]$:

$$\Omega\left(\frac{1+0}{2}, \frac{-1+2}{2}, \frac{2-2}{2}\right) = \Omega\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

Le rayon est $R = \dfrac{AB}{2}$, avec $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\3\\-4\end{pmatrix}$ donc $AB = \sqrt{(-1)^2+3^2+(-4)^2} = \sqrt{26}$, d'où $R = \dfrac{\sqrt{26}}{2}$.

Équivalent, on peut utiliser $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ (cercle/sphère de diamètre $[AB]$) :

$$(x-1)(x-0) + (y+1)(y-2) + (z-2)(z+2) = 0$$

$$x^2 - x + y^2 - y - 2 + z^2 - 4 = 0$$

$$\boxed{(\mathcal{S}) :\ x^2 + y^2 + z^2 - x - y - 6 = 0}$$

On vérifie : $(x-\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{1}{2})^2 + z^2 = 6 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \dfrac{13}{2}$, soit $R = \sqrt{\dfrac{13}{2}} = \dfrac{\sqrt{26}}{2}$, ce qui confirme le résultat précédent.

Ex13

Déterminer l'intersection des plans $(\mathcal{P}_1)$, $(\mathcal{P}_2)$ et $(\mathcal{P}_3)$:

$$(\mathcal{P}_1) :\ x + 3y - 2z = 10 \qquad (\mathcal{P}_2) :\ 2x - 4y + 5z = -8 \qquad (\mathcal{P}_3) :\ 3x - y + 2z = 4$$

Corrigé Ex13

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 10 & (1) \\ 2x - 4y + 5z = -8 & (2) \\ 3x - y + 2z = 4 & (3) \end{cases}$$

Éliminons x entre (1) et (2) : $2 \times (1) - (2)$ donne

$$(2x + 6y - 4z) - (2x - 4y + 5z) = 20 - (-8) \implies 10y - 9z = 28 \qquad (4)$$

Éliminons x entre (1) et (3) : $3 \times (1) - (3)$ donne

$$(3x + 9y - 6z) - (3x - y + 2z) = 30 - 4 \implies 10y - 8z = 26 \qquad (5)$$

(4) − (5) :

$$-z = 2 \implies z = -2$$

Dans (5) : $10y - 8(-2) = 26 \Rightarrow 10y + 16 = 26 \Rightarrow 10y = 10 \Rightarrow y = 1$.
Dans (1) : $x + 3(1) - 2(-2) = 10 \Rightarrow x + 3 + 4 = 10 \Rightarrow x = 3$.
Le point d'intersection est $\boxed{A(3,1,-2)}$.

Exercice bilan (QCM)

Partie A – restitution organisée de connaissances

On désigne par a, b, c, d quatre réels tels que le vecteur $\vec{n} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$ soit différent du vecteur nul. On appelle $(\mathcal{P})$ le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$.
Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan $(\mathcal{P})$, c'est-à-dire que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur $\overrightarrow{AB}$ où A et B sont deux points quelconques du plan $(\mathcal{P})$.

Partie B – QCM

On désigne par $(\mathcal{P})$ le plan d'équation cartésienne $2x - y + 5z = 1$ et par A et B les deux points du plan $(\mathcal{P})$ de coordonnées respectives $(1, 2, 0)$ et $(0, 3, 1)$.

1. Soit C, D, E les points de coordonnées respectives $(1, 1, -1)$, $(1, 4, 1)$, $(1, 5, 1)$.

a. Les points A, B, C définissent le plan $(\mathcal{P})$.

b. Les points A, B, D définissent le plan $(\mathcal{P})$.

c. Les points A, B, E définissent le plan $(\mathcal{P})$.

2. La droite (D) est définie par la représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 2 + t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

a. La droite (D) est perpendiculaire au plan $(\mathcal{P})$.

b. La droite (D) est strictement parallèle au plan $(\mathcal{P})$.

c. La droite (D) est incluse dans le plan $(\mathcal{P})$.

3. Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre Ω, de coordonnées $(2, 5, 1)$, et de rayon $\dfrac{1}{2}$. L'ensemble des points communs à la sphère $\mathcal{S}$ et au plan $(\mathcal{P})$ est :

a. vide.

b. constitué d'un seul point.

c. un cercle.

Thème 4
Étude des fonctions — Primitives

Contents

1 Dérivées **1**
- 1.1 Nombre dérivé et fonction dérivée . . . 1
- 1.2 Dérivée des fonctions usuelles . . . 2
- 1.3 Opérations sur les dérivées . . . 3
- 1.4 Dérivabilité . . . 4
- 1.5 Sens de variation . . . 4
- 1.6 Théorème des accroissements finis (T.A.F.) . . . 5
- 1.7 Théorème de la bijection . . . 6
  - 1.7.1 Dérivée d'une fonction réciproque en un point . . . 6
- 1.8 Problème 1 . . . 8
- 1.9 Problème 2 — Étude d'une suite récurrente . . . 10

2 Primitives **11**
- 2.1 Primitives usuelles . . . 11
- 2.2 Primitives de fonctions composées . . . 12

1. Dérivées

1.1 Nombre dérivé et fonction dérivée

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. On dit que f est dérivable en a si la limite suivante existe et est finie :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

$f'(a)$ est appelé le **nombre dérivé** de f en a.

Si f est dérivable en tout point de I, la fonction $x \mapsto f'(x)$ s'appelle la **fonction dérivée** de f.

$f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse a.

Équation de la tangente à la courbe de f en $x = a$:

$$T_a : \ y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Exemple. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) = 2x^3 + x$. Déterminons $f'(2)$.

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$
$$f(x) - f(2) = 2x^3 + x - \big(2(2)^3 + 2\big) = 2x^3 + x - 18$$
$$2x^3 + x - 18 = (x - 2)(2x^2 + 4x + 9)$$
$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 2x^2 + 4x + 9$$
$$f'(2) = \lim_{x \to 2}(2x^2 + 4x + 9) = 2(2)^2 + 4(2) + 9 = 25$$

$$\boxed{f'(2) = 25}$$

Exemple. Équation de la tangente en $x = 2$ de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) = \dfrac{4x^2}{x^2 + 1}$.

$$f(2) = \frac{4(2)^2}{(2)^2 + 1} = \frac{16}{5}$$

$$f(x) - f(2) = \frac{4x^2}{x^2 + 1} - \frac{16}{5} = \frac{20x^2 - 16(x^2 + 1)}{5(x^2 + 1)} = \frac{4x^2 - 16}{5(x^2 + 1)} = \frac{4(x - 2)(x + 2)}{5(x^2 + 1)}$$
$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{4}{5} \times \frac{x + 2}{x^2 + 1}$$
$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \left[\frac{4}{5} \times \frac{x + 2}{x^2 + 1}\right] = \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{25}$$

$$T_2 :\ y = \frac{16}{25}(x - 2) + \frac{16}{5} = \frac{16}{25}x - \frac{32}{25} + \frac{80}{25}$$

$$\boxed{T_2 :\ y = \frac{16}{25}x + \frac{48}{25}}$$

Rappels — limites usuelles

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Exercice 1

Équation de la tangente en $x = 0$ de la fonction f définie par $f(x) = 3\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

Exercice 2

Équation de la tangente en $x = 0$, puis en $x = \pi$, de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{2}\cos(2x - \pi)$.

Exercice 3

Équation de la tangente en $x = -1$ de la fonction $f(x) = x^3$ en utilisant le nombre dérivé.

Exercice 4

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

1) Déterminer le nombre dérivé de f en $x = -1$.

Exercice 5

Soit la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x$.

1) Déterminer $f'(2)$.

2) Déterminer l'équation de la tangente en $x = 2$.

1.2 Dérivée des fonctions usuelles

Fonction	Dérivée	Domaine
k (constante)	0	$k \in \mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{N}^*$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$x \in \mathbb{R}^*$
x^2	$2x$	$x \in \mathbb{R}$
x^3	$3x^2$	$x \in \mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \in \mathbb{R}_+^*$
$\sin x$	$\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$x \in \mathbb{R}$

Exemple.

$(x^4)' = 4x^3$ $\qquad$ $(3x^7)' = 21x^6$ $\qquad$ $\left(\dfrac{-5}{x^3}\right)' = \left(-5x^{-3}\right)' = 15x^{-4} = \dfrac{15}{x^4}$

$f(x) = 2\cos x \;\Rightarrow\; f'(x) = -2\sin x$ $\qquad$ $f(x) = -3\sin x \;\Rightarrow\; f'(x) = -3\cos x$

1.3 Opérations sur les dérivées

u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, k un réel non nul, $n \in \mathbb{Z}^*$.

$(u+v)' = u' + v'$ $\qquad$ $(ku)' = k\,u'$ $\qquad$ $(uv)' = u'v + uv'$ $\qquad$ $(u^n)' = n\,u'\,u^{n-1}$

$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}},\ u > 0$ $\qquad$ $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2},\ u \neq 0$ $\qquad$ $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2},\ v \neq 0$ $\qquad$ $(u \circ v)' = v' \times u'(v)$

$\big(\sin(u)\big)' = u'\cos(u)$ $\qquad$ $\big(\cos(u)\big)' = -u'\sin(u)$

Exemple.

$f(x) = \sin(3x)$ $\qquad$ $f'(x) = (3x)'\cos(3x) = 3\cos(3x)$

$g(x) = \cos(2x+1)$ $\qquad$ $g'(x) = -(2x+1)'\sin(2x+1) = -2\sin(2x+1)$

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ $\qquad$ $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$

$\left(\dfrac{1}{x^2-1}\right)' = -\dfrac{(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = -\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}$

$f(x) = x^2\sin x$ $\qquad$ $f'(x) = 2x\sin x + x^2\cos x$

$f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ $\qquad$ $f'(x) = \dfrac{2x(x-1) - 1\times(x^2+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$

$f(x) = \sqrt{x^2-1},\ x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$ $\qquad$ $f'(x) = \dfrac{(x^2-1)'}{2\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

Exercice 6 (calcul de dérivées)
Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 7x - 2$

2) $g(x) = -6x^3 + 2x - 8$

3) $h(x) = 5\sin x - 3\cos x$

4) $f(x) = (x+1)(x^2+1)$

5) $h(x) = x\sin x$

6) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

7) $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{x}$

8) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3 - 1}$

Exercice 7 (calcul de dérivées)

Calculer les dérivées des fonctions ci-dessous :

1) $f(x) = \dfrac{1}{2}\cos(2x - \pi)$

2) $f(x) = 3\sin\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{\pi}{2}\right)$

3) $f(x) = x^2\sin(2x)$

4) $f(x) = \dfrac{\cos(3x)}{x}$

5) $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$

6) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$

7) $f(x) = \cos(2x)\sin x + \sin(2x)\cos x$

8) $f(x) = \sqrt{x}\,(2x^2 - x)$

9) $f(x) = (2x-3)(1-x^3)$

1.4 Dérivabilité

Si une fonction f est dérivable en a, alors f est continue en a.
Attention : la réciproque est fausse.

Exemple. La fonction $f(x) = |x|$ est continue mais non dérivable en 0.

Si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$, alors f n'est pas dérivable en a, mais f admet en a une demi-tangente verticale.

1.5 Sens de variation

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si $f'(x) \geqslant 0$ sur I alors f est croissante sur I.
- Si $f'(x) \leqslant 0$ sur I alors f est décroissante sur I.
- Si $f'(x) = 0$ sur I alors f est constante sur I.

Exemple. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - x^3$.
f est une fonction polynôme, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3 - 3x^2 = 3(1 - x^2)$.
$f'(x) = 0 \iff 1 - x^2 = 0 \iff (1+x)(1-x) = 0 \iff x = -1$ ou $x = 1$.

Tableau de signe de $1 - x^2$:

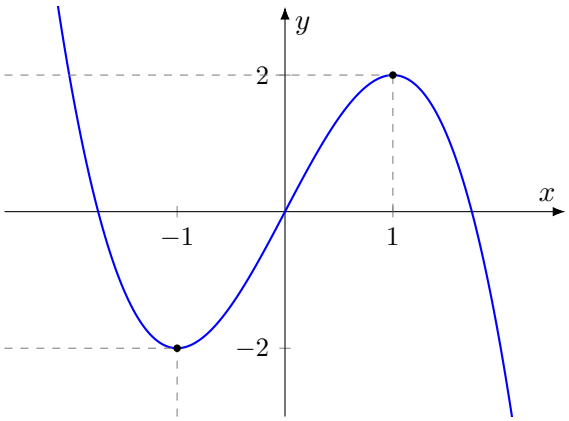
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1 - x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit que f est décroissante sur $]-\infty, -1]$ et sur $[1, +\infty[$, et que f est croissante sur $[-1, 1]$.

Tableau de variations : $f(-1) = 3(-1) - (-1)^3 = -2$ $\quad$ $f(1) = 3(1) - (1)^3 = 2$ $\quad$ $f(0) = 0$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	

Représentation graphique :



Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

1) Calculer $f'(x)$.

2) Déterminer les racines de $f'(x)$.

3) Étudier les variations de f.

4) Dresser le tableau de variations de f.

5) Construire la courbe représentative de f.

Exercice 9

Reprendre la même étude avec $f(x) = x^3 - 3x^2 + x$. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

1.6 Théorème des accroissements finis (T.A.F.)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe (au moins) un réel $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Inégalité des accroissements finis (I.A.F.)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. S'il existe deux réels m et M tels que $\forall x \in I,\ m \leqslant f'(x) \leqslant M$, alors

$$\forall a, b \in I \text{ avec } a \leqslant b, \qquad m(b - a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b - a).$$

S'il existe un réel $k > 0$ tel que $|f'(x)| \leqslant k$, alors

$$\forall a, b \in I, \qquad |f(b) - f(a)| \leqslant k\,|b - a|.$$

Exemple. Soit $f(x) = \sqrt{x}$ sur $I = [4; 9]$. $\forall x \in I,\ f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Pour $4 \leqslant x \leqslant 9$: $2 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 3$, donc $4 \leqslant 2\sqrt{x} \leqslant 6$, donc $\dfrac{1}{6} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \leqslant \dfrac{1}{4}$.

D'où $\dfrac{1}{6} \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{1}{4}$. D'après l'I.A.F., $\forall a, b \in I$ avec $a \leqslant b$:

$$\frac{1}{6}(b-a) \leqslant \sqrt{b} - \sqrt{a} \leqslant \frac{1}{4}(b-a).$$

△ *Ce théorème est très utile pour étudier des suites récurrentes et montrer que* $|u_{n+1} - \ell| \leqslant k\,|u_n - \ell|$.

Exemple. Soit $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Déterminons $c \in]0,2[$ donné par le T.A.F.

$f'(x) = 3x^2 - 3$; $f(0) = 1$; $f(2) = 3$. f est continue et dérivable sur $[0,2]$, donc il existe $c \in]0,2[$ tel que $f(2) - f(0) = (2-0)f'(c)$.

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{3-1}{2} = 1$$
$$3c^2 - 3 = 1 \iff c^2 = \frac{4}{3} \iff c = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Comme $c \in]0,2[$: $\boxed{c = \dfrac{2}{\sqrt{3}}}$.

Exercice 10

Soit la fonction $f(x) = x^3 - 3x$ définie sur $[-1;1]$.

1) Montrer que $|f'(x)| \leqslant 3$.

2) Montrer que $\forall x, y \in [-1,1],\ |f(x) - f(y)| \leqslant 3|x - y|$.

Exercice 11

Soit la fonction $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Déterminer un réel $c \in]1,4[$ donné par le T.A.F.

Exercice 12

Soit la fonction $f(x) = x^2 - 3x$. Montrer que $\forall x, y \in [-1,1],\ |f(x) - f(y)| \leqslant 6|x - y|$.

Exercice 13

Soit la fonction $f(x) = x^3 - 3x + 2$. En appliquant le T.A.F. sur $[0,2]$, déterminer une valeur de c.

Exercice 14

Soit la fonction $f(x) = \dfrac{(x^2+1)\sin x}{x-1}$.

1) Calculer $f'(x)$.

2) Calculer $f'(0)$.

3) On restreint l'étude de f sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right[$.

4) Calculer $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

5) En appliquant le T.A.F., montrer que $f'(c) = -5\sin\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

1.7 Théorème de la bijection

Soit f une fonction continue et strictement croissante (ou décroissante) sur un intervalle I, alors :

- f est bijective et réalise une bijection croissante (ou décroissante) de I sur l'intervalle $f(I)$.
- Si de plus il existe un réel $k \in f(I)$, alors l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution $x_0 \in I$.
- f admet une fonction réciproque f^{-1} définie de $f(I)$ vers I, de même sens de variation que f.

Exemple. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x - 1$. Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]0,1[$.

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $]0,1[\subset \mathbb{R}$.

$f'(x) = 3x^2 + 1$; $\forall x \in]0,1[$, $f'(x) > 0$, donc f réalise une bijection croissante de $]0,1[$ sur $f(]0,1[) =]f(0); f(1)[=]-1;1[$.

$0 \in]-1;1[$, d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]0,1[$.

1.7.1 Dérivée d'une fonction réciproque en un point

Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(b)\big)} = \frac{1}{f'(a)}.$$

$\triangle$ *Si $f'(a) = 0$ alors f^{-1} n'est pas dérivable au point $b = f(a)$. La courbe de f^{-1} admet une tangente verticale en ce point.*

Exemple. Soit $f(x) = 2x + 3$. Déterminons $(f^{-1})'(7)$.

1) On cherche a tel que $f(a) = 7$: $2a + 3 = 7 \Rightarrow a = 2$.

2) $f'(x) = 2$, d'où $f'(2) = 2$.

$$(f^{-1})'(7) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{2}.$$

Exemple. Soit $f(x) = x^3 + x$. Déterminons $(f^{-1})'(2)$.

f est une fonction polynôme donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$; f est bijective. $f'(x) = 3x^2 + 1$.

1) Déterminons a : $f(a) = 2 \iff a^3 + a = 2$. Pour $a = 1$: $1 + 1 = 2$ ✓, donc $a = 1$.

2) $f'(1) = 3(1)^2 + 1 = 4$, d'où $(f^{-1})'(2) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{4}$.

Exemple. Soit f une fonction bijective définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 2x$. Déterminons $(f^{-1})'(3)$.

1) Déterminons a tel que $f(a) = 3$: $a^3 + 2a = 3$. Pour $a = 1$: $1 + 2 = 3$ ✓, donc $a = 1$.

2) $f'(x) = 3x^2 + 2$, donc $f'(1) = 3(1)^2 + 2 = 5$, d'où $(f^{-1})'(3) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{5}$.

Exercice 15

Soit f une fonction bijective telle que $f(x) = x^3 + 2x + 1$. Déterminer $(f^{-1})'(4)$.

Exercice 16

Soit la fonction bijective définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. Déterminer $(f^{-1})'(8)$.

Exercice 17

Soit la fonction bijective $f(x) = \sin(x)$ sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$. Déterminer $(f^{-1})'\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

Exercice 18

Soit f une fonction bijective sur $I =]0; \sqrt{2}[$, définie par $f(x) = \dfrac{x^3}{4 - x^4}$. Calculer $(f^{-1})'\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

Exercice 19

Soit la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x \sin x}$, bijective sur $I =]0; \pi/2]$.

1) Montrer que f réalise une bijection de I sur $J = \left[\dfrac{2}{\pi}; +\infty\right[$.

2) Calculer $(f^{-1})'\left(\dfrac{2}{\pi}\right)$.

Exercice 20

Soit la fonction f définie sur $I = [-1; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x+2}{x^3 + 2x + 4}$, bijective.

1) Déterminer $J = f(I)$ après avoir justifié le sens de variation.

2) Calculer $(f^{-1})'(1)$.

1.8 Problème 1

On considère la fonction f définie pour $x \geqslant 0$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) Montrer que l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ a une unique solution dans l'intervalle $]0,1[$, que l'on notera α. Préciser la valeur de α.

2) Montrer que si x est un réel de l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2};1\right]$, alors $f(x)$ appartient aussi à l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2};1\right]$.

3) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[\dfrac{1}{2};1\right]$.

4) Démontrer que $\forall x \in \left[\dfrac{1}{2};1\right],\ |f'(x)| \leqslant \dfrac{4}{9}$.

5) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{4}{9}|u_n - \alpha|$.

6) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{4}{9}\right)^n$.

Solution :

1) $x^2 + x - 1 = 0$, $\Delta = 1 + 4 = 5$,

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1{,}618 \qquad x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}618.$$

On en déduit que $x_2 \in]0,1[$, donc $\boxed{\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}$. L'équation possède donc une unique solution dans $]0,1[$.

2) $\forall x \in [0,+\infty[$, f est dérivable et $f'(x) = \dfrac{-1}{(x+1)^2}$.

$\forall x \in [0,+\infty[,\ (x+1)^2 > 0$, donc $f'(x) < 0$: f est décroissante sur $[0,+\infty[$.

Pour $\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$, f est décroissante donc change le sens des inégalités : $f(1) \leqslant f(x) \leqslant f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, soit $\dfrac{1}{2} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{2}{3}$.

Comme $\dfrac{2}{3} < 1$, on a bien $f(x) \in \left[\dfrac{1}{2};1\right]$.

3) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[\dfrac{1}{2};1\right]$.

Initialisation : $n = 0$, $u_0 = 1 \in \left[\dfrac{1}{2};1\right]$ ✓.

Hérédité : Supposons $u_n \in \left[\dfrac{1}{2};1\right]$. D'après la question 2), $u_{n+1} = f(u_n) \in \left[\dfrac{1}{2};1\right]$.

La propriété est donc vraie au rang $n+1$; par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[\dfrac{1}{2};1\right]$.

4) $f'(x) = \dfrac{-1}{(x+1)^2}$. Pour $\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$: $\dfrac{3}{2} \leqslant x+1 \leqslant 2$, donc $\dfrac{9}{4} \leqslant (x+1)^2 \leqslant 4$.

En passant aux inverses : $\frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{(x+1)^2} \leqslant \frac{4}{9}$, donc $-\frac{4}{9} \leqslant f'(x) \leqslant -\frac{1}{4}$, ce qui équivaut à $|f'(x)| \leqslant \frac{4}{9}$.

5) On sait que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[\frac{1}{2};1\right]$ et $\alpha \in \left[\frac{1}{2};1\right]$. D'après l'I.A.F. : $\forall x \in \left[\frac{1}{2};1\right],\ |f'(x)| \leqslant \frac{4}{9}$, donc

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \frac{4}{9}|u_n - \alpha|.$$

Or $f(\alpha) = \alpha$ (car $f(x) = x \iff x^2 + x - 1 = 0$, dont l'unique solution sur $[0, +\infty[$ est α), et $u_{n+1} = f(u_n)$, donc

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{4}{9}|u_n - \alpha|.$$

6) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^n$.

Initialisation : $|u_0 - \alpha| = |1 - \alpha| = 1 - \alpha = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}382 < 1 = \left(\frac{4}{9}\right)^0$ ✓.

Hérédité : Supposons $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^n$. En multipliant par $\frac{4}{9}$:

$$\frac{4}{9}|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}.$$

Or $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{4}{9}|u_n - \alpha|$ (question 5), donc $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}$.

La propriété est vraie au rang $n+1$; par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^n$.

1.9 Problème 2 — Étude d'une suite récurrente

Partie A

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $I = \left[\frac{2}{3}; +\infty\right[$ par $f(x) = \sqrt{3x-2}$.

1) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle I.

2) Déterminer les points fixes de f (les solutions de l'équation $f(x) = x$).

3) Étudier le signe de $f(x) - x$ sur $[2, +\infty[$. En déduire la position relative de la courbe de f par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \geqslant 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n - 2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 2$.

2) a) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

   b) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ.

Partie C

1) Calculer $f'(x)$ et montrer que $|f'(x)| \leqslant \frac{3}{4}$.

2) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_{n+1} - 2| \leqslant \frac{3}{4}|u_n - 2|.$$

3) En déduire par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$|u_n - 2| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n \times |u_0 - 2|.$$

2. Primitives

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que la fonction F est une **primitive** de la fonction f si $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$.

Les primitives de f sont les fonctions de la forme $F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Il existe une unique primitive vérifiant $F(x_0) = y_0$.

On note aussi $\int f(x)\,dx = F(x) + C$; $\int$ est l'intégrale sans borne.

Exemple. Vérifions que la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, $F(x) = \sqrt{x^2+1}$, est une primitive de $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

$$F(x) = (x^2+1)^{1/2}$$
$$F'(x) = \frac{1}{2}(2x)(x^2+1)^{-1/2} = x(x^2+1)^{-1/2} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = f(x)$$

donc F est une primitive de f.

Exemple. Vérifions que la fonction dérivable $F(x) = \cos x + x \sin x$ est une primitive de $f(x) = x \cos x$.

$$F'(x) = -\sin x + \sin x + x\cos x = x\cos x = f(x)$$

donc F est une primitive de f.

Exercice 21 (vérifier une primitive)

Vérifier si la fonction F est une primitive de f :

1) $F(x) = x - \dfrac{1}{x}$; $f(x) = \dfrac{1+x^2}{x^2}$

2) $F(x) = \sin x - x\cos x$; $f(x) = x \sin x$

3) $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + \sin x$; $f(x) = x + \cos x$

4) $F(x) = x^3 + 2x - 5$; $f(x) = 3x^2 + 2$

5) $F(x) = \dfrac{2}{3}x^{3/2} + 4x$; $f(x) = \sqrt{x} + 4$

6) $F(x) = 2\sin x - 3\cos x$; $f(x) = 2\cos x + 3\sin x$

2.1 Primitives usuelles

Fonction	Primitive
0	k, k constante
x^n	$\dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + k$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
$\cos(ax+b)$	$\dfrac{1}{a}\sin(ax+b) + k$
$\sin(ax+b)$	$-\dfrac{1}{a}\cos(ax+b) + k$

2.2 Primitives de fonctions composées

Fonction	Primitive
$u'u^n,\ n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$
$u'\cos(u)$	$\sin(u)$
$u'\sin(u)$	$-\cos(u)$
$u'+v'$	$u+v$
$k \times u'$	$k \times u$

Exemple. Primitive de la fonction $f(x) = 2x(x^2+1)^2$. On pose $u(x) = x^2+1$, $u'(x) = 2x$; f est de la forme $u'u^2$.

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}(x^2+1)^3 + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Déterminons la primitive de f telle que $F(0) = 1$:

$$F(0) = \frac{1}{3}(0^2+1)^3 + C = 1 \Rightarrow C = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{3}(x^2+1)^3 + \frac{2}{3}}$$

Exercice 22

1) Déterminer la primitive de la fonction $f(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$ sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer la primitive de f vérifiant $F(0) = 1$.

Exemple. Primitive de $f(x) = x^2\sin(x^3)$. On pose $u = x^3$, $u' = 3x^2$; $f = \dfrac{1}{3}u'\sin(u)$.

$$\int x^2\sin(x^3)\,dx = -\frac{1}{3}\cos(x^3) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exemple. Primitive de $f(x) = \sin^2(x)\cos(x)$. On pose $u = \sin(x)$, $u' = \cos(x)$; $f = u'u^2$.

$$F(x) = \frac{1}{3}\sin^3(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 23

Déterminer :

$$\int \cos(2x)\,dx \qquad \int \sin(3x)\,dx \qquad \int \cos(4x-5)\,dx \qquad \int (8x-11)^2\,dx$$

Exemple.

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + k,\ k \in \mathbb{R} \qquad \int \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2}\,dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + k = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + k,\ k \in \mathbb{R}$$

Exemple. Primitive $F(x)$ de $f(x) = 2x(x^2-2)^5$. On pose $u = x^2-2$, $u' = 2x$; $f = u'u^5$.

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{6}(x^2-2)^6 + k}$$

Exemple. Déterminons $\int (5x^3 + 7x^2)\,dx$.

$$\int (5x^3 + 7x^2)\,dx = 5\int x^3\,dx + 7\int x^2\,dx = 5\left(\frac{x^4}{4}\right) + 7\left(\frac{x^3}{3}\right) + k$$

$$\boxed{\int (5x^3 + 7x^2)\,dx = \frac{5}{4}x^4 + \frac{7}{3}x^3 + k,\ k \in \mathbb{R}}$$

Exemple. $F(x) = \int 2x\,dx$. Déterminons $F(x)$ tel que $F(2) = 5$.

$$F(x) = 2\int x\,dx = x^2 + k \qquad F(2) = 4 + k = 5 \Rightarrow k = 1$$

$$\boxed{F(x) = x^2 + 1}$$

Exemple. $v(t)$ est la vitesse d'un mobile, $v(t) = 20t + 55$, avec $v(t) = f'(t)$.

$$f(t) = \int v(t)\,dt = \int (20t + 55)\,dt = 10t^2 + 55t + k,\ k \in \mathbb{R}$$

Déterminons k pour $f(1) = 0$: $10 + 55 + k = 0 \Rightarrow k = -65$.

$$\boxed{f(t) = 10t^2 + 55t - 65}$$

Exemple.

$$\int \cos(2x + 3)\,dx = \frac{1}{2}\int 2\cos(2x + 3)\,dx = \frac{1}{2}\sin(2x + 3) + k,\ k \in \mathbb{R}$$

Exemple. Vérifions que $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x$ est une primitive de $f(x) = x^2 + 2x + 3$.
F est dérivable sur $\mathbb{R}$: $F'(x) = x^2 + 2x + 3 = f(x)$, donc F est une primitive de f.

Exercice 24

Déterminer la primitive de f vérifiant $F(a) = b$:

1) $f(x) = x^3$, $F(-1) = 2$
2) $f(x) = \sin x$, $F(-\pi) = -1$
3) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $F\left(\dfrac{1}{2}\right) = -12$
4) $f(x) = 2\cos x$, $F\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$
5) $f(x) = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{7}\right)$, $F\left(\dfrac{2\pi}{7}\right) = -1$
6) $f(x) = 1 - x^2$, $F(-3) = 0$
7) $f(x) = \sin(2x) + \sqrt{3}\,x$, $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

Exercice 25

Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 2x^2 + x + 1 + \dfrac{1}{x^2}$.

1) Déterminer les fonctions primitives F de f sur $]0, +\infty[$.
2) Déterminer $F(x)$ tel que $F(1) = 3$.

Exemple. Soit $p(x) = (2x+5)^2$. On pose $u = 2x+5$, $u' = 2$: $p = \dfrac{1}{2}\,u'u^2$.

$$P(x) = \frac{1}{6}(2x+5)^3 + k,\ k \in \mathbb{R}.$$

Vérification : $P'(x) = \dfrac{1}{6} \times 3 \times 2 \times (2x+5)^2 = (2x+5)^2 = p(x)$ ✓

Exemple.

$$\int \frac{2}{x^3}\,dx = 2\int x^{-3}\,dx = 2 \times \frac{1}{-2}x^{-2} + k = -\frac{1}{x^2} + k,\ k \in \mathbb{R}.$$

Exercice 26

Calculer :

1) $\displaystyle\int (6\cos x - 7\sin x)\,dx$

2) $\displaystyle\int (3x^4 - 5x^2 + 8x - 6)\,dx$

3) $\displaystyle\int \left(x - \frac{6}{x^2}\right)dx$

4) $\displaystyle\int x^7\,dx$

5) $\displaystyle\int (x^6 - 4\sin(2x))\,dx$

6) $\displaystyle\int \left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)dx$

7) $\displaystyle\int \frac{1}{(7-3x)^5}\,dx$

Exercice 27

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-1)^4$. Déterminer la primitive F vérifiant $F(1) = 2$.

Exercice 28

Déterminer F tel que $F(0) = 3$:

1) $F(x) = \displaystyle\int 2x(3x^2+1)^4\,dx$

2) $F(x) = \displaystyle\int \frac{2x-3}{\sqrt{x^2-3x+5}}\,dx$, $F(1) = 2$

Exercice 29

Soit F la fonction telle que $F(x) = \displaystyle\int (3x^2 - 6x + 2)\,dx$ et $F(2) = 5$.

1) Déterminer $F(x)$.

2) Étudier les variations de F.

3) Déterminer une équation de la tangente à la courbe de F en $x = 1$.

Exercice 30

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

1) Dresser le tableau de variations de g.

2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$, avec $x \in \mathbb{R}$, admet une unique solution α. Donner un encadrement de α à 10^{-1} près.

3) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

4) Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1-x}{x^3+1}$. Calculer $f'(x)$ puis exprimer $f'(x)$ en fonction de g pour $x\in]-1,+\infty[$.

5) En déduire le signe de f', puis les variations de f sur $]-1,+\infty[$.

Solution :

1) $g'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$. $g'(x)=0 \iff x=0$ ou $x=1$.

Le trinôme $6x(x-1)$ (parabole tournée vers le haut, racines 0 et 1) est positif à l'extérieur de $[0,1]$ et négatif à l'intérieur.

$$g(0)=-1 \qquad g(1)=2-3-1=-2 \qquad \lim_{x\to-\infty} g(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

2) Sur $]-\infty,0]$, g est croissante et $g(x)\leqslant g(0)=-1<0$: pas de racine. Sur $[0,1]$, g est décroissante et $g(x)\leqslant g(0)=-1<0$: pas de racine. Sur $[1,+\infty[$, g est continue, strictement croissante, $g(1)=-2$ et $\lim_{+\infty} g=+\infty$; $0\in]-2,+\infty[=g([1,+\infty[)$, donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in]1,+\infty[$, et c'est l'unique solution sur $\mathbb{R}$.

Encadrement : $g(1{,}6)=8{,}192-7{,}68-1=-0{,}488$ et $g(1{,}7)=9{,}826-8{,}67-1=0{,}156$.

$$\boxed{1{,}6<\alpha<1{,}7}$$

3) g est strictement croissante sur $]1,+\infty[$ et négative sur $]-\infty,1]$, donc :

$$g(x)<0 \text{ sur }]-\infty,\alpha[, \qquad g(\alpha)=0, \qquad g(x)>0 \text{ sur }]\alpha,+\infty[.$$

4) $f(x)=\dfrac{1-x}{x^3+1}$ sur $]-1,+\infty[$ (donc $x^3+1\neq 0$).

$$f'(x)=\frac{(1-x)'(x^3+1)-(1-x)(x^3+1)'}{(x^3+1)^2}=\frac{-(x^3+1)-3x^2(1-x)}{(x^3+1)^2}$$
$$=\frac{-x^3-1-3x^2+3x^3}{(x^3+1)^2}=\frac{2x^3-3x^2-1}{(x^3+1)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{g(x)}{(x^3+1)^2}}$$

5) $(x^3+1)^2>0$ pour tout $x\in]-1,+\infty[$, donc $f'(x)$ a le signe de $g(x)$:

$$f'(x)<0 \text{ sur }]-1,\alpha[, \qquad f'(\alpha)=0, \qquad f'(x)>0 \text{ sur }]\alpha,+\infty[.$$

Ainsi f est décroissante sur $]-1,\alpha]$ et croissante sur $[\alpha,+\infty[$; f admet un minimum en $x=\alpha$.

Exercice 31

Soit f la fonction définie sur $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x^3+1}.$$

1) Justifier que f est dérivable sur D_f et calculer $f'(x)$.

2) On considère la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = -x^3 - 3x + 2$.

   a) Justifier que P est dérivable sur $\mathbb{R}$ et étudier les variations de P sur $\mathbb{R}$.

   b) En déduire que l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, sur $\mathbb{R}$.

   c) En déduire le signe de $P(x)$ sur $\mathbb{R}$.

   d) Démontrer que $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$.

   e) Démontrer que $f(\alpha) = \dfrac{2}{3\alpha}$, puis encadrer $f(\alpha)$.

3) En déduire le signe de $f'(x)$ et les variations de f sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Solution :

1) f est le quotient de deux fonctions polynômes, dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)'(x^3+1) - (x^2+1)(x^3+1)'}{(x^3+1)^2} = \frac{2x(x^3+1) - 3x^2(x^2+1)}{(x^3+1)^2}$$
$$= \frac{2x^4 + 2x - 3x^4 - 3x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{-x^4 - 3x^2 + 2x}{(x^3+1)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{x\,(-x^3 - 3x + 2)}{(x^3+1)^2} = \frac{x\,P(x)}{(x^3+1)^2}}$$

2) a) P est une fonction polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$P'(x) = -3x^2 - 3 = -3(x^2+1)$$

$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 > 0$, donc $P'(x) < 0$: P est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

b) P réalise une bijection décroissante de $\mathbb{R}$ sur $\left]\lim\limits_{x\to+\infty} P(x), \lim\limits_{x\to-\infty} P(x)\right[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

$0 \in \mathbb{R}$, donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

c) P étant strictement décroissante : si $x < \alpha$ alors $P(x) > P(\alpha) = 0$; si $x > \alpha$ alors $P(x) < P(\alpha) = 0$.

$$P(x) > 0 \text{ sur }]-\infty, \alpha[, \qquad P(x) < 0 \text{ sur }]\alpha, +\infty[.$$

d) $P(0{,}5) = -0{,}125 - 1{,}5 + 2 = 0{,}375 > 0$ et $P(0{,}6) = -0{,}216 - 1{,}8 + 2 = -0{,}016 < 0$.
Comme $P(0{,}6) < P(\alpha) = 0 < P(0{,}5)$ et que P est décroissante, on en déduit

$$\boxed{0{,}5 < \alpha < 0{,}6}$$

e) $P(\alpha) = 0 \iff -\alpha^3 - 3\alpha + 2 = 0 \iff \alpha^3 + 3\alpha - 2 = 0 \iff \alpha^3 = 2 - 3\alpha$.
Donc $\alpha^3 + 1 = 3 - 3\alpha = 3(1 - \alpha)$.
En divisant $\alpha^3 + 3\alpha - 2 = 0$ par α (avec $\alpha \neq 0$) : $\alpha^2 + 3 - \dfrac{2}{\alpha} = 0$, soit $\alpha^2 = \dfrac{2}{\alpha} - 3$, d'où

$$\alpha^2 + 1 = \frac{2}{\alpha} - 2 = \frac{2(1-\alpha)}{\alpha}.$$

Ainsi

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^2+1}{\alpha^3+1} = \frac{\dfrac{2(1-\alpha)}{\alpha}}{3(1-\alpha)} = \frac{2}{3\alpha} \qquad (\alpha \neq 1).$$

Encadrement : de $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$, on tire $1{,}5 < 3\alpha < 1{,}8$, donc $\dfrac{1}{1{,}8} < \dfrac{1}{3\alpha} < \dfrac{1}{1{,}5}$, soit

$$\boxed{\frac{10}{9} < f(\alpha) < \frac{4}{3}}$$

3) $f'(x) = \dfrac{x\,P(x)}{(x^3+1)^2}$; le dénominateur est strictement positif sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, donc $f'(x)$ a le signe de $x\,P(x)$.

Comme $0 < \alpha < 1$, on obtient le tableau de signes suivant sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$:

x	$-\infty$		-1		0		α		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$P(x)$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi f est décroissante sur $]-\infty,-1[$ et sur $]-1,0]$, croissante sur $[0,\alpha]$, puis décroissante sur $[\alpha,+\infty[$; f admet un minimum local en $x=0$ et un maximum local en $x=\alpha$.

Exercice 32

Soit f l'application définie par $f : A \longrightarrow B,\ x \longmapsto \dfrac{x-1}{x+1}$.

1) Déterminer A.

2) Déterminer B pour que f soit surjective.

3) Démontrer que f est injective.

Thème 5 : Nombres complexes

Forme algébrique – Équations et trigonométrie

Sommaire

1 Nombres complexes **2**
- 1.1 Définition . . . 2
- 1.2 Opérations dans $\mathbb{C}$ . . . 2
- 1.3 Représentation graphique . . . 3
- 1.4 Module et argument d'un nombre complexe . . . 3
- 1.5 Forme exponentielle d'un nombre complexe . . . 5
- 1.6 Affixe d'un vecteur . . . 5
- 1.7 Angle de deux vecteurs . . . 6

2 Équations dans $\mathbb{C}$ **6**
- 2.1 Équation du second degré . . . 6
- 2.2 Racines carrées d'un nombre complexe . . . 7

3 Factorisation d'un polynôme **7**

4 Lignes de niveau **8**

5 Exercices complémentaires **10**

6 Devoir de consolidation **12**

1 Nombres complexes

1.1 Définition

Définition. L'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, est l'ensemble tel que :
- Il existe un nombre i tel que $i^2 = -1$, ou $i = \sqrt{-1}$;
- les nombres de l'ensemble $\mathbb{C}$ s'écrivent $z = x + iy$, où x et y sont des réels ;
- les règles d'addition et de multiplication dans $\mathbb{R}$ sont les mêmes dans $\mathbb{C}$.

Exemples.

$$i^3 = i^2 \times i = -1 \times i = -i \qquad i^4 = i^2 \times i^2 = (-1) \times (-1) = 1 \qquad i^5 = i^3 \times i^2 = -i \times (-1) = i$$

Définition. $z = x + iy$ est appelée **forme algébrique** du nombre complexe z.
- x est la **partie réelle** de z, notée $\mathrm{Re}(z)$;
- y est la **partie imaginaire** de z, notée $\mathrm{Im}(z)$.

Exemples.
- $z = -1 + i\sqrt{3}$: on a $x = -1$ et $y = \sqrt{3}$.
- $z = -2i$: on a $x = 0$, $y = -2$; z est appelé **imaginaire pur** (car $\mathrm{Re}(z) = 0$).

Si $z = x + iy$ et $z' = a + ib$, alors

$$z = z' \iff \begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$$

1.2 Opérations dans $\mathbb{C}$

Soient $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$.

Somme.

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

Produit.

$$z_1 \times z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + i^2y_1y_2$$

$$z_1 \times z_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

Conjugué d'un nombre complexe. Si $z = x + iy$, le conjugué de z s'écrit $\bar{z}$, avec

$$\bar{z} = x - iy$$

Quotient et inverse d'un nombre complexe.

$$\frac{1}{z} = \frac{1 \times \bar{z}}{z \times \bar{z}} \quad (\bar{z} \neq 0) \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \times \bar{z}_2}{z_2 \times \bar{z}_2}$$

Exemples.

$$\frac{1}{5+i} = \frac{5-i}{(5+i)(5-i)} = \frac{5-i}{25+1} = \frac{5}{26} - \frac{1}{26}i$$

$$\frac{1}{3i} = \frac{3i}{3i \times 3i} = \frac{3i}{9i^2} = \frac{3i}{-9} = -\frac{1}{3}i$$

Exercice 1. On donne $z_1 = 5 - i$, $z_2 = -1 - 5i$.
1. Calculer $z_1 + z_2$, $z_1 \times z_2$ et $\dfrac{z_1}{z_2}$.
2. Déterminer l'inverse de $z_1 = 5 + 2i$ et de $z_2 = 1 - 4i$.

Solution.

$$z_1 + z_2 = (5 - i) + (-1 - 5i) = 4 - 6i$$

$$z_1 \times z_2 = (5 - i)(-1 - 5i) = -5 - 25i + i + 5i^2 = -10 - 24i$$

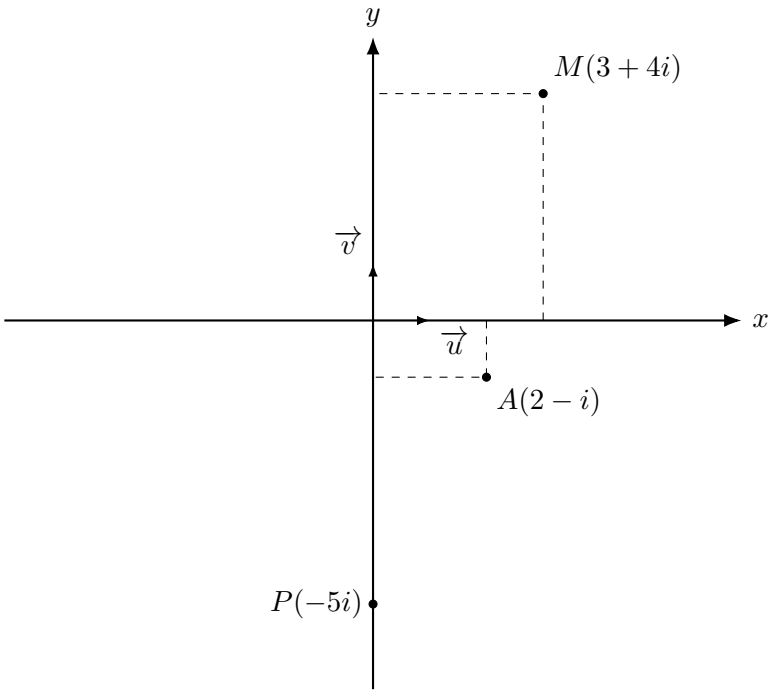
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5 - i}{-1 - 5i} = \frac{(5 - i)(-1 + 5i)}{(-1 - 5i)(-1 + 5i)} = \frac{-5 + 25i + i - 5i^2}{1 + 25} = \frac{26i}{26} = i$$

Pour $z_1 = 5 + 2i$ et $z_2 = 1 - 4i$:

$$\frac{1}{z_1} = \frac{5 - 2i}{29} = \frac{5}{29} - \frac{2}{29}i \qquad \frac{1}{z_2} = \frac{1 + 4i}{17} = \frac{1}{17} + \frac{4}{17}i$$

1.3 Représentation graphique

Dans le plan complexe muni du repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, à tout nombre complexe $z = x + iy$ on associe le point M de coordonnées $(x\,;\,y)$, appelé **point d'affixe** z, noté $M(z)$.



1.4 Module et argument d'un nombre complexe

Définition. Dans le plan complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on appelle **module** de z, noté $|z|$, la distance de O à M :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{ou} \qquad |z| = \sqrt{z\bar{z}}$$

Exemples.

$z = 1+i$: $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ $\quad$ $z = -2-5i$: $|z| = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$ $\quad$ $z = 2i$: $|z| = \sqrt{2^2} = 2$

Définition. On appelle **argument** du nombre complexe z non nul, l'angle orienté $(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{OM})$ tel que

$$(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{OM}) = \theta\ [2\pi], \qquad -\pi < \theta \leq \pi$$

On note $\arg(z)$ l'argument de z. On a :

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad \text{(forme trigonométrique)}$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad \text{(formule d'Euler)}$$

Exemple. $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$, soit $e^{i\pi} + 1 = 0$.
Comme $z = |z|\cos\theta + i|z|\sin\theta$ et $z = x + iy$, on a :

$$x = |z|\cos\theta, \quad y = |z|\sin\theta \qquad \Longrightarrow \qquad \cos\theta = \frac{x}{|z|}, \qquad \sin\theta = \frac{y}{|z|}$$

Exemple. Soit $z = 1 + i\sqrt{3}$.

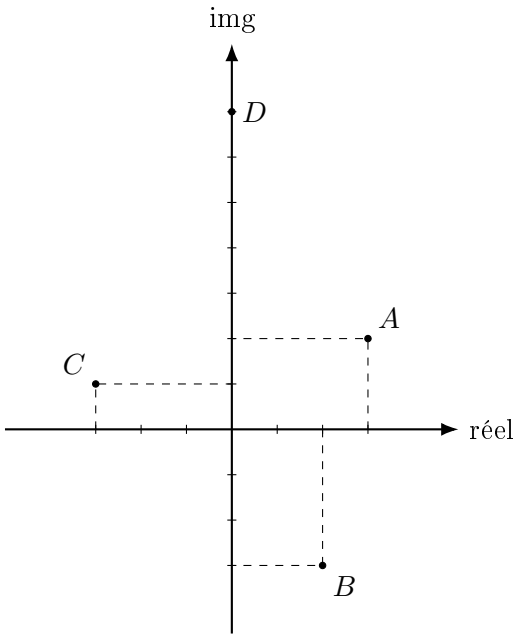
$$|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2 \qquad \cos\theta = \frac{1}{2}, \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Longrightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$$

Exemple. $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 3\sqrt{3} - 9i$.

$$|z_1| = \sqrt{2}, \qquad \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \ \Rightarrow\ \arg(z_1) = \frac{\pi}{4}$$

$$|z_2| = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 9^2} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}, \qquad \cos\theta = \frac{1}{2},\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \ \Rightarrow\ \arg(z_2) = -\frac{\pi}{3}$$

Représentation graphique de $A(3+2i)$, $B(2-3i)$, $C(-3+i)$, $D(7i)$:



Propriété.

$$\arg(\bar{z}) = -\arg(z)\ [2\pi] \qquad \arg(z_1 \times z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)\ [2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)\ [2\pi] \qquad \arg(z^n) = n\arg(z)\ [2\pi],\ n \in \mathbb{N}$$

Exercice 2. $z_1 = -13 - 9i$ et $z_2 = 8 + 3i$.

1. Calculer $z = z_1 + z_2$.
2. Déterminer $|z|$ et $\arg(z)$.

Solution. $z = (-13-9i)+(8+3i) = -5-6i$, donc $|z| = \sqrt{(-5)^2 + (-6)^2} = \sqrt{61}$. Comme $\mathrm{Re}(z) < 0$ et $\mathrm{Im}(z) < 0$, $M(z)$ est dans le troisième quadrant ; en posant $a = \tan^{-1}\left(\frac{6}{5}\right)$ (angle de référence), on obtient

$$\arg(z) = a - \pi\ [2\pi]$$

Module et argument – exercices

Déterminer le module et l'argument de :

$$1)\ z = 3 - 3i \qquad 2)\ z = 2i \qquad 3)\ z = 3 \qquad 4)\ z = -4 \qquad 5)\ z = -5i$$

Solution.

$$\begin{aligned}
&1)\ |z| = 3\sqrt{2},\ \cos\theta = \tfrac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\theta = -\tfrac{\sqrt{2}}{2} \ \Rightarrow\ \arg(z) = -\tfrac{\pi}{4}\\
&2)\ |z| = 2,\ \cos\theta = 0,\ \sin\theta = 1 \ \Rightarrow\ \arg(z) = \tfrac{\pi}{2}\\
&3)\ |z| = 3,\ \cos\theta = 1,\ \sin\theta = 0 \ \Rightarrow\ \arg(z) = 0\\
&4)\ |z| = 4,\ \cos\theta = -1,\ \sin\theta = 0 \ \Rightarrow\ \arg(z) = \pi\\
&5)\ |z| = 5,\ \cos\theta = 0,\ \sin\theta = -1 \ \Rightarrow\ \arg(z) = -\tfrac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Pour $z = x + iy$, on a aussi $\theta = \arg(z) = \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ (à un multiple de π près, selon le quadrant).

Exemple. $z = 2 + 2\sqrt{3}i$: $x = 2$, $y = 2\sqrt{3}$, $\tan\theta = \sqrt{3}$, donc $\arg(z) = \dfrac{\pi}{3}$.

1.5 Forme exponentielle d'un nombre complexe

$$z = |z|e^{i\theta} \qquad \text{ou} \qquad z = \rho e^{i\theta}$$

Exemple. Forme exponentielle de $z = 3\sqrt{3} - 9i$:

$$|z| = 6\sqrt{3}, \qquad \cos\theta = \frac{1}{2},\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \ \Rightarrow\ \theta = -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$$

$$z = 6\sqrt{3}\, e^{-i\pi/3}$$

Propriété.

$$|\bar{z}| = |z| \qquad |zz'| = |z|\,|z'| \qquad |z^n| = |z|^n \qquad \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}\ (z \neq 0) \qquad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}\ (z' \neq 0)$$

Inégalité triangulaire.

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

1.6 Affixe d'un vecteur

Si $A(z_A)$ et $B(z_B)$, l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est notée $\overrightarrow{AB}(z_B - z_A)$, et

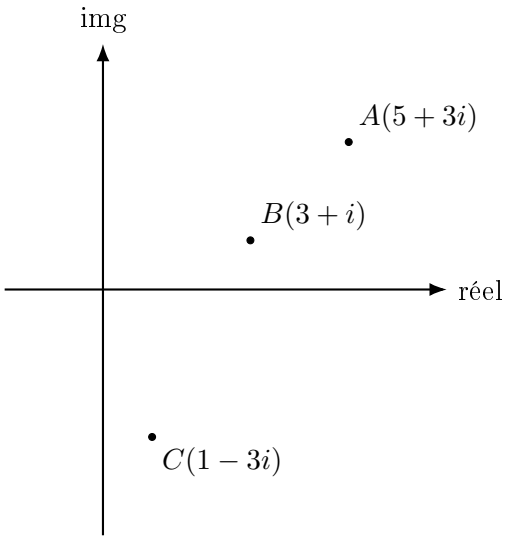
$$AB = |z_B - z_A| = \|\overrightarrow{AB}\|$$

Exemple. $A(-3 - i)$ et $B(3 - 2i)$: affixe de $\overrightarrow{AB}$:

$$z_B - z_A = (3 - 2i) - (-3 - i) = 6 - i \qquad \Longrightarrow \qquad AB = |6 - i| = \sqrt{36 + 1} = \sqrt{37}$$

Exercice 3. Dans le plan complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$, $A(5 + 3i)$, $B(3 + i)$, $C(1 - 3i)$.

1. Placer A, B, C dans le plan complexe.
2. Déterminer l'affixe z_D de D pour que $ABCD$ soit un parallélogramme.



1.7 Angle de deux vecteurs

Soient $A(z_A), B(z_B), C(z_C), D(z_D)$. L'angle orienté $(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{CD})$ a pour mesure, modulo 2π, l'argument de $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$:

$$(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$$

Exercice 4. $A(2+2i)$, $B(6-i)$, $C(8+10i)$. Mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC})$.

Solution.

$$z_C - z_A = 6+8i \qquad z_B - z_A = 4-3i$$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{6+8i}{4-3i} = \frac{(6+8i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} = \frac{24+18i+32i+24i^2}{25} = \frac{50i}{25} = 2i$$

$$\arg(2i) = \frac{\pi}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad (\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

Exercice 5. $A(1+2i)$, $B(2+i)$, $C(-1)$, $D(i\sqrt{3})$. Déterminer la mesure de $(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{CD})$.

Exercice 6. $A(2-2i)$, $B(5-5i)$, $C(-1-2i)$.

1. Écrire sous forme algébrique $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$.
2. Calculer mes$(\overrightarrow{AC}\,;\,\overrightarrow{AB})$.
3. Calculer AB.

2 Équations dans $\mathbb{C}$

2.1 Équation du second degré

Soit $az^2 + bz + c = 0$, avec $a, b, c \in \mathbb{C}$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$: deux racines réelles.
- Si $\Delta = 0$: une racine double.
- Si $\Delta < 0$: pas de racines réelles, mais deux racines complexes conjuguées z_1 et $z_2 = \bar{z}_1$.

Exemple 1. $z^2 + 4z + 5 = 0$.

$$\Delta = 4^2 - 4(1)(5) = 16 - 20 = -4 = 4i^2$$

$$z_1 = \frac{-4 - \sqrt{4i^2}}{2} = \frac{-4-2i}{2} = -2-i \qquad z_2 = \frac{-4+2i}{2} = -2+i$$

Exemple 2. $5z^2+1=-319$.

$$5z^2+320=0 \implies z^2=-64=(8i)^2 \implies (z-8i)(z+8i)=0$$

$$\mathcal{S}=\{-8i\,;\,8i\}$$

Exercice 7. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$1)\ 4z^2-24z+45=0 \qquad 2)\ z^2-4z+8=0 \qquad 3)\ -12z^2+48z-75=0$$

$$4)\ \sqrt{5}z^2+z+\sqrt{5}=0 \qquad 5)\ z^2-4z+8=0 \qquad 6)\ z^4=1$$

Exercice 8. $z^2+bz+c=0$ (E). Déterminer b et c si $5+i$ est une racine de (E).

Solution. $(5+i)^2+b(5+i)+c=0 \Rightarrow 24+10i+5b+bi+c=0$, d'où

$$\begin{cases} 24+5b+c=0 \\ 10+b=0 \end{cases} \implies b=-10, \quad c=26$$

2.2 Racines carrées d'un nombre complexe

Soit u un nombre complexe non nul. Pour déterminer la racine carrée de u, on pose $z^2=u$ et $z=x+iy$, avec $|z|^2=|u|$.

Exemple. Racine carrée de $3+4i$: on pose $z^2=3+4i$, $z=x+iy$.

$$(x+iy)^2=3+4i \quad \text{et} \quad |x+iy|^2=|3+4i|$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2-y^2=3 \\ 2xy=4 \end{cases}$$

$(1)+(2)$: $x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$. $(1)-(2)$: $y^2=1 \Rightarrow y=\pm 1$. Comme $xy=2>0$, x et y sont de même signe :

$$z=2+i \qquad \text{ou} \qquad z=-2-i$$

Racines carrées de i. $i=e^{i\pi/2}$, donc $z=\pm\sqrt{e^{i\pi/2}}=\pm e^{i\pi/4}=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

Racines carrées de $-7i$. $-7i=7e^{-i\pi/2}$, donc

$$z_1=\sqrt{7}\,e^{-i\pi/4} \qquad z_2=-\sqrt{7}\,e^{-i\pi/4}=\sqrt{7}\,e^{i3\pi/4}$$

Exercice 9. Déterminer les racines carrées de :

$$1)\ u=3-4i \qquad \{2-i\,;\,-2+i\} \qquad\qquad 2)\ u=4e^{-i\pi/2}$$

3 Factorisation d'un polynôme

Propriété. Soit a un nombre complexe et P un polynôme à valeurs complexes. Si a est une racine de P, alors

$$P(z)=(z-a)Q(z)$$

Propriété. Un polynôme à valeurs dans $\mathbb{C}$, non constant, admet au moins une racine complexe.

Exemple. $P(z)=z^2+1=z^2-i^2=(z+i)(z-i)$.

Exemple. $P(z)=z^3-3z^2+3z+7$.

$$P(-1)=-1-3-3+7=0 \quad \implies \quad -1 \text{ est une racine de } P$$

Factorisation par la méthode de Horner :

	1	−3	3	7
−1	↓	−1	4	−7
	1	−4	7	0

$$P(z) = (z+1)(z^2 - 4z + 7)$$

Racines de $z^2 - 4z + 7$: $\Delta = 16 - 28 = -12 = 12i^2$,

$$z_1 = \frac{4 - 2i\sqrt{3}}{2} = 2 - i\sqrt{3} \qquad z_2 = \bar{z}_1 = 2 + i\sqrt{3}$$

$$P(z) = (z+1)(z - 2 - i\sqrt{3})(z - 2 + i\sqrt{3})$$

4 Lignes de niveau

Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que :

a) $z + \bar{z} = 1$. En posant $z = x + iy$: $2x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$. L'ensemble cherché est la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$.

b) $z - \bar{z} = i$. On obtient $2iy = i \Rightarrow y = \dfrac{1}{2}$. L'ensemble des points M est la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$.

c) $|z|^2 = z + \bar{z}$. On obtient $x^2 + y^2 = 2x$, soit $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Le point M appartient au cercle de centre $A(1, 0)$ et de rayon $R = 1$.

d) $z = \dfrac{1 - 3u}{3 - u}$, avec $u = x + iy$ $(u \neq 3)$. On exprime z en fonction de x et y :

$$z = \frac{(1-3x) - 3iy}{(3-x) - iy} = \frac{[(1-3x) - 3iy][(3-x) + iy]}{(3-x)^2 + y^2} = \frac{3x^2 + 3y^2 - 10x + 3}{(3-x)^2 + y^2} + i\,\frac{-8y}{(3-x)^2 + y^2}$$

- z réel $\iff$ $\mathrm{Im}(z) = 0$ $\iff$ $y = 0$. L'ensemble cherché est l'axe des abscisses, privé de $A(3\,;\,0)$.
- z imaginaire pur $\iff$ $\mathrm{Re}(z) = 0 \iff 3x^2 + 3y^2 - 10x + 3 = 0 \iff \left(x - \dfrac{5}{3}\right)^2 + y^2 = \dfrac{16}{9}$.
  L'ensemble des points cherchés décrit le cercle de centre $B\left(\dfrac{5}{3}\,;\,0\right)$ et de rayon $R = \dfrac{4}{3}$.

Exercice 10. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $9z^2 - 6z + 2 = 0$ (on posera $z = x + iy$).

Solution. $\Delta = 36 - 72 = -36 = 36i^2$,

$$z_1 = \frac{6 - 6i}{18} = \frac{1 - i}{3} \qquad z_2 = \bar{z}_1 = \frac{1 + i}{3}$$

Exercice 11. Écrire sous forme algébrique $(1+i)^4 + (1-i)^3$.

Exercice 12. On définit la suite (z_n) par $z_0 = 1$, $z_{n+1} = \dfrac{1+i}{3} z_n$, et $d_n = |z_n|$.

1. Calculer z_1, z_2, z_3.
2. Écrire $\dfrac{1+i}{3}$ sous forme trigonométrique.
3. Démontrer que OA_0A_1 est rectangle et isocèle.
4. Démontrer que (d_n) est une suite géométrique.
5. On pose $L_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} A_iA_{i+1} = A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n$.

(a) Exprimer L_n en fonction de n.
(b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n$.

Éléments de solution. $U = \dfrac{1+i}{3}$, $|U| = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$, $\arg(U) = \dfrac{\pi}{4}$ $[2\pi]$. En posant $V = \bar{U} = \dfrac{1-i}{3}$, on a $|V| = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$, $\arg(V) = -\dfrac{\pi}{4}$ $[2\pi]$, et

$$U = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \qquad V = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en posant $U_n = \arg(z_n)$:

$$U_{n+1} - U_n = \arg\left(\frac{z_{n+1}}{z_n}\right) = \arg\left(\frac{1+i}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Donc (U_n) est arithmétique de raison $r = \dfrac{\pi}{4}$ et de premier terme $U_0 = \arg(z_0) = \arg(1) = 0$, d'où

$$U_n = \frac{n\pi}{4}$$

En posant $V_n = |z_n|$: $V_{n+1} = \left|\dfrac{1+i}{3}\right| \times |z_n| = \dfrac{\sqrt{2}}{3}V_n$. Donc (V_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ et de premier terme $V_0 = |z_0| = 1$, d'où

$$V_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^n$$

Calcul de $W_n = |z_{n+1} - z_n|$:

$$W_n = \left|z_n\left(\frac{1+i}{3} - 1\right)\right| = |z_n| \times \left|\frac{-2+i}{3}\right| = V_n \times \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^n$$

Soit $K_n = W_0 + W_1 + \cdots + W_n$:

$$K_n = \frac{\sqrt{5}}{3}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^k = \frac{\sqrt{5}}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{3}} = \frac{\sqrt{5}(3+\sqrt{2})}{7}\left[1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{n+1}\right]$$

Comme $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)^{n+1} \to 0$ quand $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} K_n = \frac{\sqrt{5}(3+\sqrt{2})}{7}$$

Exercice 13. Soit le polynôme $P(z) = z^2 + (-4+i)z + 4 - 2i$. En factorisant, montrer que $P(z) = (z-2)(z-2+i)$.

Exercice 14. On donne $P(z) = z^3 + (-3+2i)z^2 + (-1-5i)z + 6 + 2i$.
1. Montrer que 2 est une racine de $P(z)$.
2. En factorisant, montrer que $P(z) = (z-2)(z-(2-i))(z-(3+i))$.

Exercice 15. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $\sqrt{5}z^2 + z + \sqrt{5} = 0$. $\qquad \mathcal{S} = \left\{\dfrac{-1 \pm i\sqrt{19}}{2\sqrt{5}}\right\}$

Exercice 16. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $\sqrt{5}z^2 - 4z + 3 = 0$.

5 Exercices complémentaires

Exercice 17. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 - 2z\cos\theta + 1 = 0$.

Solution.

$$\Delta = 4\cos^2\theta - 4 = 4(\cos^2\theta - 1) = -4\sin^2\theta = 4\sin^2\theta\, i^2$$

$$z_1 = \frac{2\cos\theta + 2i\sin\theta}{2} = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta} \qquad z_2 = \frac{2\cos\theta - 2i\sin\theta}{2} = \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$$

$$\mathcal{S} = \{e^{i\theta}\,;\, e^{-i\theta}\}$$

Exercice 18. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 - (1+3i)z - 2 + 2i = 0$.

Solution.

$$\Delta = (1+3i)^2 - 4(-2+2i) = 1 + 6i - 9 + 8 - 8i = -2i$$

Racine carrée de $-2i$: on pose $z^2 = -2i$, $z = x + iy$:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \\ xy = -1 \end{cases} \implies x = \pm 1,\ y = \mp 1$$

Racines : $\delta_1 = 1 - i$, $\delta_2 = -1 + i$.

$$z_1 = \frac{(1+3i) + (1-i)}{2} = 1 + i \qquad z_2 = \frac{(1+3i) - (1-i)}{2} = 2i$$

$$\mathcal{S} = \{1 + i\,;\, 2i\}$$

Exercice 19.

1. Déterminer les racines carrées de $8 - 6i$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 - 4z + 4 - 2i = 0$.

Solution. 1) $z^2 = 8 - 6i$: $\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ x^2 + y^2 = 10 \\ xy = -3 \end{cases} \Rightarrow x = \pm 3,\ y = \mp 1.$

$z_1 = 3 - i$, $z_2 = -3 + i$.

2) $\Delta = 16 - 4(4 - 2i) = 8i$. Racine carrée de $8i$: $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 8 \\ xy = 4 \end{cases} \Rightarrow x = \pm 2,\ y = \pm 2$, racine $= 2 + 2i$.

$$z_1 = \frac{4 + 2 + 2i}{2} = 3 + i \qquad z_2 = \frac{4 - 2 - 2i}{2} = 1 - i$$

$$\mathcal{S} = \{3 + i\,;\, 1 - i\}$$

Exercice 20. (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$1)\ x^2 - 5ix - 6 = 0 \qquad 2)\ x^2 + 10ix - 21 = 0 \qquad 3)\ ix^2 - x + 12i = 0$$

Solution.

1. $\Delta = (-5i)^2 - 4(1)(-6) = -25 + 24 = -1 = i^2$, $z_1 = \dfrac{5i - i}{2} = 2i$, $z_2 = \dfrac{5i + i}{2} = 3i$. $\mathcal{S} = \{2i\,;\, 3i\}$.
2. $\Delta = (10i)^2 + 84 = -100 + 84 = -16 = 16i^2$, $z_1 = \dfrac{-10i + 4i}{2} = -3i$, $z_2 = \dfrac{-10i - 4i}{2} = -7i$. $\mathcal{S} = \{-3i\,;\, -7i\}$.
3. $\Delta = 1 - 4(i)(12i) = 1 + 48 = 49$, $z_1 = \dfrac{1 + 7}{2i} = \dfrac{8}{2i} = -4i$, $z_2 = \dfrac{1 - 7}{2i} = \dfrac{-6}{2i} = 3i$. $\mathcal{S} = \{-4i\,;\, 3i\}$.

(b) 1) Forme algébrique de $\dfrac{(1+i)^8}{(1-i)^6}$ et de $(1+i)(2+i)+\dfrac{5}{1+2i}$.
2) Déterminer x et y tels que $(2-i)x+(5+6i)y=1-3i$.
3) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $(2+i)x^2-(5-i)x+(2-2i)=0$.
Solution.
1) $1+i=\sqrt{2}\,e^{i\pi/4}$, $1-i=\sqrt{2}\,e^{-i\pi/4}$, donc

$$\frac{(1+i)^8}{(1-i)^6}=\frac{(\sqrt{2})^8e^{i2\pi}}{(\sqrt{2})^6e^{-i3\pi/2}}=(\sqrt{2})^2e^{i2\pi+i3\pi/2}=2e^{i7\pi/2}=2e^{-i\pi/2}=2(0-i)=-2i$$

$$(1+i)(2+i)+\frac{5}{1+2i}=1+3i+\frac{5(1-2i)}{5}=1+3i+1-2i=2+i$$

2) $(2-i)x+(5+6i)y=1-3i\Rightarrow\begin{cases}2x+5y=1\\-x+6y=-3\end{cases}$. Par la méthode de Cramer :

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&5\\-1&6\end{vmatrix}=17\qquad\Delta_x=\begin{vmatrix}1&5\\-3&6\end{vmatrix}=21\qquad\Delta_y=\begin{vmatrix}2&1\\-1&-3\end{vmatrix}=-5$$

$$x=\frac{21}{17}\qquad y=-\frac{5}{17}\qquad\mathcal{S}=\left\{\left(\frac{21}{17}\,;-\frac{5}{17}\right)\right\}$$

3) $\Delta=(5-i)^2-4(2+i)(2-2i)=25-10i-1-4(6-2i)=24-10i-24+8i=-2i$. Racine carrée de $2i$: $\delta=1+i$ (ou $-1-i$).

$$z_1=\frac{(5-i)+(1+i)}{2(2+i)}=\frac{6}{2(2+i)}=\frac{3}{2+i}=\frac{3(2-i)}{5}=\frac{6}{5}-\frac{3}{5}i$$

$$z_2=\frac{(5-i)-(1+i)}{2(2+i)}=\frac{4-2i}{2(2+i)}=\frac{2-i}{2+i}=\frac{(2-i)^2}{5}=\frac{3-4i}{5}=\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$$

$$\mathcal{S}=\left\{\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i\,;\,\frac{6}{5}-\frac{3}{5}i\right\}$$

Exercice 21. Résoudre par la méthode de Cramer, dans $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$:

$$\begin{cases}(1+i)z_1+(1-i)z_2=-1+i\\(1+2i)z_1+(1-2i)z_2=-4+i\end{cases}$$

Exercice 22. En factorisant, résoudre dans $\mathbb{C}$: $x^3-2x^2+25x-50=0$.
Solution.

$$x^2(x-2)+25(x-2)=0\implies(x-2)(x^2+25)=0\implies(x-2)(x-5i)(x+5i)=0$$

$$\mathcal{S}=\{2\,;\,5i\,;\,-5i\}$$

Exercice 23. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $2z^2+2\bar{z}=0$ (poser $z=x+iy$).
Solution.

$$2(x+iy)^2+2(x-iy)=0\implies2(x^2-y^2+2ixy)+2x-2iy=0$$

$$\begin{cases}x^2+x-y^2=0\\xy-y=0\end{cases}\implies y(x-1)=0\Longrightarrow y=0\text{ ou }x=1$$

Si $y=0$: $x^2-x=0\Rightarrow x=0$ ou $x=1$, soit $(0,0)$ et $(1,0)$.
Si $x=1$: $1+1-y^2=0\Rightarrow y^2=2$, ce qui est incompatible avec $xy=y$ sauf pour $x=1$; en

reprenant le système avec $x = -\frac{1}{2}$ (autre branche), on obtient $y^2 = \frac{3}{4}$, soit $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, d'où les solutions $\left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\left(-\frac{1}{2}\,;\,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Exercice 24. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

$$1)\ z^2 - \bar{z} = 0 \qquad 2)\ z^2 + 2\bar{z} + 1 = 0 \qquad 3)\ \frac{3}{z+3} - \frac{2}{z+2} = 1 \qquad 4)\ 4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0$$

Exercice 25. Résoudre dans $\mathbb{C}^2$:

$$1)\ \begin{cases}(1+i)z_1 - iz_2 = 2+i\\(2+i)z_1 + (2-i)z_2 = 7-4i\end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases}(3-i)z_1 + (4+2i)z_2 = 1+3i\\(4+2i)z_1 - (2+3i)z_2 = 7\end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases}(2+i)z_1 + (2-i)z_2 = 6\\(3+2i)z_1 + (3-2i)z_2 = 8\end{cases}$$

Exercice 26. Résoudre : $z^2 - (4+i)z + 5 + 5i = 0$.

Exercice 27. $Z = (1+i)z + 1 - i$. Déterminer et construire l'ensemble (E) des points $M(z)$ tels que Z soit un imaginaire pur.

Exercice 28. $z \in \mathbb{C} - \{i\}$. De même pour $z = \frac{3+i}{3-i}$, avec $z = x + iy$.

Exercice 29. $P(z) = z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (4 - i\sqrt{3})z - i$.

1. Calculer $P(i)$.
2. Factoriser $P(z)$.
3. Résoudre $P(z) = 0$.

Exercice 30. $z \in \mathbb{C} - \{i\}$, $z = \frac{3+i}{3-i}$.

Solution. En posant $z = x + iy$ (variable auxiliaire notée 3 ici, différente de l'affixe cherchée), on obtient, après calcul :

$$z = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (y-1)^2} - i\,\frac{x(y^2-1)}{x^2 + (y-1)^2}$$

Pour que z soit imaginaire pur : $x^2 + y^2 - 1 = 0$. L'ensemble des points M cherché est le cercle de centre $O(0,0)$ et de rayon $R = 1$, privé de $A(0\,;\,1)$.

6 Devoir de consolidation

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes : $z_1 = 4 + 3i$, $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$.

1) a) Forme algébrique de $z_1 \times z_2$:

$$z_1 \times z_2 = (4+3i)(1 - i\sqrt{3}) = 4 - 4i\sqrt{3} + 3i - 3i^2\sqrt{3} = (4 + 3\sqrt{3}) + i(3 - 4\sqrt{3})$$

Forme algébrique de $\frac{z_1}{z_2}$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4+3i}{1-i\sqrt{3}} = \frac{(4+3i)(1+i\sqrt{3})}{1+3} = \frac{4-3\sqrt{3}}{4} + i\,\frac{3+4\sqrt{3}}{4}$$

2) Inverse de $\sqrt{3} - i$:

$$\frac{1}{\sqrt{3}-i} = \frac{\sqrt{3}+i}{3+1} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$$

3) Module de $z = 6 - 4i$:

$$|z| = \sqrt{36+16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

4) Forme trigonométrique de $z = -\sqrt{3} + i$:

$$|z| = \sqrt{3+1} = 2, \qquad \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\theta = \frac{1}{2} \ \Rightarrow\ \theta = \frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$$

$$z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

5) Forme exponentielle de $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}i = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$:

$$|z| = 1, \qquad z = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = e^{-i\pi/4}$$

6) Vérifions que $\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = -1$:

$$\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\pi/3} \qquad \Longrightarrow \qquad \left(e^{i\pi/3}\right)^3 = e^{i\pi} = -1$$

7) a) $z^2 + 6z + 14 = 0$:

$$\Delta = 36 - 56 = -20 = 20i^2 \qquad z_1 = \frac{-6 - 2i\sqrt{5}}{2} = -3 - i\sqrt{5} \qquad z_2 = -3 + i\sqrt{5}$$

b) $z^4 = 81$:

$$z^4 - 81 = 0 \implies (z^2-9)(z^2+9) = 0 \implies (z-3)(z+3)(z-3i)(z+3i) = 0$$

$$\mathcal{S} = \{-3\,;\,3\,;\,-3i\,;\,3i\}$$

Exercice 31. Factoriser dans $\mathbb{C}$: $P(z) = z^3 - 4z^2 + 3z - 12$.

$$P(z) = z^2(z-4) + 3(z-4) = (z-4)(z^2+3) = (z-4)(z-3i^2\cdot(-1))$$

$$P(z) = (z-4)(z-3i)(z+3i)$$

Exercice 32. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation du degré 3 : $10z^3 - 4z^2 - 15z + 6 = 0$.

Solution.

$$2z^2(5z-2) - 3(5z-2) = 0 \implies (5z-2)(2z^2-3) = 0$$

$$5z - 2 = 0 \Rightarrow z = \frac{2}{5} \qquad 2z^2 - 3 = 0 \Rightarrow z^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow z = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{2}{5}\,;\,\frac{\sqrt{6}}{2}\,;\,-\frac{\sqrt{6}}{2}\right\}$$

Exercice 33. Soit $P(z) = 2z^3 - 3z + 5i$. Calculer $P(i)$, puis factoriser $P(z)$ et résoudre $P(z) = 0$.

Solution.

$$P(i) = 2i^3 - 3i + 5i = -2i - 3i + 5i = 0$$

Par la méthode de Horner (coefficients $2, 0, -3, 5i$, racine i) :

	2	0	-3	$5i$
i	$\downarrow$	$2i$	-2	$-5i$
	2	$2i$	-5	0

$$P(z) = (z-i)(2z^2+2iz-5)$$

$$\Delta = (2i)^2 - 4(2)(-5) = -4+40 = 36 \qquad z_2 = \frac{-2i-6}{4} = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i \qquad z_3 = \frac{-2i+6}{4} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ i\,;\, -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i\,;\, \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i \right\}$$

Exercice 34. Soit $z \in \mathbb{C}$ et P le polynôme $P(z) = z^3 + (-3+2i)z^2 + (-1-5i)z + 6 + 2i$.

1. Calculer $P(1)$.
2. Factoriser $P(z)$.
3. Résoudre $P(z) = 0$.

Thème 6 : Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Cours et exercices

Sommaire

1 Les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$
- 1.1 Addition dans $\mathbb{N}$
- 1.2 Relation d'ordre dans $\mathbb{N}$
- 1.3 L'ensemble $\mathbb{Z}$

2 Structures algébriques

3 Division euclidienne
- 3.1 Algorithme des divisions

4 PGCD – Algorithme d'Euclide

5 Identité et théorème de Bézout
- 5.1 Multiples et diviseurs d'un entier

6 Équations diophantiennes

7 Fractions continues

8 Congruences
- 8.1 Définition et propriétés
- 8.2 Équations du type $ax \equiv b\,[m]$
- 8.3 Systèmes de congruences

9 Petit théorème de Fermat – Test de primalité

10 Partie entière
- 10.1 Interprétation graphique
- 10.2 Partie entière et équation
- 10.3 La fonction partie entière

11 Congruences – Équation du second degré

1 Les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres entiers naturels :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}, \qquad \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres entiers relatifs :

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

1.1 Addition dans $\mathbb{N}$

Pour tous $a, b \in \mathbb{N}$, l'addition est l'opération qui à (a, b) associe l'entier naturel $a + b$.

Propriétés (de l'addition dans $\mathbb{N}$)

1. 0 est élément neutre : $0 + a = a + 0 = a$.
2. Commutativité : $a + b = b + a$.

3. Associativité : $(a+b)+c = a+(b+c)$, pour tous $a, b, c \in \mathbb{N}$.

1.2 Relation d'ordre dans $\mathbb{N}$

La relation d'ordre habituelle « $\leqslant$ » est telle que, pour $a, b \in \mathbb{N}$, on écrit $a \leqslant b$ s'il existe $c \in \mathbb{N}$ tel que $a + c = b$.

Propriétés

L'ensemble $\mathbb{N}$ muni de « $\leqslant$ » est un ensemble totalement ordonné, c'est-à-dire :
- **Réflexivité** : $a \leqslant a$.
- **Antisymétrie** : $\forall a, b \in \mathbb{N}$, si $a \leqslant b$ et $b \leqslant a$ alors $a = b$.
- **Transitivité** : si $a \leqslant b$ et $b \leqslant c$ alors $a \leqslant c$.

1.3 L'ensemble $\mathbb{Z}$

Tout entier naturel n admet un opposé $-n$ tel que $n + (-n) = 0$. Dans $\mathbb{Z}$, soustraire revient à ajouter l'opposé : on définit la soustraction à partir de l'addition.

Exemple

- Pas de commutativité dans $\mathbb{Z}$ pour la soustraction : $9 - 6 = 3 \neq 6 - 9 = -3$.
- Pas d'associativité : $7 - (4 - 2) = 5 \neq (7 - 4) - 2 = 1$.
- Pas d'élément neutre : $a - 0 = a \neq 0 - a = -a$.

L'ensemble $\mathbb{Z}$ muni de l'addition, noté $(\mathbb{Z}, +)$, est un **groupe commutatif**. Les relations d'ordre permettent de comparer les éléments d'un ensemble.

2 Structures algébriques

Définition

Un ensemble E muni d'une opération stable $*$, qui à chaque couple $(a, b) \in E^2$ associe un élément $a * b \in E$, est un **groupe** si les propriétés suivantes sont vérifiées :
1. **Associativité** : $(a * b) * c = a * (b * c)$.
2. **Existence d'un élément neutre unique** : $\exists ! \, e \in E, \ \forall a \in E, \ e * a = a * e = a$.
3. **Existence du symétrique (inverse)** : $\forall a \in E, \ \exists a' \in E, \ a * a' = a' * a = e$.

Si de plus la loi $*$ est commutative, c'est-à-dire $\forall a, b \in E, \ a * b = b * a$, on dit que $(E, *)$ est un **groupe commutatif**.

Exemple

On définit sur $E = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ la loi $*$ par $a * b = a + b + ab$. Montrons que $(E, *)$ est un groupe.
1) Associativité. Posons $P = a * b = a + b + ab$. Alors

$$(a * b) * c = P * c = P + c + Pc = a + b + ab + c + ac + bc + abc,$$

$$(a * b) * c = a + b + c + ab + ac + bc + abc. \qquad (1)$$

Posons $m = b * c = b + c + bc$. Alors

$$a * (b * c) = a * m = a + m + am = a + b + c + bc + ab + ac + abc,$$

$$a * (b * c) = a + b + c + ab + ac + bc + abc. \qquad (2)$$

De (1) et (2) on déduit $(a * b) * c = a * (b * c)$: la loi $*$ est associative.
2) Élément neutre. On cherche e tel que $a * e = a$ pour tout a :

$$a + e + ae = a \iff e(1 + a) = 0 \iff e = 0 \quad (\text{car } a \neq -1).$$

De même $e * a = a$ donne $e = 0$. Donc 0 est l'élément neutre de la loi $*$.
3) Élément symétrique. On cherche a' tel que $a * a' = e = 0$:

$$a + a' + aa' = 0 \iff a'(1 + a) = -a \iff a' = -\frac{a}{1+a} \quad (a \neq -1).$$

On vérifie de même que $a' * a = 0$. Le symétrique de a pour la loi $*$ est $a' = -\dfrac{a}{1+a}$.
De 1), 2) et 3), on déduit que $(E, *)$ est un groupe. De plus $a * b = b * a$, donc $(E, *)$ est un groupe commutatif.

Exercice 1

Soit la loi $*$ définie sur $\mathbb{Z}$ par $a * b = 5a + b$.
1. La loi $*$ admet-elle un élément neutre ?
2. La loi $*$ est-elle associative ?

Solution

1) Élément neutre. On cherche e tel que $e * a = a * e = a$ pour tout $a \in \mathbb{Z}$.

$$e * a = 5e + a = a \iff 5e = 0 \iff e = 0.$$

$$a * e = 5a + e = a \iff e = -4a,$$

qui dépend de a : il n'existe donc pas d'élément neutre à droite valable pour tout a (sauf $a = 0$). Comme un élément neutre doit vérifier $a * e = e * a = a$ pour *tout* a, la loi $*$ **n'admet pas d'élément neutre**.
2) Associativité. On a $a * b = 5a + b$, donc

$$(a * b) * c = 5(5a + b) + c = 25a + 5b + c,$$

$$a * (b * c) = 5a + (5b + c) = 5a + 5b + c.$$

Comme $25a + 5b + c \neq 5a + 5b + c$ dès que $a \neq 0$, la loi $*$ **n'est pas associative**.

Exercice 2

Soit $x * y = (x - 4)^2 - (2y - 3)$, pour $x, y \in \mathbb{Z}$. Calculer $2 * 5$ et $5 * 2$, puis conclure.

Solution

$$2 * 5 = (2 - 4)^2 - (2 \times 5 - 3) = (-2)^2 - 7 = 4 - 7 = -3.$$

$$5 * 2 = (5 - 4)^2 - (2 \times 2 - 3) = 1^2 - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Comme $2 * 5 = -3 \neq 0 = 5 * 2$, la loi $*$ **n'est pas commutative**.

Exercice 3

Soit $d \in \mathbb{R}$ fixé. On définit sur $\mathbb{R}$ la loi $*$ par $a * b = a + b + d$. Montrer que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe.

Solution

Associativité.

$$(a * b) * c = (a + b + d) * c = a + b + d + c + d = a + b + c + 2d,$$

$$a * (b * c) = a * (b + c + d) = a + b + c + d + d = a + b + c + 2d.$$

Les deux expressions coïncident : la loi $*$ est associative.
Élément neutre. On cherche e tel que $a * e = a$:

$$a + e + d = a \iff e = -d.$$

On vérifie $e * a = -d + a + d = a$. Donc $e = -d$ est l'élément neutre.
Symétrique. On cherche a' tel que $a * a' = e = -d$:

$$a + a' + d = -d \iff a' = -2d - a.$$

On vérifie $a' * a = (-2d - a) + a + d = -d$. Donc tout a admet un symétrique.
Comme $a*b = a+b+d = b+a+d = b*a$, la loi $*$ est commutative. Donc $(\mathbb{R}, *)$ est un **groupe commutatif**.

Exercice 4

Soit $a \top b = ab$, pour $a, b \in \mathbb{N}$.
1. L'opération $\top$ est-elle commutative ?
2. L'opération $\top$ est-elle associative ?
3. L'opération $\top$ admet-elle un élément neutre ?
4. Calculer $\big((5 \top 5) \top 4\big) \top 2$.

Exercice 5

Soit $a \top b = a + b - 5$, pour $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrer que $(\mathbb{Z}, \top)$ est un groupe commutatif.

L'ensemble $\mathbb{Z}$ muni des deux opérations $+$ et $\times$, noté $(\mathbb{Z}, +, \times)$, est un **anneau** car :

1. $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe commutatif ;
2. $(\mathbb{Z}, \times)$ est associative ;
3. la multiplication est distributive par rapport à l'addition :

$$(a + b)c = ac + bc, \qquad c(a + b) = ca + cb.$$

Exemple

Soit $(E, *, \top)$ muni de deux lois. La distributivité de $*$ par rapport à $\top$ s'écrit : pour tous $a, b, c \in E$,

$$\text{à gauche : } a * (b \top c) = (a * b) \top (a * c),$$

$$\text{à droite : } (b \top c) * a = (b * a) \top (c * a).$$

3 Division euclidienne

3.1 Algorithme des divisions

dividende	diviseur
reste	quotient

$$\text{Dividende} = \text{diviseur} \times \text{quotient} + \text{reste} \qquad \text{(division euclidienne)}$$

Exemple

32	7
5	11

On a $32 = 7 \times 11 + 5$.

Théorème

Soient a, b des entiers, avec $b \neq 0$. Il existe des entiers q et r, uniques, tels que

$$a = b \times q + r \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant r < |b|.$$

Exemple

Division euclidienne de 4461 **par** 16**.**

$$\begin{array}{r|l} 4461 & 16 \\ \hline 13 & 278 \end{array}$$

On a $4461 = 16 \times 278 + 13$.

Division euclidienne de 34 **par** 8**.**

$$\begin{array}{r|l} 34 & 8 \\ \hline 2 & 4 \end{array}$$

On a $34 = 8 \times 4 + 2$.

Division euclidienne de -262 **par** 3**.**

$$\begin{array}{r|l} 262 & 3 \\ \hline 1 & 87 \end{array}$$

On a $262 = 3 \times 87 + 1$, donc $-1 \times [262 = 3(87) + 1]$ donne $-262 = 3(-87) - 1$.
Comme -1 est négatif, il ne peut pas être le reste (le reste doit être positif et strictement inférieur à 3, le diviseur). On complète avec $-3 + 3$ à droite de l'égalité :

$$-262 = 3(-87) - 3 + 3 - 1 = 3(-87 - 1) + 2 = 3(-88) + 2.$$

On a donc $q = -88$ et $r = 2$.

Division euclidienne de 573 **par** -16**.**

$$\begin{array}{r|l} 573 & 16 \\ \hline 13 & 35 \end{array}$$

On a $573 = 16(35) + 13$, soit $573 = -16(-35) + 13$.

Division euclidienne de -433 **par** -17**.**

$$\begin{array}{r|l} 433 & 17 \\ \hline 8 & 25 \end{array}$$

On a $433 = 17(25) + 8$, donc $-1 \times [433 = 17(25) + 8]$ donne $-433 = -17(25) - 8$. On complète avec $-17 + 17$:

$$-433 = -17(25) - 17 + 17 - 8 = -17(25 + 1) + 9 = -17(26) + 9.$$

On a donc $q = 26$ et $r = 9$.

4 PGCD – Algorithme d'Euclide

L'algorithme d'Euclide permet de déterminer le PGCD de deux entiers a et b par des divisions successives. Le PGCD est le **dernier reste non nul** des divisions successives.

Exemple

$$\begin{array}{r|l} 540 & 168 \\ \hline 36 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 168 & 36 \\ \hline 24 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 36 & 24 \\ \hline 12 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 24 & 12 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$$

Ainsi $\text{PGCD}(540, 168) = 12$, et l'on peut écrire les quatre divisions :

$$540 = 168(3) + 36 \tag{1}$$
$$168 = 36(4) + 24 \tag{2}$$
$$36 = 24(1) + 12 \tag{3}$$
$$24 = 12(2) + 0 \tag{4}$$

Remarque

Dans $\mathbb{N}$, un nombre premier est un nombre qui n'admet que deux diviseurs : 1 et lui-même. Un nombre premier est un nombre qui n'est pas composé dans $\mathbb{N}$.
Exemple : $6 = 2 \times 3$, donc 6 est un nombre composé : 6 n'est pas un nombre premier.

Exercice 6

a) Par décomposition en produit de facteurs premiers, déterminer le PGCD de 540 et 168.
b) Écrire le PGCD de 540 et 168 comme une combinaison linéaire de 540 et 168 (la démarche sera justifiée).

Solution

a)

$$540 = 2^2 \times 3^3 \times 5 = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7^0, \qquad 168 = 2^3 \times 3 \times 7 = 2^3 \times 3 \times 5^0 \times 7.$$

$$\text{PGCD}(540, 168) = 2^2 \times 3 \times 5^0 \times 7^0 = 12.$$

b) On reprend les divisions successives (1) à (4) ci-dessus et on remonte l'algorithme :

$$\begin{aligned} 12 &= 36 - 24 \\ &= 36 - \big[168 - 36(4)\big] \\ &= 36 - 168 + 36(4) \\ &= 36(1 + 4) - 168 \\ &= 36(5) - 168 \\ &= \big[540 - 168(3)\big](5) - 168 \\ &= 5(540) + 168(-15) - 168 \\ &= 5(540) + 168(-16). \end{aligned}$$

On obtient $12 = 5(540) + 168(-16)$.

Exercice 7

a) Par l'algorithme d'Euclide, déterminer $\text{PGCD}(60, 27)$.
b) Écrire $\text{PGCD}(60, 27)$ comme une combinaison linéaire de 60 et 27.

Solution

a)

$$\begin{array}{r|l} 60 & 27 \\ \hline 6 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 27 & 6 \\ \hline 3 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 6 & 3 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$$

$$60 = 27(2) + 6 \tag{5}$$
$$27 = 6(4) + 3 \tag{6}$$
$$6 = 3(2) + 0 \tag{7}$$

Ainsi $\text{PGCD}(60, 27) = 3$.

b)

$$\begin{aligned} 3 &= 27 - 6(4) \\ &= 27 - \big[60 - 27(2)\big](4) \\ &= 27 - 60(4) + 27(8) \\ &= 27(1 + 8) + 60(-4) \\ 3 &= 60(-4) + 27(9). \end{aligned}$$

Exercice 8

Déterminer la division euclidienne de :

1. 258 par 12
2. 573 par -15
3. -381 par 14
4. -433 par -13

5) 395 par 14
6) 608 par -17
7) -278 par 12
8) -417 par -8

Solution

1) $\begin{array}{r|l} 258 & 12 \\ \cline{2-2} 6 & 21 \end{array}$ $258 = 12(21) + 6$.

2) $\begin{array}{r|l} 573 & 15 \\ \cline{2-2} 3 & 38 \end{array}$ $573 = 15(38) + 3 = -15(-38) + 3$.

3) $\begin{array}{r|l} 381 & 14 \\ \cline{2-2} 3 & 27 \end{array}$, donc $381 = 14(27) + 3$, d'où $-381 = -14(27) - 3$. On complète :

$$-381 = -14(27) - 14 + 14 - 3 = 14(-27 - 1) + 11 = 14(-28) + 11.$$

5) $\begin{array}{r|l} 395 & 14 \\ \cline{2-2} 3 & 28 \end{array}$ $395 = 14(28) + 3$.

6) $\begin{array}{r|l} 608 & 17 \\ \cline{2-2} 13 & 35 \end{array}$ $608 = 17(35) + 13 = -17(-35) + 13$.

7) $\begin{array}{r|l} 278 & 12 \\ \cline{2-2} 2 & 23 \end{array}$, donc $278 = 12(23) + 2$, d'où $-278 = -12(23) - 2$. On complète :

$$-278 = -12(23) - 12 + 12 - 2 = 12(-24) + 10.$$

8) $\begin{array}{r|l} 417 & 8 \\ \cline{2-2} 1 & 52 \end{array}$, donc $417 = 8(52) + 1$, d'où $-417 = -8(52) - 1$. On complète :

$$-417 = -8(52) - 8 + 8 - 1 = -8(53) + 7.$$

Exercice 9

Pour chacun des nombres a et b ci-dessous, déterminer $\text{PGCD}(a, b)$ puis l'écrire comme une combinaison linéaire de a et b.

1. $a = 141,\ b = 96$
2. $a = 255,\ b = 141$
3. $a = 102,\ b = 84$
4. $a = 5959,\ b = 13433$
5. $a = 645,\ b = 381$

Solution

1) PGCD$(141, 96)$:

$$141 = 96(1) + 45 \tag{8}$$
$$96 = 45(2) + 6 \tag{9}$$
$$45 = 6(7) + 3 \tag{10}$$
$$6 = 3(2) + 0 \tag{11}$$

PGCD$(141, 96) = 3$. Combinaison linéaire :

$$\begin{aligned} 3 &= 45 - 6(7) = 45 - \big[96 - 45(2)\big](7) = 45(15) + 96(-7) \\ &= (141 - 96)(15) + 96(-7) = 141(15) + 96(-22). \end{aligned}$$

2) PGCD$(255, 141)$:

$$255 = 141(1) + 114 \tag{12}$$
$$141 = 114(1) + 27 \tag{13}$$
$$114 = 27(4) + 6 \tag{14}$$
$$27 = 6(4) + 3 \tag{15}$$
$$6 = 3(2) + 0 \tag{16}$$

PGCD$(255, 141) = 3$. Combinaison linéaire :

$$3 = 255(-21) + 141(38).$$

3) PGCD$(102, 84)$:

$$102 = 84(1) + 18 \tag{17}$$
$$84 = 18(4) + 12 \tag{18}$$
$$18 = 12(1) + 6 \tag{19}$$
$$12 = 6(2) + 0 \tag{20}$$

PGCD$(102, 84) = 6$. Combinaison linéaire :

$$6 = 102(5) + 84(-6).$$

4) PGCD$(5959, 13433)$:

$$13433 = 5959(2) + 1515 \tag{21}$$
$$5959 = 1515(3) + 1414 \tag{22}$$
$$1515 = 1414(1) + 101 \tag{23}$$
$$1414 = 101(14) + 0 \tag{24}$$

PGCD$(5959, 13433) = 101$. Combinaison linéaire :

$$101 = 13433(4) + 5959(-9).$$

5) PGCD$(645, 381)$:

$$645 = 381(1) + 264 \tag{25}$$
$$381 = 264(1) + 117 \tag{26}$$
$$264 = 117(2) + 30 \tag{27}$$
$$117 = 30(3) + 27 \tag{28}$$
$$30 = 27(1) + 3 \tag{29}$$
$$27 = 3(9) + 0 \tag{30}$$

PGCD$(645, 381) = 3$. Combinaison linéaire :

$$3 = 645(13) + 381(-22).$$

Exercice 10

1. Par l'algorithme d'Euclide, déterminer PGCD$(23, 29)$.
2. Déterminer deux entiers a et b tels que $23a + 29b = 1$.
3. En déduire deux entiers u et v tels que $23u + 29v = 7$.

Solution

1)

$$29 = 23(1) + 6 \tag{31}$$
$$23 = 6(3) + 5 \tag{32}$$
$$6 = 5(1) + 1 \tag{33}$$
$$5 = 1(5) + 0 \tag{34}$$

PGCD$(23, 29) = 1$.

2)

$$1 = 6 - 5 = 6 - \big[23 - 6(3)\big] = 6(4) - 23 = \big[29 - 23\big](4) - 23$$
$$1 = 23(-5) + 29(4).$$

Donc $a = -5$, $b = 4$.

3) En multipliant la relation précédente par 7 :

$$23(-35) + 29(28) = 7,$$

donc $u = -35$ et $v = 28$.

Exercice 11

1. Reprendre l'exercice 10 avec 47 et 111.
2. Déterminer $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $47a + 111b = 1$.
3. Déterminer $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $47u - 111v = 89$.

Solution

1)

$$111 = 47(2) + 17 \tag{35}$$
$$47 = 17(2) + 13 \tag{36}$$
$$17 = 13(1) + 4 \tag{37}$$
$$13 = 4(3) + 1 \tag{38}$$
$$4 = 1(4) + 0 \tag{39}$$

$\text{PGCD}(47, 111) = 1$.

2)

$$\begin{aligned} 1 &= 13 - 4(3) = 13 - \big[17 - 13\big](3) = 13(4) + 17(-3) \\ &= \big[47 - 17(2)\big](4) + 17(-3) = 47(4) + 17(-8) + 17(-3) \\ &= 47(4) + 17(-11) = 47(4) + \big[111 - 47(2)\big](-11) \\ &= 111(-11) + 47(4) + 47(22) = 111(-11) + 47(26). \end{aligned}$$

Donc $47(26) + 111(-11) = 1$, soit $a = 26,\ b = -11$.

3) En multipliant par 89 :

$$47(26 \times 89) + 111(-11 \times 89) = 89 \implies 47(2314) + 111(-979) = 89,$$

d'où $47u - 111v = 89$ avec $u = 2314$ et $v = 979$.

Exercice 12

1. Reprendre l'exercice 10 avec 858 et 253.
2. Déterminer $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $858a + 253b = 11$.
3. Déterminer $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $858u + 253v = 33$.

Solution

1)

$$858 = 253(3) + 99 \tag{40}$$
$$253 = 99(2) + 55 \tag{41}$$
$$99 = 55(1) + 44 \tag{42}$$
$$55 = 44(1) + 11 \tag{43}$$
$$44 = 11(4) + 0 \tag{44}$$

$\text{PGCD}(858, 253) = 11$.

2)

$$\begin{aligned} 11 &= 55 - 44 = 55 - \big[99 - 55\big] = 55(2) + 99(-1) \\ &= \big[253 - 99(2)\big](2) + 99(-1) = 253(2) + 99(-5) \\ &= 253(2) + \big[858 - 253(3)\big](-5) = 858(-5) + 253(17). \end{aligned}$$

Donc $a = -5,\ b = 17$.

3) En multipliant par 3 : $858(-15) + 253(51) = 33$, d'où $u = -15,\ v = 51$.

Exercice 13

Deviner deux entiers x et y tels que :
1. $9x + 13y = -1$
2. $7x + 15y = 1$
3. $8x + 3y = 7$
4. $3x - 5y = 8$

Solution

1) $9(-3) + 13(2) = -27 + 26 = -1$, donc $x = -3,\ y = 2$.
2) $7(2)+15(-1) = 14-15 = -1$... on cherche plutôt $7(2)+15(1)-14 = 1$; en fait $7(2)-13 = 1$ ne convient pas directement, on vérifie $7(-2) + 15(1) = -14 + 15 = 1$, donc $x = -2,\ y = 1$.
3) $8(2) + 3(-3) = 16 - 9 = 7$, donc $x = 2,\ y = -3$.
4) $3(1) - 5(-1) = 3 + 5 = 8$, donc $x = 1,\ y = -1$.

5 Identité et théorème de Bézout

Théorème (Identité de Bézout)

Soient a et b deux entiers relatifs et d leur PGCD. Alors il existe deux entiers u et v tels que

$$au + bv = d.$$

Théorème de Bézout

S'il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = 1$, alors les entiers a et b sont premiers entre eux.

5.1 Multiples et diviseurs d'un entier

Définition

Soient a et b des entiers. S'il existe un entier $q \in \mathbb{Z}$ tel que $a = q \times b$, on dit que :
- a est un multiple de b ;
- b divise a (b diviseur de a), noté $b \mid a$.

Exemple

$15 = 3 \times 5$: 3 et 5 sont des diviseurs de 15.
$-52 = (-4) \times 13$: -4 et 13 sont des diviseurs de -52.

Théorème de Gauss

Si $a \mid bc$ et $\mathrm{PGCD}(a, b) = 1$, alors $a \mid c$.

Exemple

147 **est-il un multiple de** -7 **?**

$$147 = 7 \times 21 \quad \text{d'où} \quad 147 = (-7)(-21),$$

donc 147 est un multiple de -7.

Pour a, b deux entiers non nuls, on a :

$$\mathrm{PGCD}(a, b) \times \mathrm{PPCM}(a, b) = a \times b, \qquad \mathrm{PGCD}(a, b) = \mathrm{PGCD}(|a|, |b|).$$

6 Équations diophantiennes

Définition

Les équations diophantiennes sont des équations que l'on résout dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. Ce sont des équations du type

$$ax + by = c.$$

Une telle équation admet au moins une solution si, et seulement si, $\text{PGCD}(a, b)$ divise c.

Exemple

Résolution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de $5x + 3y = 7$ (E).
1) $\text{PGCD}(5, 3) = 1$ et 1 divise 7, donc (E) admet des solutions.
2) On a $5(2) + 3(-1) = 10 - 3 = 7$, donc $(2, -1)$ est une solution particulière de (E).

$$\begin{cases} 5x + 3y = 7 \\ 5(2) + 3(-1) = 7 \end{cases}$$

Par soustraction : $5(x - 2) + 3(y + 1) = 0$, soit $5(x - 2) = -3(y + 1) = 3(-y - 1)$.
Donc $3 \mid 5(x - 2)$ et, comme $\text{PGCD}(3, 5) = 1$, le théorème de Gauss donne $3 \mid (x - 2)$:

$$\exists k \in \mathbb{Z},\ x - 2 = 3k \iff x = 2 + 3k.$$

En reportant : $5(3k) = 3(-y - 1)$, soit $5k = -y - 1$, donc $y = -1 - 5k$.

$$S = \{(2 + 3k,\ -1 - 5k)\ :\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Exercice 14

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{Z}^2$:
1. $2x + 5y = 3$
2. $323x - 391y = 612$
3. $162x + 2007y = 27$
4. $221x + 247y = 15$

Solution

1) $2x + 5y = 3$ (E).
a) $\text{PGCD}(2, 5)$: $5 = 2(2) + 1$, $2 = 1(2) + 0$, donc $\text{PGCD}(2, 5) = 1$ et 1 divise 3 : (E) admet des solutions.
b) $2(-1) + 5(1) = -2 + 5 = 3$, donc $(-1, 1)$ est une solution particulière.

$$2(x + 1) + 5(y - 1) = 0 \iff 2(x + 1) = 5(1 - y).$$

Donc $5 \mid 2(x + 1)$ et $\text{PGCD}(2, 5) = 1$, d'où $5 \mid (x + 1)$ (théorème de Gauss) :

$$\exists k \in \mathbb{Z},\ x + 1 = 5k \iff x = -1 + 5k.$$

En reportant : $2(5k) = 5(1 - y)$, soit $2k = 1 - y$, donc $y = 1 - 2k$.

$$S = \{(-1 + 5k,\ 1 - 2k)\ :\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

2) $323x - 391y = 612$ (E).

a) PGCD$(323, -391)$:

$$-391 = 323(-2) + 255 \tag{45}$$
$$323 = 255(1) + 68 \tag{46}$$
$$255 = 68(3) + 51 \tag{47}$$
$$68 = 51(1) + 17 \tag{48}$$
$$51 = 17(3) + 0 \tag{49}$$

PGCD$(391, 323) = 17$, et $612 = 17 \times 36$, donc 17 divise 612 : (E) admet des solutions.
b) Combinaison linéaire de PGCD$(323, -391)$:

$$\begin{aligned} 17 &= 68 - 51 = 68 - \big[255 - 68(3)\big] = 68(4) - 255 \\ &= \big[323 - 255\big](4) - 255 = 323(4) - 255(5) \\ &= 323(4) - \big[-391 + 323(2)\big](5) = 323(4 - 10) - 391(-5) \\ 17 &= 323(-6) - 391(-5). \end{aligned}$$

En multipliant par 36 : $612 = 323(-216) - 391(-180)$, donc $(-216, -180)$ est une solution particulière de (E).
En divisant l'équation par 17 : $19x - 23y = 36$ (E′), équivalente à (E). Par soustraction avec $19(-216) - 23(-180) = 36$:

$$19(x + 216) - 23(y + 180) = 0 \iff 19(x + 216) = 23(y + 180).$$

Donc $23 \mid 19(x + 216)$ et PGCD$(19, 23) = 1$, d'où $23 \mid (x + 216)$:

$$\exists k \in \mathbb{Z},\ x + 216 = 23k \iff x = -216 + 23k.$$

En reportant : $19(23k) = 23(y + 180)$, soit $19k = y + 180$, donc $y = -180 + 19k$.

$$S = \{(-216 + 23k,\ -180 + 19k)\ :\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

3) et **4)** se traitent selon la même méthode : on calcule PGCD(a, b) par l'algorithme d'Euclide, on vérifie qu'il divise c, on trouve une solution particulière par remontée de l'algorithme, puis on applique le théorème de Gauss pour obtenir l'ensemble des solutions sous forme paramétrée. On remarque en particulier que PGCD$(221, 247) = 13$.

Exercice 15

Déterminer les entiers relatifs n tels que :
1. n divise $n + 8$
2. $n + 1$ divise $3n - 4$
3. $n - 4$ divise $n + 8$
4. $n - 3$ divise $2n + 1$
5. $n - 4$ divise $n + 2$
6. $n - 7$ divise $n^2 - n - 24$

Solution

1) n divise $n + 8$ équivaut à n divise 8 (car n divise n). On a

$$\frac{n + 8}{n} = 1 + \frac{8}{n} \in \mathbb{Z} \iff n \in \mathrm{Div}(8).$$

$$\mathrm{Div}(8) = \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}, \qquad n \in \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}.$$

2) $n+1$ divise $3n-4$. On écrit $3n-4 = 3(n+1)-7$, donc

$$\frac{3n-4}{n+1} = 3 - \frac{7}{n+1} \in \mathbb{Z} \iff (n+1) \in \mathrm{Div}(7).$$

$$\mathrm{Div}(7) = \{-7,-1,1,7\}, \qquad n \in \{-8,-2,0,6\}.$$

3) à 6) se traitent de la même manière : on exprime le dividende sous la forme (diviseur) $\times$ (quotient) + (reste constant), puis on cherche les diviseurs de ce reste.

Exemple

On donne $\mathrm{PGCD}(221,247) = 13$. Déterminer $\mathrm{PPCM}(221,247)$.

$$\mathrm{PGCD}(221,247) \times \mathrm{PPCM}(221,247) = 221 \times 247,$$

$$13 \times \mathrm{PPCM}(221,247) = 221 \times 247 \implies \mathrm{PPCM}(221,247) = \frac{221 \times 247}{13} = 4199.$$

7 Fractions continues

Exemple

Développement de $\frac{59}{11}$.

$$\begin{array}{r|l} 59 & 11 \\ \hline 4 & 5 \end{array}$$

$$\frac{59}{11} = 5 + \frac{4}{11} = 5 + \cfrac{1}{\cfrac{11}{4}}.$$

$$\begin{array}{r|l} 11 & 4 \\ \hline 3 & 2 \end{array}$$

$$\frac{11}{4} = 2 + \frac{3}{4} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{4}{3}}, \qquad \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}.$$

En remontant :

$$\frac{11}{4} = 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}, \qquad \frac{59}{11} = 5 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}.$$

On a obtenu un développement en fraction continue de $\frac{59}{11}$. On écrit $\frac{59}{11} = [5;2,1,3]$.
Par l'algorithme d'Euclide :

$$59 = 11(5) + 4 \tag{50}$$
$$11 = 4(2) + 3 \tag{51}$$
$$4 = 3(1) + 1 \tag{52}$$
$$3 = 1(3) + 0 \tag{53}$$

On retrouve $\frac{59}{11} = [5;2,1,3]$.

Exemple

Fraction dont le développement est $[2;3,5,2]$.

$$[2;3,5,2] = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2}}} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{2}{11}} = 2 + \frac{11}{35} = \frac{81}{35}.$$

Exercice 16

Déterminer le développement en fractions continues de :

1. $\dfrac{45}{16}$
2. $\dfrac{972}{421}$

3) $\dfrac{111}{40}$

4) $-\dfrac{81}{25}$

Solution

1)

$$45 = 16(2) + 13 \tag{54}$$
$$16 = 13(1) + 3 \tag{55}$$
$$13 = 3(4) + 1 \tag{56}$$
$$3 = 1(3) + 0 \tag{57}$$

$$\frac{45}{16} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3}}}, \qquad \frac{45}{16} = [2;1,4,3].$$

2)

$$972 = 421(2) + 130 \tag{58}$$
$$421 = 130(3) + 31 \tag{59}$$
$$130 = 31(4) + 6 \tag{60}$$
$$31 = 6(5) + 1 \tag{61}$$
$$6 = 1(6) + 0 \tag{62}$$

$$\frac{972}{421} = [2;3,4,5,6].$$

3)

$$111 = 40(2) + 31 \tag{63}$$
$$40 = 31(1) + 9 \tag{64}$$
$$31 = 9(3) + 4 \tag{65}$$
$$9 = 4(2) + 1 \tag{66}$$
$$4 = 1(4) + 0 \tag{67}$$

$$\frac{111}{40} = [2;1,3,2,4].$$

4)

$$-81 = 25(-4) + 19 \tag{68}$$
$$25 = 19(1) + 6 \tag{69}$$
$$19 = 6(3) + 1 \tag{70}$$
$$6 = 1(6) + 0 \tag{71}$$

$$-\frac{81}{25} = -4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6}}}, \qquad -\frac{81}{25} = [-4; 1, 3, 6].$$

Exercice 17

Déterminer la fraction associée au développement suivant :

1. $[5; 2, 1, 3]$
2. $[4; 2, 1, 4]$
3. $[2; 3, 4, 5, 6]$

Solution

1)

$$[5; 2, 1, 3] = 5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}} = 5 + \frac{1}{2 + \frac{3}{4}} = 5 + \frac{4}{11} = \frac{59}{11}.$$

2)

$$[4; 2, 1, 4] = 4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}} = 4 + \frac{1}{2 + \frac{4}{5}} = 4 + \frac{5}{14} = \frac{61}{14}.$$

3)

$$[2; 3, 4, 5, 6] = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{6}}}} = \frac{972}{421}.$$

Exemple

Déterminer deux entiers α et β tels que $2n+1$ et $3n+1$ soient premiers entre eux.
On cherche α, β tels que $\alpha(2n+1) + \beta(3n+1) = 1$ (identité de Bézout) :

$$2\alpha n + \alpha + 3\beta n + \beta = 1 \iff (2\alpha + 3\beta)n + \alpha + \beta = 1.$$

On impose

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 0 \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases}$$

La première ligne moins deux fois la seconde donne $\beta = -2$, puis $\alpha - 2 = 1$, soit $\alpha = 3$.
Vérification : $3(2n+1) - 2(3n+1) = 6n + 3 - 6n - 2 = 1$. Donc $2n+1$ et $3n+1$ sont premiers entre eux, avec $\alpha = 3,\ \beta = -2$.

Exercice 18

Dans chacun des cas, déterminer α et β (avec $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$) pour que :
1. $14n+3$ et $5n+1$ soient premiers entre eux ;
2. $2n+3$ et $5n+7$ soient premiers entre eux ;
3. $3n+2$ et $4n+3$ soient premiers entre eux.

Solution

1) $\alpha(14n+3)+\beta(5n+1)=1 \iff (14\alpha+5\beta)n+3\alpha+\beta=1.$

$$\begin{cases} 14\alpha+5\beta=0 \\ 3\alpha+\beta=1 \end{cases}$$

La première ligne moins 5 fois la seconde donne $-\alpha=-5$, soit $\alpha=5$, puis $\beta=1-3(5)=-14$.
Vérification : $5(14n+3)-14(5n+1)=70n+15-70n-14=1$.
2) $\alpha(2n+3)+\beta(5n+7)=1 \iff (2\alpha+5\beta)n+3\alpha+7\beta=1.$

$$\begin{cases} 2\alpha+5\beta=0 \\ 3\alpha+7\beta=1 \end{cases}$$

$3\times(1^{\text{re}})-2\times(2^{\text{e}})$ donne $\beta=-2$, puis $3\alpha-14=1$, soit $\alpha=5$.
Vérification : $5(2n+3)-2(5n+7)=10n+15-10n-14=1$.
3) $\alpha(3n+2)+\beta(4n+3)=1 \iff (3\alpha+4\beta)n+2\alpha+3\beta=1.$

$$\begin{cases} 3\alpha+4\beta=0 \\ 2\alpha+3\beta=1 \end{cases}$$

$2\times(1^{\text{re}})-3\times(2^{\text{e}})$ donne $-\beta=-3$, soit $\beta=3$, puis $2\alpha+9=1$, soit $\alpha=-4$.
Vérification : $-4(3n+2)+3(4n+3)=-12n-8+12n+9=1$.

Exercice 19

Sans utiliser la notion de valeur absolue, déterminer le PGCD$(275,155)$ par l'algorithme d'Euclide. De même pour PGCD$(623,-341)$.

8 Congruences

8.1 Définition et propriétés

Exemple

$17-5=12$ et $12=6\times 2$, donc $17-5=2\times 6$. On dit que 17 est congru à 5 modulo 6, on écrit

$$17\equiv 5\,[6] \quad \text{ou} \quad 17\equiv 5 \pmod 6.$$

$4-25=-21$ et $-21=(-3)\times 7$, donc 4 est congru à 25 modulo 7 : $4\equiv 25\,[7]$.
$6-(-4)=10=5\times 2$, donc $6\equiv -4\,[5]$.

Définition

Soient $a,b\in\mathbb{Z}$ et $n\in\mathbb{N}$ avec $n>0$. On dit que a est congru à b modulo n (noté $a\equiv b\,[n]$) si n divise $a-b$, c'est-à-dire si $a-b$ est un multiple de n :

$$a\equiv b\,[n] \iff a-b=kn,\ k\in\mathbb{Z} \iff a=b+kn.$$

Exercice 20

a) Justifier que :

1. $17 \equiv 3\,[7]$
2. $-145 \equiv 43\,[47]$
3. $2 \equiv -3\,[5]$
4. $-8 \equiv 7\,[5]$
5. $-3 \equiv -8\,[5]$

b) Donner le reste r tel que $60 \equiv r\,[7]$ et $133 \equiv r'\,[7]$.

Solution

a) 1) $17 - 3 = 14 = 7 \times 2$, donc $17 \equiv 3\,[7]$.
2) $-145 - 43 = -188 = 47 \times (-4)$, donc $-145 \equiv 43\,[47]$.
3) $2 - (-3) = 5 = 5 \times 1$, donc $2 \equiv -3\,[5]$.
4) $-8 - 7 = -15 = 5 \times (-3)$, donc $-8 \equiv 7\,[5]$.
5) $-3 - (-8) = 5 = 5 \times 1$, donc $-3 \equiv -8\,[5]$.
b) $60 = 7 \times 8 + 4$, donc $60 \equiv 4\,[7]$. $133 = 7 \times 19 + 0$, donc $133 \equiv 0\,[7]$.

Propriétés des congruences

1. Si $a \equiv b\,[n]$ alors $a + c \equiv b + c\,[n]$.
2. Si $a \equiv b\,[n]$ et $c \equiv d\,[n]$ alors $a + c \equiv b + d\,[n]$.
3. Si $a \equiv b\,[n]$ et $c \equiv d\,[n]$ alors $ac \equiv bd\,[n]$.
4. Si $a \equiv b\,[n]$ alors $ac \equiv bc\,[n]$.
5. Si $a \equiv b\,[n]$ alors $a^c \equiv b^c\,[n]$.

La relation de congruence est une relation d'équivalence : elle est

- **réflexive** : $a \equiv a\,[n]$;
- **symétrique** : $a \equiv b\,[n] \iff b \equiv a\,[n]$;
- **transitive** : $a \equiv b\,[n]$ et $b \equiv c\,[n] \implies a \equiv c\,[n]$.

Exercice 21

On donne $2 \equiv 8\,[6]$ et $5 \equiv 11\,[6]$.

1. Déterminer $2 + 5 \equiv ?\,[?]$.
2. Déterminer $2 \times 5 \equiv ?\,[?]$.

On donne également $572 \equiv 2\,[10]$ et $863 \equiv 3\,[10]$; déterminer $572 \times 863 \equiv ?\,[?]$. On donne enfin $19 \equiv 1\,[18]$ et $37 \equiv 1\,[18]$; déterminer $19 + 37 \equiv ?\,[?]$.

Solution

1) $2 \equiv 8\,[6]$ et $5 \equiv 11\,[6]$, donc $2 + 5 \equiv 8 + 11\,[6]$, soit $2 + 5 \equiv 19\,[6]$, c'est-à-dire $7 \equiv 19\,[6]$ (les deux membres ont même reste 1 modulo 6).
2) $2 \times 5 \equiv 8 \times 11\,[6]$, soit $10 \equiv 88\,[6]$ (même reste 4 modulo 6).
$572 \equiv 2\,[10]$ et $863 \equiv 3\,[10]$, donc $572 \times 863 \equiv 2 \times 3\,[10]$, soit $572 \times 863 \equiv 6\,[10]$.
$19 \equiv 1\,[18]$ et $37 \equiv 1\,[18]$, donc $19 + 37 \equiv 1 + 1\,[18]$, soit $19 + 37 \equiv 2\,[18]$.

Exercice 22

1. Par l'algorithme d'Euclide, calculer $\mathrm{PGCD}(9261, 1291)$.
2. En déduire le développement $\dfrac{9261}{1291} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$.
3. En déduire le développement en fraction continue de $\dfrac{9261}{1291}$.

8.2 Équations du type $ax \equiv b\,[m]$

Remarque

$ax \equiv b\,[m] \iff ax = b + km,\ k \in \mathbb{Z} \iff ax - km = b.$
L'équation $ax \equiv b\,[m]$ admet des solutions si, et seulement si, $\mathrm{PGCD}(a, m)$ divise b.

Exemple

$9x \equiv 6\,[24]$. $\mathrm{PGCD}(9, 24) = 3$ et $6 = 3 \times 2$, donc $3 \mid 6$: les solutions existent.

$$9x \equiv 6\,[24] \iff 9x - 24k = 6,\ k \in \mathbb{Z}.$$

On divise par $3 = \mathrm{PGCD}(9, 24)$: $3x - 8k = 2$ (E_0).
Solution particulière de (E_0) : $3(6) - 8(2) = 18 - 16 = 2$, donc $(6, 2)$ convient.

$$3x - 8k = 2 \quad \text{et} \quad 3(6) - 8(2) = 2 \implies 3(x - 6) = 8(k - 2).$$

Donc $8 \mid 3(x - 6)$ et $\mathrm{PGCD}(8, 3) = 1$, d'où $8 \mid (x - 6)$ (théorème de Gauss) :

$$\exists \ell \in \mathbb{Z},\ x - 6 = 8\ell \implies x = 6 + 8\ell \iff x \equiv 6\,[8].$$

$7x \equiv 4\,[10]$. $\mathrm{PGCD}(7, 10) = 1$ et $1 \mid 4$: la solution existe. $7x - 10k = 4$ (E_0).
On remarque $7(2) - 10(1) = 4$, donc $(2, 1)$ est une solution particulière.

$$7(x - 2) = 10(k - 1) \implies 10 \mid 7(x - 2),\ \mathrm{PGCD}(10, 7) = 1 \implies 10 \mid (x - 2).$$

$$\exists \ell \in \mathbb{Z},\ x - 2 = 10\ell \iff x \equiv 2\,[10].$$

$3x \equiv 5\,[7]$. $\mathrm{PGCD}(3, 7) = 1$ et $1 \mid 5$: la solution existe. $3x - 7k = 5$ (E_0).
On remarque $3(4) - 7(1) = 5$, donc $(4, 1)$ est une solution particulière.

$$3(x - 4) = 7(k - 1) \implies 7 \mid 3(x - 4),\ \mathrm{PGCD}(7, 3) = 1 \implies 7 \mid (x - 4).$$

$$\exists \ell \in \mathbb{Z},\ x - 4 = 7\ell \iff x \equiv 4\,[7].$$

$2x \equiv -1\,[7]$. $\mathrm{PGCD}(2, 7) = 1$ et $1 \mid (-1)$: la solution existe. $2x - 7k = -1$.
On remarque $2(3) - 7(1) = -1$, donc $(3, 1)$ est une solution particulière.

$$2(x - 3) = 7(k - 1) \implies 7 \mid 2(x - 3),\ \mathrm{PGCD}(7, 2) = 1 \implies 7 \mid (x - 3).$$

$$\exists \ell \in \mathbb{Z},\ x - 3 = 7\ell \iff x \equiv 3\,[7].$$

Exercice 23

Résoudre les équations :
1. $12x \equiv 5\,[16]$
2. $7x \equiv 2\,[31]$
3. $17x \equiv 1\,[43]$
4. $4x \equiv 3\,[5]$
5. $5x \equiv 4\,[12]$

Solution

1) $\mathrm{PGCD}(12, 16) = 4$ (car $16 = 12(1) + 4$, $12 = 4(3) + 0$), et 4 ne divise pas 5 : il n'y a **pas de solution** $(S = \varnothing)$.
2) $\mathrm{PGCD}(7, 31) = 1$ (car $31 = 7(4) + 3$, $7 = 3(2) + 1$, $3 = 1(3) + 0$) et $1 \mid 2$: les solutions

existent.

$$7x \equiv 2\,[31] \iff 2x - 31k = 2\text{? non : on écrit } 7x - 31k = 2.$$

On remarque $7(-30) - 31(-7) = -210 + 217 = 7 \neq 2$; on cherche plutôt une identité de Bézout pour $\mathrm{PGCD}(7, 31) = 1$ puis on multiplie par 2. On obtient une solution particulière $(x_0, k_0) = (9, 2)$ car $7(9) - 31(2) = 63 - 62 = 1$, donc $7(18) - 31(4) = 2$ convient : $(18, 4)$ est solution particulière.

$$7(x - 18) = 31(k - 4) \implies 31 \mid 7(x - 18),\ \mathrm{PGCD}(31, 7) = 1 \implies 31 \mid (x - 18).$$

$$x = 18 + 31\ell \iff x \equiv 18\,[31].$$

3), 4), 5) se résolvent selon la même méthode : calcul de $\mathrm{PGCD}(a, m)$, vérification qu'il divise b, recherche d'une solution particulière par l'identité de Bézout, puis application du théorème de Gauss pour conclure $x \equiv x_0\,[m']$ où $m' = m/\mathrm{PGCD}(a, m)$.

8.3 Systèmes de congruences

Exemple

$$\begin{cases} x \equiv 2\,[3] & (1) \\ x \equiv 3\,[5] & (2) \end{cases}$$

$$(1) \iff x = 2 + 3k,\ k \in \mathbb{Z}, \qquad (2) \iff x = 3 + 5\ell,\ \ell \in \mathbb{Z}.$$

$$2 + 3k = 3 + 5\ell \iff 3k - 5\ell = 1.$$

On remarque $3(-3) - 5(-2) = -9 + 10 = 1$, donc $(-3, -2)$ est une solution particulière :

$$3(k + 3) = 5(\ell + 2) \implies 3 \mid 5(\ell + 2),\ \mathrm{PGCD}(3, 5) = 1 \implies 3 \mid (\ell + 2).$$

$$\exists m \in \mathbb{Z},\ \ell + 2 = 3m \iff \ell = -2 + 3m.$$

En reportant dans $3(k + 3) = 5(\ell + 2) = 5(3m)$: $k + 3 = 5m$, donc $k = -3 + 5m$.
Enfin, $x = 2 + 3k = 2 + 3(-3 + 5m) = 2 - 9 + 15m = -7 + 15m$, soit

$$x \equiv -7\,[15].$$

Exercice 24

Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} x \equiv 8\,[12] \\ x \equiv 6\,[13] \end{cases}$
2. $\begin{cases} x \equiv 1\,[6] \\ x \equiv 17\,[39] \end{cases}$
3. $\begin{cases} x \equiv 2\,[9] \\ x \equiv 6\,[12] \end{cases}$
4. $\begin{cases} x \equiv 2\,[7] \\ 3x \equiv 2\,[5] \end{cases}$
5. $\begin{cases} x \equiv 3\,[4] \\ x \equiv 0\,[6] \end{cases}$

Solution

1) $x \equiv 8\,[12] \iff x = 8 + 12k$; $x \equiv 6\,[13] \iff x = 6 + 13\ell$.

$$8 + 12k = 6 + 13\ell \iff 12k - 13\ell = -2.$$

On remarque $12(2) - 13(2) = 24 - 26 = -2$, donc $(2, 2)$ est une solution particulière :

$$12(k-2) = 13(\ell - 2) \implies 13 \mid (k-2) \ \big(\text{PGCD}(12, 13) = 1\big).$$

$$\exists m \in \mathbb{Z},\ k - 2 = 13m \iff k = 2 + 13m.$$

$$x = 8 + 12k = 8 + 12(2 + 13m) = 32 + 156m \iff x \equiv 32\,[156].$$

2) $x \equiv 1\,[6] \iff x = 1 + 6k$; $x \equiv 17\,[39] \iff x = 17 + 39\ell$.

$$1 + 6k = 17 + 39\ell \iff 6k - 39\ell = 16.$$

$\text{PGCD}(6, 39) = 3$ (car $-39 = 6(-7) + 3$, $6 = 3(2) + 0$), or 3 ne divise pas 16 : le système **n'admet pas de solution**.

5) $x \equiv 3\,[4] \iff x = 3 + 4k$; $x \equiv 0\,[6] \iff x = 6\ell$.

$$3 + 4k = 6\ell \iff 4k - 6\ell = -3.$$

$\text{PGCD}(4, 6) = 2$, or 2 ne divise pas 3 : le système **n'admet pas de solution** ($S = \varnothing$).

3) et 4) se résolvent selon la même méthode.

9 Petit théorème de Fermat – Test de primalité

Définition (Objectif)

Soit n un entier naturel supérieur à 2. Pour montrer que n est un nombre premier, il suffit de montrer que n n'est divisible par aucun nombre premier $\leqslant \sqrt{n}$.

Quelques nombres premiers : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 19, ...

Exemple

a) 213 est-il un nombre premier ?

$\sqrt{213} \simeq 14{,}59$. Liste des nombres premiers inférieurs à 14,59 : $2, 3, 5, 7, 11, 13$.

$$\frac{213}{2} \simeq 106{,}5, \qquad \frac{213}{3} = 71.$$

213 est divisible par 3, donc 213 **n'est pas** un nombre premier.

b) 101 est-il un nombre premier ?

$\sqrt{101} \simeq 10{,}04$. Liste des nombres premiers inférieurs à 10,04 : $2, 3, 5, 7$.

$$\frac{101}{2} = 50{,}5, \quad \frac{101}{3} \simeq 33{,}66, \quad \frac{101}{5} = 20{,}2, \quad \frac{101}{7} \simeq 14{,}42.$$

101 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 7 : 101 **est** un nombre premier.

Exercice 25

Les nombres suivants sont-ils premiers ? 159 ; 201.

Théorème (Petit théorème de Fermat)

Énoncé 1. Soit P un nombre premier et a un entier naturel quelconque. Alors

$$a^P \equiv a\,[P].$$

Énoncé 2. Si P est premier et P ne divise pas a (c'est-à-dire $\text{PGCD}(a,P)=1$), alors $a^{P-1}-1$ est divisible par P. On note

$$a^{P-1} \equiv 1\,[P].$$

Exemple

1) $a=20,\ P=7$: 7 est premier et ne divise pas 20, donc $20^6 \equiv 1\,[7]$.
2) $a=7,\ P=5$: 5 est premier et ne divise pas 7, donc $7^4 \equiv 1\,[5]$.
3) $a=2,\ P=11$: 11 est premier et ne divise pas 2, donc $2^{10} \equiv 1\,[11]$.

Remarque

$2009 \equiv 7\,[11]$, c'est-à-dire que 7 est le reste de la division euclidienne de 2009 par 11.

Exemple

Déterminer le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11.
On a $6^{10} = 6^{11-1}$, avec $a=6$ et $P=11$. 11 est premier et $\text{PGCD}(6,11)=1$. D'après le petit théorème de Fermat, $6^{11-1} \equiv 1\,[11]$, soit $6^{10} \equiv 1\,[11]$. Le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11 est donc 1.

Exercice 26

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de 50^{11} par 7.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de 7^{103} par 17.
3. Déterminer le reste de la division euclidienne de 8^6 par 7.

10 Partie entière

Définition

La partie entière de x est l'unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant x < n+1$. La partie entière est unique. On note $[x]$ (ou $E(x)$) la partie entière de x.

Exemple

Pour $n \in \mathbb{N}$, $[n]=n$.

$$[3{,}2] =? \qquad 3 \leqslant 3{,}2 < 4 \quad \text{donc} \quad [3{,}2] = 3.$$

$$[-3{,}2] =? \qquad -4 \leqslant -3{,}2 < -3 \quad \text{donc} \quad [-3{,}2] = -4.$$

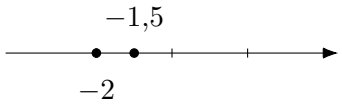
$$[54] = 54 \qquad (54 \leqslant 54 < 55).$$

10.1 Interprétation graphique

Graphiquement, la partie entière d'un nombre est l'entier qui le précède immédiatement sur la droite numérique.

Exemple

$$[-1{,}5] = ?$$



$$[-1{,}5] = -2.$$

Exercice 27

Déterminer graphiquement la partie entière de :

1. $[-3]$
2. $[-0{,}25]$
3. $[-12{,}5]$

Exercice 28

Déterminer la partie entière de :

1. $[2{,}25]$
2. $[3]$
3. $[-6{,}5]$
4. $\left[\dfrac{7}{2}\right]$

5) $[5{,}5]$
6) $[-2{,}3]$
7) $[45]$

10.2 Partie entière et équation

Exemple

Résoudre $\dfrac{1}{2}\big[-(x+1)\big] - 1 = 3$.

En multipliant par 2 : $\big[-(x+1)\big] - 2 = 6$, soit $\big[-(x+1)\big] = 8$. Cela équivaut à :

$$8 \leqslant -(x+1) < 9 \iff -9 < x+1 \leqslant -8 \iff -10 < x \leqslant -9.$$

$$S =]-10; -9].$$

Résoudre $2[x-1] - 3 = 4$.

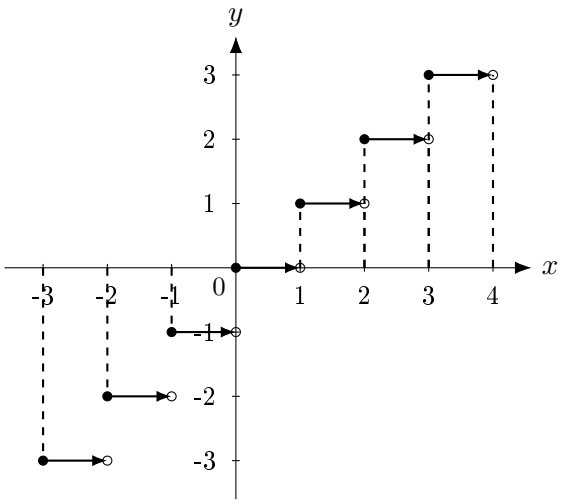
$$2[x-1] = 7 \iff [x-1] = \frac{7}{2} = 3{,}5.$$

Or $3{,}5 \notin \mathbb{Z}$, donc $S = \varnothing$.

10.3 La fonction partie entière

On note $y = [x]$ ou $y = E(x)$ la fonction partie entière.

$$[2{,}3] = 2 \qquad [0{,}15] = 0$$
$$[4] = 4 \qquad [10{,}9] = 10$$
$$[-0{,}3] = -1 \qquad [-2{,}5] = -3$$
$$[-5] = -5 \qquad [-8{,}01] = -9$$



11 Congruences – Équation du second degré

Définition (Résolution par la méthode des restes)

On considère les équations du type $ax^2 + bx + c \equiv 0\,[P]$, avec $a \not\equiv 0\,[P]$, où P est un entier. On teste tous les représentants de la classe $\overline{P} = \{0, 1, \ldots, P-1\}$ (ensemble des restes possibles modulo P).

Exemple

Résoudre $x^2 + 3x + 7 \equiv 0\,[3]$**.** Classe de 3 : $\overline{3} = \{0, 1, 2\}$.

x	0	1	2
x^2	0	1	$4 \equiv 1$
$3x$	0	$3 \equiv 0$	$6 \equiv 0$
$x^2 + 3x + 7$	$7 \equiv 1$	$8 \equiv 2$	$8 \equiv 2$

Aucune colonne ne donne un reste nul : cette équation **n'admet pas de solution**.

Résoudre $x^2 + 3x + 17 \equiv 0\,[3]$**.**

x	0	1	2
x^2	0	1	$4 \equiv 1$
$3x$	0	$3 \equiv 0$	$6 \equiv 0$
$x^2 + 3x + 17$	$17 \equiv 2$	$21 \equiv 0$	$27 \equiv 0$

On a deux colonnes qui conviennent, donc

$$x \equiv 1\,[3] \quad \text{ou} \quad x \equiv 2\,[3],$$

soit $x = 1 + 3k$ ou $x = 2 + 3k$, avec $k \in \mathbb{Z}$: $S = \{1 + 3k\,;\, 2 + 3k \ :\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Exemple

Résoudre $x^2 + 2x \equiv 6\,[9]$**.** Classe de 9 : $\overline{9} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x^2	0	1	4	0	7	7	0	4	1
$2x$	0	2	4	6	8	1	3	5	7
x^2+2x	0	3	8	6	6	8	3	0	8

On a deux colonnes qui conviennent, donc

$$x \equiv 3\,[9] \quad \text{ou} \quad x \equiv 4\,[9],$$

soit $S = \{3+9k\,;\,4+9k \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 29

Résoudre dans $\mathbb{Z}$:

1. $x^2+2x+2 \equiv 0\,[5]$
2. $x^2-4x-5 \equiv 0\,[11]$
3. $x^2+x \equiv 0\,[6]$
4. $x^2-x+1 \equiv 0\,[7]$
5. $x^2+x+1 \equiv 0\,[13]$
6. $4x^2+5x-1 \equiv 0\,[7]$
7. $x^3+x \equiv 0\,[9]$

COURS · TERMINALE

Thème 7 : Fonction logarithme népérien (1)

Équations et inéquations

Sommaire

1. Définition et propriétés algébriques
2. Applications des propriétés (exemples)
3. Exercices 1 et 2 — calculs et simplifications
4. Équations dans $\mathbb{R}$ — méthode et exemples
5. Inéquations dans $\mathbb{R}$ — méthode et exemples
6. Exercices 3, 4 et 5
7. Systèmes d'équations dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ — méthode et exemples
8. Exercices 6, 7 et 8
9. Exercice 9 — systèmes dans $\mathbb{R}^3$: changement de variable et méthode du pivot de Gauss

1. Définition et propriétés algébriques

Soit e le nombre réel strictement positif tel que $e \approx 2{,}718\ldots$
On appelle **fonction logarithme népérien**, notée ln, l'unique fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ telle que :

$$e^{\ln x} = x \quad \text{pour tout } x > 0$$

En particulier : $ln(1) = 0$ et $ln(e) = 1$.

Propriétés algébriques

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$:

$ln(x \times y) = ln(x) + ln(y)$

$ln(x / y) = ln(x) - ln(y)$

$ln(1/x) = -ln(x)$

$ln(\sqrt{x}) = (1/2)\cdot ln(x)$

$ln(x^p) = p\cdot ln(x) \quad (p \in \mathbb{R})$

$ln(x) < ln(y) \iff x < y$

⚠ Attention : en général, ln(x + y) ≠ ln(x) + ln(y).

2. Applications des propriétés — exemples

$ln(2) + ln(3) = ln(2 \times 3) = ln(6)$

$ln(3 \times 5) = ln(3) + ln(5)$

$e^{\ln 2} = 2$

$ln(5/3) = ln(5) - ln(3)$

$ln(1/7) = -ln(7)$

$ln(e^3) = 3\cdot ln(e) = 3 \times 1 = 3$

$ln(8) = ln(2^3) = 3\cdot ln(2)$

$ln(4\sqrt{2}) = ln(2^2 \times 2^{1/2}) = ln(2^{5/2}) = (5/2)\cdot ln(2)$

$ln(\sqrt{5}+1) + ln(\sqrt{5}-1) = ln[(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)] = ln((\sqrt{5})^2 - 1^2) = ln(5-1) = ln(4) = ln(2^2) = 2\cdot ln(2)$

Calcul de P

$P = ln(2) + ln(8) - ln(1/8)$

$= ln(2) + ln(2^3) - (-ln(8))$

$= ln(2) + 3ln(2) + ln(2^3)$

$= ln(2) + 3ln(2) + 3ln(2)$

$= (1 + 3 + 3)\cdot ln(2)$

P = 7·ln(2)

3. Exercices 1 et 2 — calculs et simplifications

Exercice 1

Écrire en fonction de ln(2) les nombres suivants :

$A = ln(3\sqrt{2} + 4) + ln(3\sqrt{2} - 4)$

$B = ln(32)$

$C = ln(16\sqrt{2})$

$D = ln(1/4)$

Exercice 2

Simplifier les expressions suivantes :

$E = ln(9 - \sqrt{5}) + ln(9 + \sqrt{5})$

$F = 2ln(3) + ln(1/3) - 3ln(3)$

$G = ln(2/e) + ln(e^2)$

$T = \dfrac{-\ln(6) + \ln(12)}{2\ln(\sqrt{2})}$

$S = ln(9\sqrt{3}) + ln(27) - 2ln(3)$

$Q = \dfrac{2ln(3e) - ln(9)}{3ln(5e) - (3/2)ln(25)}$

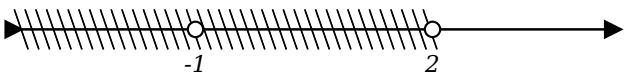
4. Équations dans $\mathbb{R}$

Cas 1 : $ln(U) = ln(V)$
L'équation est définie si $U > 0$ et $V > 0$.
$ln(U) = ln(V) \iff U = V$

Cas 2 : $ln(U) = k$, avec $k \in \mathbb{R}$
L'équation est définie si $U > 0$.
$ln(U) = k \iff e^{\ln U} = e^k \iff U = e^k$

Exemple — Résoudre dans $\mathbb{R}$: ln(x − 2) + ln(x + 1) = ln(4)

L'équation est définie si $x - 2 > 0$ et $x + 1 > 0$, soit $x > 2$ et $x > -1$.



Domaine de définition : intersection des deux conditions

D'où l'équation est définie sur $D_E =]2 ; +\infty[$.

$ln(x-2) + ln(x+1) = ln(4) \iff ln[(x-2)(x+1)] = ln(4)$

$\iff ln(x^2 - x - 2) = ln(4)$

$\iff x^2 - x - 2 = 4$

$\iff x^2 - x - 6 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-6) = 1 + 24 = 25$

$x_1 = (1 - 5)/2 = -2 \quad x_2 = (1 + 5)/2 = 3$

$-2 \notin D_E$ et $3 \in D_E$

S = {3}

Exemple — Résoudre dans $\mathbb{R}$: ln(x) = 3

$D_E =]0 ; +\infty[$

$ln(x) = 3 \iff e^{\ln x} = e^3 \iff x = e^3$

$e^3 \in]0 ; +\infty[$ donc

S = {e³}

Exemple — Résoudre dans ℝ : (ln x)² − 3ln(x) + 2 = 0

On pose $u = \ln(x)$, avec $D_E = \mathbb{R}_+^*$. L'équation devient :

$u^2 - 3u + 2 = 0$

$u^2 - 2u - u + 2 = 0$

$u(u - 2) - (u - 2) = 0$

$(u - 2)(u - 1) = 0$

$u = 2$ ou $u = 1$

D'où $\ln(x) = 2$ ou $\ln(x) = 1$, soit $e^{\ln x} = e^2$ ou $e^{\ln x} = e^1$

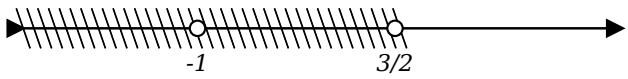
$x = e^2$ ou $x = e$, avec $e^2, e \in]0 ; +\infty[$

S = {e ; e²}

5. Inéquations dans ℝ

Exemple — Résoudre dans ℝ : ln(2x − 3) ≤ ln(x + 1)

L'inéquation est définie si $2x - 3 > 0$ et $x + 1 > 0$, soit $x > 3/2$ et $x > -1$.



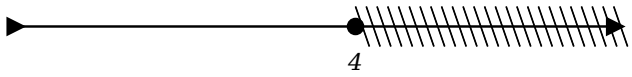
Domaine de définition

D'où l'inéquation est définie sur $D_E =]3/2 ; +\infty[$.

$\ln(2x - 3) \leq \ln(x + 1) \iff 2x - 3 \leq x + 1$

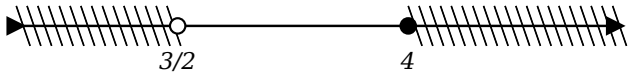
$\iff 2x - x \leq 1 + 3$

$\iff x \leq 4$



$D_I =]-\infty ; 4]$

L'ensemble solution est donné par $S = D_E \cap D_I$:



S =]3/2 ; 4]

Exemple — Résoudre dans ℝ : ln(x + 2) < 1

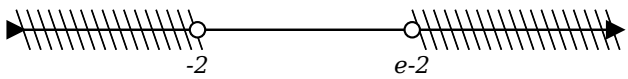
L'inéquation est définie si $x + 2 > 0$, soit $x > -2$.

$\ln(x + 2) < 1 \iff \ln(x + 2) < \ln(e)$

$\iff x + 2 < e$

$\iff x < e - 2$

Or $e \approx 2{,}718\ldots$, donc $e - 2 > 0 > -2$.



Intersection des deux conditions

S =]−2 ; e − 2[

6. Exercices 3, 4 et 5

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\ln(x-5) = 10$
2. $\ln(x+2) = \ln(8-2x)$
3. $\ln(x) + \ln(x-3) = \ln(8)$
4. $\ln(2x+1) + \ln(x-3) = \ln(x+5)$

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\ln(2x-4) \leq 3$
2. $\ln(x+2) > \ln(4-x)$
3. $(\ln x)^2 - 3\ln(x) + 2 < 0$
4. $\ln(x) + \ln(x-3) \leq \ln(4)$

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $(\ln(x)+2)(\ln(x)-3) < 0$
2. $\dfrac{\ln(x)+1}{2-\ln(x)} \geq 0$
3. $x\cdot\ln(x) - 2x > 0$
4. $(3-\ln(x))(\ln(x)+4) < 0$

7. Systèmes d'équations dans R×R

Exemple-méthode — Résoudre dans R×R :

$$2\ln(x) + 3\ln(y) = 7 \quad (1)$$
$$\ln(x) - \ln(y) = 1 \quad (2)$$

Le système est défini si $x > 0$ et $y > 0$, soit $D =]0 ; +\infty[\times]0 ; +\infty[$.

On pose $u = \ln(x)$ et $v = \ln(y)$. Le système devient :

$$2u + 3v = 7 \quad (1) \qquad u - v = 1 \quad (2)$$

Éliminons v par combinaison : $3\times(2)$ donne $3u - 3v = 3$. En ajoutant à (1) :

$(1) + 3\times(2) : 5u = 10 \implies u = 2$

Avec (2) : $2 - v = 1 \implies v = 1$

Vérification : $2(2) + 3(1) = 7$ ✓

D'où $\ln(x) = 2$ et $\ln(y) = 1$, soit $x = e^2$ et $y = e$, avec $e^2, e \in]0 ; +\infty[$.

S = {(e² ; e)}

Résoudre dans R×R :

$$\ln(x) + \ln(y) = 4$$
$$(\ln x)(\ln y) = -12$$

Le système est défini si $x > 0$ et $y > 0$.

On pose $u = \ln(x)$ et $v = \ln(y)$: $u + v = 4$ et $u \times v = -12$.

u et v sont donc solutions de : $t^2 - St + P = 0$, soit $t^2 - 4t - 12 = 0$.

$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(-12) = 16 + 48 = 64$

$t_1 = (4-8)/2 = -2 \qquad t_2 = (4+8)/2 = 6$

D'où $(u ; v) = (-2 ; 6)$ ou $(u ; v) = (6 ; -2)$.

1er couple : $\ln(x) = -2$, $\ln(y) = 6 \implies x = e^{-2}$, $y = e^{6}$

2e couple : $\ln(x) = 6$, $\ln(y) = -2 \implies x = e^{6}$, $y = e^{-2}$

$S = \{(e^{-2} ; e^{6}) ; (e^{6} ; e^{-2})\}$

Résoudre dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$:

$$2x + 3y = 7$$
$$\ln(x) + 2\ln(y) = \ln(2)$$

Le système est défini si $x > 0$ et $y > 0$.

De la 2e équation : $\ln(x) + \ln(y^2) = \ln(2) \iff \ln(x\cdot y^2) = \ln(2) \iff x\cdot y^2 = 2$, soit $x = 2/y^2$ ($y \neq 0$).

En substituant dans la 1re équation :

$2(2/y^2) + 3y = 7 \iff 4/y^2 + 3y = 7$

$\iff 4 + 3y^3 = 7y^2$ (en multipliant par y^2)

$\iff 3y^3 - 7y^2 + 4 = 0$

$y = 1$ est racine évidente ($3 - 7 + 4 = 0$). On factorise :

$3y^3 - 7y^2 + 4 = (y - 1)(3y^2 - 4y - 4)$

$3y^2 - 4y - 4 = 0 \quad \Delta = 16 + 48 = 64$

$y_1 = (4 - 8)/6 = -2/3 \quad y_2 = (4 + 8)/6 = 2$

Comme $y > 0$, on rejette $y = -2/3$. Il reste $y = 1$ et $y = 2$.

Pour $y = 1$: $2x + 3 = 7 \implies x = 2$

Pour $y = 2$: $2x + 6 = 7 \implies x = 1/2$

$S = \{(2 ; 1) ; (1/2 ; 2)\}$

8. Exercices 6, 7 et 8

Exercice 6

(On pourra poser $u = \ln(x)$ et $v = \ln(y)$, puis résoudre à l'aide de ce changement de variable.)

Résoudre dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$:

1) $2\ln(x) + 3\ln(y) = 8$; $\ln(x) - 5\ln(y) = -9$
2) $\ln(x) + \ln(y) = \ln(6)$; $\ln(x) - \ln(y) = \ln(6) - 2\ln(2)$
3) $2\ln(x) + 3\ln(y) = \ln(72)$; $\ln(x) + \ln(y) = \ln(6)$

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$:

1) $\ln(x) + \ln(y) = 5$; $(\ln x)(\ln y) = 6$
2) $\ln(x/2) = 1$; $(\ln x)(\ln y) = 12$
3) $\ln(xy) = 5$; $(\ln x)(\ln y) = 6$

Exercice 8

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$:

1) $x + y = 9$; $\ln(x) + \ln(y) = 14$
2) $3x - y = 1$; $2\ln(x) - \ln(y) = 0$
3) $x - 2y = 1$; $2\ln(x) - \ln(y) = 9$

9. Exercice 9 — systèmes dans $\mathbb{R}^3$

(On pourra poser $u = \ln(x)$, $v = \ln(y)$ et $w = \ln(z)$, puis résoudre le système linéaire obtenu à l'aide d'un changement de variable et de la méthode du pivot de Gauss.)

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$:

1)

$$\begin{cases} 3\ln(x) + 4\ln(y) - 5\ln(z) = -6 \\ 2\ln(x) + 3\ln(y) - 4\ln(z) = -5 \\ -2\ln(x) + 3\ln(y) - 4\ln(z) = 3 \end{cases}$$

2)

$$\begin{cases} \ln(x) + \ln(y) + 2\ln(z) = -1 \\ 4\ln(x) + \ln(y) + 4\ln(z) = -2 \\ 2\ln(x) - \ln(y) + 2\ln(z) = -4 \end{cases}$$

3)

$$\begin{cases} \ln(x) + 3\ln(y) + 6\ln(z) = 50 \\ 3\ln(x) + 5\ln(y) - 4\ln(z) = 2 \\ 4\ln(x) + 7\ln(y) - 9\ln(z) = 31 \end{cases}$$

Solution proposée du système 1) — changement de variables et méthode du pivot de Gauss

Système 1

Étape 1 — Domaine et changement de variables. *Le système est défini pour $x > 0$, $y > 0$ et $z > 0$. On pose $u = \ln(x)$, $v = \ln(y)$ et $w = \ln(z)$. Le système de départ devient le système linéaire (S) d'inconnues u, v, w :*

$$\begin{cases} 3u + 4v - 5w = -6 & (L_1) \\ 2u + 3v - 4w = -5 & (L_2) \\ -2u + 3v - 4w = 3 & (L_3) \end{cases}$$

Étape 2 — Résolution de (S) par la méthode du pivot de Gauss.

Élimination de u. On prend (L_1) comme pivot (coefficient 3) et on élimine u dans (L_2) et (L_3) par les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow 3L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow 3L_3 + 2L_1$. On obtient le système équivalent (S_1) :

$$\begin{cases} 3u + 4v - 5w = -6 & (L_1) \\ v - 2w = -3 & (L_2) \leftarrow 3L_2 - 2L_1 \\ 17v - 22w = -3 & (L_3) \leftarrow 3L_3 + 2L_1 \end{cases}$$

Élimination de v. On prend (L_2) comme pivot (coefficient 1) et on élimine v dans (L_3) par $L_3 \leftarrow L_3 - 17L_2$. On obtient le système équivalent (S_2), qui est triangulaire :

$$\begin{cases} 3u + 4v - 5w = -6 & (L_1) \\ v - 2w = -3 & (L_2) \\ 12w = 48 & (L_3) \leftarrow L_3 - 17L_2 \end{cases}$$

Normalisation. On divise (L_1) par 3 et (L_3) par 12 : $L_1 \leftarrow (1/3)L_1$ et $L_3 \leftarrow (1/12)L_3$. On obtient le système équivalent (S_3) :

$$\begin{cases} u + (4/3)v - (5/3)w = -2 & (L_1) \leftarrow (1/3)L_1 \\ v - 2w = -3 & (L_2) \\ w = 4 & (L_3) \leftarrow (1/12)L_3 \end{cases}$$

Remontée. (L_3) donne $w = 4$. En reportant dans (L_2) : $v = -3 + 2w = -3 + 8 = 5$. En reportant dans (L_1) : $u = -2 - (4/3)v + (5/3)w = -2 - 20/3 + 20/3 = -2$. D'où le système équivalent (S_4) :

$$\begin{cases} u = -2 & (L_1) \\ v = 5 & (L_2) \\ w = 4 & (L_3) \end{cases}$$

Conclusion pour (S) : l'ensemble des solutions de (S) est $\{(u\ ;\ v\ ;\ w)\} = \{(-2\ ;\ 5\ ;\ 4)\}$.

Étape 3 — Retour aux inconnues de départ. *Comme $u = \ln(x)$, $v = \ln(y)$, $w = \ln(z)$, on a $\ln(x) = -2$, $\ln(y) = 5$ et $\ln(z) = 4$, soit (en composant par l'exponentielle, $e^{\ln t} = t$ pour $t > 0$) : $x = e^{-2}$, $y = e^{5}$ et $z = e^{4}$. Ces trois nombres sont strictement positifs : ils appartiennent bien au domaine de définition.*

Vérification dans (S) : $3(-2) + 4(5) - 5(4) = -6$; $2(-2) + 3(5) - 4(4) = -5$; $-2(-2) + 3(5) - 4(4) = 3$.

$S = \{(e^{-2}\ ;\ e^{5}\ ;\ e^{4})\}$

Thème 8

Nombres complexes — Géométrie, équations

Terminale — cours et exercices

Sommaire

1 Affixe d'un point, repère orthonormé direct **2**
1.1 Vecteurs : colinéarité, orthogonalité . . . 3

2 Forme trigonométrique et forme exponentielle **4**

3 Formules de Moivre et d'Euler **5**
3.1 Linéarisation . . . 5

4 Équations du type $z^2 - Sz + P = 0$ **8**

5 Racine n-ième d'un nombre complexe **9**

6 Interprétation géométrique **11**
6.1 Propriétés du module et de l'argument . . . 12

7 Transformations du plan **13**

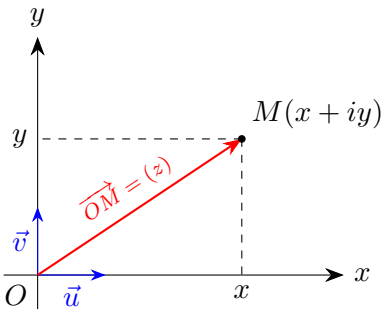
8 Lieux géométriques **16**
8.1 Ensembles définis par un module . . . 16
8.2 Ensembles définis par un argument . . . 17

1. Affixe d'un point, repère orthonormé direct

Définition

Soit M un point du plan d'affixe z, tel que $z = x + iy$ (avec $x, y \in \mathbb{R}$).
Dire que $M(x + iy)$ équivaut à dire que $M(x\,;\,y)$.

Soit $(O, \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormé direct. On place le point $M(z = x+iy)$ de la façon suivante :



Propriété

Soit z un nombre complexe, $z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)$.

- z est un nombre **réel** si et seulement si $\mathrm{Im}(z) = 0$.
- z est un nombre **imaginaire pur** si et seulement si $\mathrm{Re}(z) = 0$.

Propriété

Soit $I(z_I)$ le milieu de $[MM']$, avec $M(z_M)$ et $M'(z_{M'})$. Alors

$$z_I = \frac{z_M + z_{M'}}{2}.$$

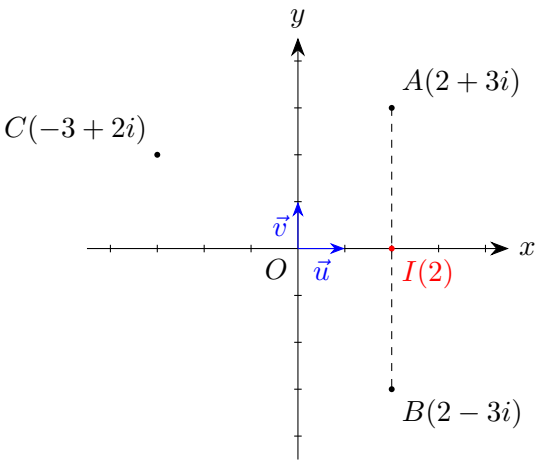
Propriété

- $z \in \mathbb{R} \iff \bar{z} = z$
- $z \in i\mathbb{R} \iff \bar{z} = -z$

Exercice 1

Dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$:

1) Placer les points $A(z_A = 2 + 3i)$, $B(z_B = 2 - 3i)$ et $C(z_C = -3 + 2i)$.
2) Calculer z_I, l'affixe du point I, milieu du segment $[AB]$.
3) Placer le point I.



1.1 Vecteurs : colinéarité, orthogonalité

Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, $\text{aff}(\vec{u})$ et $\text{aff}(\vec{v})$ leurs affixes respectives.

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si $\dfrac{\text{aff}(\vec{u})}{\text{aff}(\vec{v})}$ est réel.
- $\vec{u} \perp \vec{v}$ si et seulement si $\dfrac{\text{aff}(\vec{u})}{\text{aff}(\vec{v})}$ est un imaginaire pur.

Propriété

Si $A(z_A)$ et $B(z_B)$, alors $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$, et

$$AB = |z_B - z_A|.$$

Exemple 1

Soit $A(1+2i)$ et $B(3-i)$.

$$\overrightarrow{AB}(z_B - z_A) : \quad z_B - z_A = 3 - i - (1+2i) = 3 - 1 - i - 2i = 2 - 3i,$$

donc $\overrightarrow{AB}(2-3i)$, et

$$AB = |2-3i| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}.$$

Exemple 2

Soit $\vec{u}(4+6i)$ et $\vec{v}(2+3i)$. Calculons $\dfrac{\text{aff}(\vec{u})}{\text{aff}(\vec{v})} = \dfrac{z}{z'}$:

$$\frac{z}{z'} = \frac{4+6i}{2+3i} = \frac{2(2+3i)}{2+3i} = 2.$$

Or $2 \in \mathbb{R}$, donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Exercice 2

Soit $A(z_A = 1+2i)$, $B(z_B = 3+5i)$, $C(7+11i)$.

1) Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
3) Calculer les modules des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Exemple 3

Soit $\vec{u}(1+i)$ et $\vec{v}(-3+3i)$. On pose $z = 1+i$ et $z' = -3+3i$. Calculons $\dfrac{z}{z'}$:

$$\begin{aligned}\frac{z}{z'} &= \frac{1+i}{-3+3i} = \frac{1+i}{-3(1-i)} = \frac{(1+i)(1+i)}{-3(1-i)(1+i)} = \frac{(1+i)^2}{-3(1-i^2)} \\ &= \frac{1+2i+i^2}{-3(1+1)} = \frac{1+2i-1}{-6} = \frac{2i}{-6} = -\frac{1}{3}i.\end{aligned}$$

$\dfrac{\text{aff}(\vec{u})}{\text{aff}(\vec{v})}$ est imaginaire pur, donc $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Exercice 3

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct :

1) Placer $A(z_A = 2+i)$, $B(z_B = 4+3i)$, $C(z_C = 1+6i)$.
2) Calculer $z_B - z_A$ et $z_C - z_A$, et en déduire $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$.
3) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont-ils orthogonaux ?

Exercice 4

1) Soit $\vec{u}(1+i)$ et $\vec{v}(-1+i)$. Montrer que $\vec{u} \perp \vec{v}$.
2) Soit $\vec{u}(2+3i)$ et $\vec{v}(-6+4i)$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils orthogonaux ?

2. Forme trigonométrique et forme exponentielle

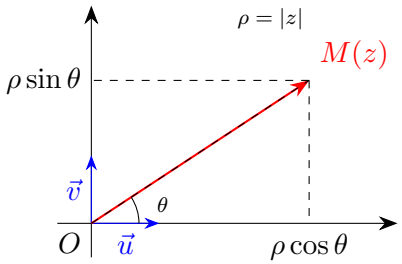
Définition

Dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, si $z = x+iy$ est non nul, on appelle **argument** de z, noté $\arg(z)$, une mesure de l'angle

$$\arg(z) = \left(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{OM}\right).$$

On note $\theta = \arg(z)$. On a

$$\cos\theta = \frac{x}{|z|}, \qquad \sin\theta = \frac{y}{|z|}, \qquad |z| = \sqrt{x^2+y^2}.$$



Propriété

- 0 n'a pas d'écriture trigonométrique.
- $\arg(z\bar{z}) = \theta\ [2\pi]$ n'a de sens que si $z \neq 0$; l'argument est toujours défini modulo 2π.

À retenir

L'écriture trigonométrique de z est

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta),$$

et la forme exponentielle du nombre complexe non nul z est $z = \rho e^{i\theta}$, avec $\rho = |z|$.

Exemple 4

Déterminons la forme trigonométrique et exponentielle du nombre complexe $z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$, forme exponentielle $z = 2e^{i\pi/3}$.

Autre exemple : soit $M(z = 1 + i\sqrt{3})$.

$$|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2, \qquad \cos\theta = \frac{1}{2}, \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

d'où $\theta = \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

À connaître par cœur : le cercle trigonométrique.

Exercice 5

Déterminer la forme trigonométrique et la forme exponentielle des nombres complexes :

$$z_1 = 1 + i\,; \qquad z_2 = 1 + i\sqrt{3}.$$

Exercice 6

Déterminer la forme trigonométrique et la forme algébrique du nombre complexe $z = 2e^{i\pi/3}$.

3. Formules de Moivre et d'Euler

Formule de Moivre

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}.$$

Propriété

$$\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a, \qquad \cos^2 a + \sin^2 a = 1,$$
$$\sin(2a) = 2\sin a\cos a,$$

$$e^{i\pi/3} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad e^{i\pi/2} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i,$$
$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1, \qquad \text{d'où } e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Formule d'Euler

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{ix} = \cos x + i\sin x \quad (1), \qquad e^{-ix} = \cos x - i\sin x \quad (2).$$

En faisant $(1) + (2)$ et $(1) - (2)$:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

3.1 Linéarisation

Exemple 5

Linéarisons $\cos^2 x$ à l'aide de la formule d'Euler :

$$\cos^2 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2ix} + 2e^{ix}e^{-ix} + e^{-2ix}}{4} = \frac{e^{2ix} + 2e^0 + e^{-2ix}}{4}$$
$$= \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} + \frac{1}{2},$$

donc

$$\cos^2 x = \frac{\cos(2x)+1}{2}.$$

Exemple 6

Déterminons $\cos(3x)$ et $\sin(3x)$. On a

$$\begin{aligned}\cos(3x)+i\sin(3x) &= e^{3ix} = \left(e^{ix}\right)^3 = (\cos x + i\sin x)^3\\ &= (\cos x + i\sin x)^2(\cos x + i\sin x)\\ &= \left(\cos^2 x + 2i\cos x\sin x - \sin^2 x\right)(\cos x + i\sin x)\\ &= \cos^3 x - \cos x\sin^2 x - 2\cos x\sin^2 x + i\left(2\cos^2 x\sin x + \cos^2 x\sin x - \sin^3 x\right)\\ &= \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x + i\left(3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x\right).\end{aligned}$$

Par identification des parties réelle et imaginaire :

$$\cos(3x) = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x = \cos^3 x - 3\cos x\left(1-\cos^2 x\right) = 4\cos^3 x - 3\cos x,$$
$$\sin(3x) = 3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x = 3\left(1-\sin^2 x\right)\sin x - \sin^3 x = 3\sin x - 4\sin^3 x.$$

$$\boxed{\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x} \qquad \boxed{\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x}$$

Exemple 7

Simplifions $\dfrac{e^{ix}+1}{e^{ix}-1}$, pour $x \neq 0\ [2\pi]$.

$$e^{ix}+1 = e^{ix/2}\left(e^{ix/2}+e^{-ix/2}\right) = e^{ix/2}\cdot 2\cos\frac{x}{2}, \qquad e^{ix}-1 = e^{ix/2}\left(e^{ix/2}-e^{-ix/2}\right) = e^{ix/2}\cdot 2i\sin\frac{x}{2}.$$

Donc

$$\frac{e^{ix}+1}{e^{ix}-1} = \frac{2\cos(x/2)}{2i\sin(x/2)} = \frac{1}{i}\cot\frac{x}{2} = -i\cot\frac{x}{2}.$$

Exemple 8

Linéarisons $\cos^4 x$:

$$\cos^4 x = (\cos x)^4 = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^4}{16}.$$

En développant le binôme (avec $a = e^{ix}$, $b = e^{-ix}$, $ab = 1$) :

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 = e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix},$$

donc

$$\begin{aligned}\cos^4 x &= \frac{e^{4ix}+e^{-4ix}}{16} + \frac{4\left(e^{2ix}+e^{-2ix}\right)}{16} + \frac{6}{16}\\ &= \frac{1}{8}\cdot\frac{e^{4ix}+e^{-4ix}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2} + \frac{3}{8},\end{aligned}$$

$$\boxed{\cos^4 x = \frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}}.$$

Exercice 7

1) Linéariser $\sin^2 x$, $\cos^3 x$ et $\sin^4 x$; montrer que
$$\cos^3 x \sin^2 x = -\frac{1}{16}\Big[\cos(5x) + \cos(3x) - 2\cos x\Big].$$
2) Déterminer la forme trigonométrique et la forme exponentielle du nombre complexe $z_a = -3 + 3i$.
3) Simplifier $\left(e^{i\pi/4}\right)^4 \times e^{i\pi/2}$.

Solution.

1) En utilisant $\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et $\sin x = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$:
$$\sin^2 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2 = \frac{e^{2ix}-2+e^{-2ix}}{-4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2} = \frac{1-\cos(2x)}{2}.$$
Pour $\cos^3 x$, en développant $(\cos x)^3 = \left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3$:
$$\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^3 = e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix},$$
$$\cos^3 x = \frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{8} + \frac{3\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)}{8} = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos x.$$
Pour $\sin^4 x$, en développant $(\sin x)^4 = \left(\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4$ et en utilisant $i^4 = 1$:
$$\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^4 = e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix},$$
$$\sin^4 x = \frac{e^{4ix}+e^{-4ix}}{16} - \frac{4\left(e^{2ix}+e^{-2ix}\right)}{16} + \frac{6}{16} = \frac{1}{8}\cos(4x) - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}.$$
Enfin, en utilisant $\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos x$ et $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$:
$$\begin{aligned}\cos^3 x \sin^2 x &= \left(\frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x\right)\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}\\ &= \frac{1}{8}\cos 3x + \frac{3}{8}\cos x - \frac{1}{8}\cos 3x\cos 2x - \frac{3}{8}\cos x\cos 2x.\end{aligned}$$
En linéarisant les produits ($\cos 3x\cos 2x = \frac{1}{2}[\cos 5x + \cos x]$ et $\cos x\cos 2x = \frac{1}{2}[\cos 3x + \cos x]$) :
$$\begin{aligned}\cos^3 x \sin^2 x &= \frac{1}{8}\cos 3x + \frac{3}{8}\cos x - \frac{1}{16}\big(\cos 5x + \cos x\big) - \frac{3}{16}\big(\cos 3x + \cos x\big)\\ &= -\frac{1}{16}\cos 5x + \left(\frac{1}{8} - \frac{3}{16}\right)\cos 3x + \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{16} - \frac{3}{16}\right)\cos x\\ &= -\frac{1}{16}\cos 5x - \frac{1}{16}\cos 3x + \frac{2}{16}\cos x = -\frac{1}{16}\Big[\cos(5x) + \cos(3x) - 2\cos x\Big].\end{aligned}$$

2) $|z_a| = \sqrt{(-3)^2+3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. On a $\cos\theta = \dfrac{-3}{3\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{3}{3\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, d'où $\theta = \dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]$.
$$z_a = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}\,e^{i3\pi/4}.$$

3) $\left(e^{i\pi/4}\right)^4 \times e^{i\pi/2} = e^{i\pi} \times e^{i\pi/2} = e^{i(\pi+\pi/2)} = e^{i3\pi/2} = -i$.

4. Équations du type $z^2 - Sz + P = 0$

Avec $S = x + y$ et $P = xy$.

Exemple 9

Méthode. Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$$

On pose l'équation $z^2 - 3z + 2 = 0$.

$$\Delta = (-3)^2 - 4(1)(2) = 9 - 8 = 1 > 0.$$

$$z_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2} = \frac{3-1}{2} = 1, \qquad z_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2} = \frac{3+1}{2} = 2.$$

On vérifie : $\begin{cases} 1 + 2 = 3 \\ 1 \times 2 = 2 \end{cases}$ et $\begin{cases} 2 + 1 = 3 \\ 2 \times 1 = 2 \end{cases}$.

D'où $S = \{(1, 2)\,;\,(2, 1)\}$.

Exercice 8

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

$$\begin{cases} x + y = i \\ xy = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Solution. On pose l'équation $z^2 - iz - \dfrac{1}{2} = 0$.

$$\Delta = i^2 - 4(1)\left(-\frac{1}{2}\right) = -1 + 2 = 1 > 0.$$

$$z_1 = \frac{i - \sqrt{1}}{2} = \frac{-1+i}{2}, \qquad z_2 = \frac{i + \sqrt{1}}{2} = \frac{1+i}{2}.$$

Vérification : $z_1 + z_2 = \dfrac{(-1+i)+(1+i)}{2} = \dfrac{2i}{2} = i = S$, et $z_1 z_2 = \dfrac{(-1+i)(1+i)}{4} = \dfrac{-1-i+i+i^2}{4} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2} = P$.

Les solutions sont

$$(x, y) = \left(\frac{-1+i}{2}, \frac{1+i}{2}\right) \quad \text{et} \quad (x, y) = \left(\frac{1+i}{2}, \frac{-1+i}{2}\right).$$

Exercice 9

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ xy = 40 \end{cases}$$

5. Racine n-ième d'un nombre complexe

Propriété

Un nombre complexe non nul z admet exactement n racines n-ièmes distinctes, c'est-à-dire n nombres complexes Z tels que $Z^n = z$.

On pose $z = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ et $Z = \rho(\cos n\theta + i\sin n\theta)$. L'égalité $Z^n = z$ donne

$$\rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = R(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

d'où $\rho^n = R$ et $n\theta = \varphi + 2k\pi$, soit

$$\rho = \sqrt[n]{R}, \qquad \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \qquad k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}.$$

$$\boxed{Z_k = \sqrt[n]{R}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right]}$$

Exemple 10

Calculons les racines cubiques de $z = 1 + i$.

$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\theta = \dfrac{\pi}{4}$, et $z = \sqrt{2}\,e^{i\pi/4}$.

Les racines cubiques Z_k vérifient $Z_k^3 = z$, donc

$$Z_k = \left[\sqrt{2}\,e^{i(\pi/4 + 2k\pi)}\right]^{1/3} = \sqrt[6]{2}\,e^{i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)}, \qquad k = 0, 1, 2.$$

$$\begin{aligned}
Z_0 &= \sqrt[6]{2}\,e^{i\pi/12},\\
Z_1 &= \sqrt[6]{2}\,e^{i(\pi/12 + 2\pi/3)} = \sqrt[6]{2}\,e^{i(\pi/12 + 8\pi/12)} = \sqrt[6]{2}\,e^{i\,3\pi/4},\\
Z_2 &= \sqrt[6]{2}\,e^{i(\pi/12 + 4\pi/3)} = \sqrt[6]{2}\,e^{i(\pi/12 + 16\pi/12)} = \sqrt[6]{2}\,e^{i\,17\pi/12}.
\end{aligned}$$

Exemple 11

Calculons les racines cubiques de $z = -1 - i$.

$|z| = \sqrt{2}$, $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\theta = -\dfrac{3\pi}{4}$ $[2\pi]$.

$$Z_k = \left[\sqrt{2}\,e^{i(-3\pi/4 + 2k\pi)}\right]^{1/3} = \sqrt[6]{2}\,e^{i\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right)}, \qquad k = 0, 1, 2.$$

$$\begin{aligned}
Z_0 &= \sqrt[6]{2}\,e^{-i\pi/4},\\
Z_1 &= \sqrt[6]{2}\,e^{i(-3\pi/12 + 8\pi/12)} = \sqrt[6]{2}\,e^{i\,5\pi/12},\\
Z_2 &= \sqrt[6]{2}\,e^{i(-3\pi/12 + 16\pi/12)} = \sqrt[6]{2}\,e^{i\,13\pi/12}.
\end{aligned}$$

Exemple 12

Résolvons $z^4 = 1$ dans $\mathbb{C}$. On écrit $1 = e^{i\cdot 2k\pi}$, donc

$$z = \left(e^{i2k\pi}\right)^{1/4} = e^{ik\pi/2}, \qquad k = 0, 1, 2, 3.$$

$$z_0 = e^{i0} = 1, \quad z_1 = e^{i\pi/2} = i, \quad z_2 = e^{i\pi} = -1, \quad z_3 = e^{i3\pi/2} = -i.$$

Exercice 10

Déterminer :

a) la racine quatrième de $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, et de $z = -2 + 2i\sqrt{3}$;

b) la racine cubique de $z = -2 - 2i\sqrt{3}$, de $z = 2 + 2i$, de $z = -1 + i$ et de $z = -8$.

Exercice 11

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = 8\left(1 + i\sqrt{3}\right)$.

Exercice 12

Montrer que :

1) $e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left[e^{i\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)}\right]$.

2) $\forall x \in \mathbb{R}$, en écrivant $\cos x \cos y = \dfrac{1}{4}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\left(e^{iy} + e^{-iy}\right)$, on a

$$\cos x \cos y = \frac{1}{4}\Big[2\cos(x+y) + 2\cos(x-y)\Big], \qquad e^{ix} + e^{iy} = 2\,e^{i\frac{x+y}{2}}\cos\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

6. Interprétation géométrique

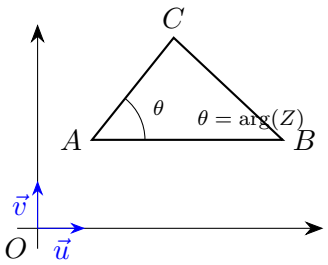
Propriété

Soient $A(z_A)$, $B(z_B)$ et $C(z_C)$ trois points du plan. Le nombre complexe

$$Z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$$

vérifie

$$|Z| = \left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \frac{|z_C - z_A|}{|z_B - z_A|} = \frac{AC}{AB}, \qquad \arg(Z) = \left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right)\ [2\pi].$$



Propriété

Soit $M(z)$, $A(z_A)$ et $B(z_B)$. L'ensemble des points $M(z)$ tels que

$$|z - z_A| = |z - z_B| \qquad \text{(c'est-à-dire } AM = MB\text{)}$$

est la médiatrice du segment $[AB]$.

L'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que $|z - z_A| = R$ (avec $R \in \mathbb{R}_+^*$) est le cercle de centre A et de rayon R.

Propriété

- Si $Z \in i\mathbb{R}$, le triangle ABC est rectangle en A.
- Si $|Z| = 1$, le triangle ABC est isocèle en A.
- Si $Z = \pm i$, le triangle ABC est rectangle et isocèle en A.
- Si $Z = e^{\pm i\pi/3}$, le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 13

Soit le nombre complexe $z = (z - 2i)(\bar{z} - 1)$, avec $z = x + iy$. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que z soit un réel.

Amorce (méthode) :

$$\begin{aligned} z &= (x + iy - 2i)(x - iy - 1) \\ &= x^2 - ixy - x + ixy + y^2 - iy - 2ix - 2y + 2i \\ &= x^2 - x + y^2 - 2y + i\,(-y - 2x + 2)\,. \end{aligned}$$

z est réel si et seulement si $\mathrm{Im}(z) = 0$, c'est-à-dire $-y - 2x + 2 = 0$, soit $y = 2 - 2x$: l'ensemble cherché est la droite d'équation $y = 2 - 2x$.

Exercice 14

Soit le nombre complexe $z = (z - 2i)(\bar{z} - 1)$, avec $z = x + iy$. Déterminer l'ensemble des points $M(z = x + iy)$ tels que :

1) $z = 8 + \dfrac{4}{z}$ soit réel.
2) $z = (z - 2i)(\bar{z} - 1)$ soit un imaginaire pur.
3) $|3 + i| \neq |3| + 1$.
4) $z\bar{z} + (z + \bar{z}) = 0$.

Exercice 15

Déterminer l'ensemble des points $M(z = x + iy)$ tels que $z = \dfrac{iz}{z+1}$ soit un imaginaire pur.

6.1 Propriétés du module et de l'argument

Propriété

Soient $z = \rho e^{i\theta}$ et $z' = \rho' e^{i\theta'}$ deux nombres complexes non nuls.

$$
\begin{array}{lll}
zz' = \rho\rho'\, e^{i(\theta+\theta')}, & |zz'| = \rho\rho', & \arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi], \\
\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{\rho}\, e^{-i\theta}, & \left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{\rho}, & \arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z)\ [2\pi], \\
\dfrac{z}{z'} = \dfrac{\rho}{\rho'}\, e^{i(\theta-\theta')}, & \left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{\rho}{\rho'}, & \arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi], \\
z^n = \rho^n\, e^{in\theta}, & |z^n| = \rho^n, & \arg(z^n) = n\arg(z)\ [2\pi], \\
\bar{z} = \rho\, e^{-i\theta}, & |\bar{z}| = |z|, & \arg(\bar{z}) = -\arg(z)\ [2\pi].
\end{array}
$$

Équations complexes des transformations du plan

Soient $M(z)$, $M'(z')$, $\vec{u}(a)$ un vecteur, $\Omega(\omega)$ un point, $k \in \mathbb{R}^*$, $\theta \in \mathbb{R}$.

1) $z' = z + a$: translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe a.
2) $z' - \omega = k(z - \omega)$: homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k.
3) $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$: rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ.
4) $z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega)$, soit $z' = az + b$: similitude directe de rapport $k = |a|$, d'angle $\theta = \arg(a)$, de centre $\Omega(\omega)$ $(a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, b \in \mathbb{C})$.

Le centre de la transformation est aussi appelé **point invariant**, c'est-à-dire $T(\Omega) = \Omega$, soit $z' = z$.

7. Transformations du plan

Exemple 13

Soit la similitude directe S : $z' = (1+i)z + 2$.

1) Rapport de la similitude : $k = |a|$ avec $a = 1+i$, donc $k = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$.
2) Angle de la similitude : $\theta = \arg(a) = \arg(1+i)$.

$$1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

donc $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

3) Point invariant : $\omega = (1+i)\omega + 2 \iff \omega - (1+i)\omega = 2 \iff -i\,\omega = 2 \iff \omega = \dfrac{2}{-i} = \dfrac{-2i}{-i\cdot i} = \dfrac{-2i}{1}\cdot(-1)$, soit $\omega = 2i$.
Le point invariant, centre de la similitude, est $\Omega(2i)$.
4) Image de $B(1-i)$ par S : $f(z) = (1+i)z + 2$,

$$z' = f(z_B) = (1+i)(1-i) + 2 = 1 - i^2 + 2 = 1 + 1 + 2 = 4.$$

L'image de B est $B'(4)$.

Exemple 14

Soit $f : z' = z + 3 - 2i$. f est une translation de vecteur $\vec{u}(3-2i)$.

Exemple 15

Soit $T : z \mapsto z' = 2z$. On a $z' = 2z \iff z' - 0 = 2(z-0)$, donc T est une homothétie de rapport 2 et de centre $O(0)$.

Exemple 16

Soit $z' = e^{i\pi/2}z$. Alors $z' - 0 = e^{i\pi/2}(z-0)$: rotation de centre O et d'angle $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

Exemple 17

Soit $g : z \mapsto z' = -z + 4$. On a $2z = -z + 4 + z = 4\ldots$ en posant $z' = z$: $z = -z + 4 \iff 2z = 4 \iff z = 2$. g est une symétrie centrale de centre $\Omega(2)$.

Exercice 16

Soit la transformation f du plan complexe : $M(z) \mapsto M'(z')$ telle que $z' = (1-i)z + 2i$.

1) Déterminer le point invariant par f.
2) Donner la nature et les éléments caractéristiques de f.

Exercice 17

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct, soit $\Omega(\omega = 1+2i)$ et $A(z_A = 3-i)$.

1) Donner l'écriture complexe de la rotation R de centre $A(1+2i)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.
2) Déterminer l'affixe du point B', image du point $B(3-i)$ par R.

Exercice 18

Dans le plan complexe, $A(z_A = i)$, $B(z_B = 2)$ et $C(z_C = 1-i)$. Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe S qui transforme A en B, et B en C. Déterminer le centre de S.

Exercice 19

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, soit $A(z_A = 2-3i)$ et $B(z_B = -1+i)$.

a) Déterminer l'écriture complexe de la translation t de vecteur $\vec{u}\,(z_{\vec{u}} = 4+2i)$.

b) Calculer l'affixe du point A', image de A par t.

c) Déterminer l'affixe du point C, image de B par t.

Exercice 20

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, soit $\Omega(\omega = 1+2i)$ et $A(z_A = 3-i)$.

a) Déterminer l'écriture complexe de l'homothétie h de centre Ω et de rapport $k = -2$.

b) Déterminer l'affixe de B dont l'image par l'homothétie h est $B'(z_{B'} = -3+8i)$.

Exemple 18

$A(3+5i)$, $B(3-5i)$ et $C(7+3i)$. Soit $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}(4-2i)$:

$$t_{\vec{u}}(M) = M' \iff \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \iff z' - z = 4-2i \iff z' = z+4-2i.$$

1) Démontrer que $t_{\vec{u}}(A) = C$:

$$z_C = z_A + 4 - 2i = (3+5i) + 4 - 2i = 7+3i. \checkmark$$

2) Déterminer $z_{B'}$ tel que $t_{\vec{u}}(B) = B'$:

$$z_{B'} = z_B + 4 - 2i = (3-5i) + 4 - 2i = 7-7i.$$

Exemple 19

Soit $A(z_A = 3+5i)$, $M'(z')$ et $M(z)$. Le centre de l'homothétie est $\Omega(3-2i)$, le rapport de l'homothétie $k = 4$.

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M} \iff z' - z_\Omega = 4(z - z_\Omega) \iff z' - (3-2i) = 4\big[z - (3-2i)\big],$$

$$z' = 4z - 12 + 8i + 3 - 2i, \qquad \boxed{z' = 4z - 9 + 6i}.$$

Exemple 20

Éléments caractéristiques de la similitude directe $z' = (-2+2i)z + 5 + i$.

- Rapport : $k = |-2+2i| = \sqrt{4+4} = \sqrt{2\times 4} = 2\sqrt{2}$.
- Angle : $\cos\theta = \dfrac{-2}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\theta = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, d'où $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$ $[2\pi]$.
- Point invariant : $\omega = (-2+2i)\omega + 5 + i \iff \omega(3-2i) = 5+i \iff \omega = \dfrac{5+i}{3-2i} = \dfrac{(5+i)(3+2i)}{13} = \dfrac{15+10i+3i-2}{13} = \dfrac{13+13i}{13} = 1+i.$

Le centre de la similitude est $\Omega(1+i)$, le rapport $k = 2\sqrt{2}$ et l'angle $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$.

Propriété

Si Ω, A et A' sont trois points du plan tels que $\Omega \neq A$ et $\Omega \neq A'$, il existe une unique similitude directe du plan de centre Ω qui transforme A en A'. Son rapport est $\dfrac{\Omega A'}{\Omega A}$ et son angle est $\theta = \left(\overrightarrow{\Omega A}\,;\,\overrightarrow{\Omega A'}\right)$.

Exemple 21

Soit $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, $M(z) \mapsto M'(z')$ telle que

$$\begin{cases} x' = x - \sqrt{3}\,y \\ y' = \sqrt{3}\,x + y - \sqrt{3} \end{cases}$$

1) Déterminer l'expression complexe de f, en déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

Avec $z = x + iy$:

$$\begin{aligned} z' = x' + iy' &= (x - \sqrt{3}y) + i(\sqrt{3}x - \sqrt{3} + y) \\ &= x + i\sqrt{3}x - \sqrt{3}y + iy - i\sqrt{3}. \end{aligned}$$

En écrivant $x = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$ ... plus simplement, en identifiant $z' = az + b$ avec $x = \mathrm{Re}(z)$, $y = \mathrm{Im}(z)$:

$$z' = (1 + i\sqrt{3})\,z - i\sqrt{3}.$$

- Rapport : $k = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2$.
- Angle : $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$, $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, donc $\theta = \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.
- Centre : $\omega = (1 + i\sqrt{3})\omega - i\sqrt{3} \iff \omega(1 - 1 - i\sqrt{3}) = -i\sqrt{3} \iff \omega(-i\sqrt{3}) = -i\sqrt{3} \iff \omega = 1$.

Le centre de la similitude est $\Omega(z = 1)$, de rapport $k = 2$ et d'angle $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

8. Lieux géométriques

8.1 Ensembles définis par un module

Propriété

$|z-a| = |\bar{z}-b|$: penser à $|z| = |\bar{z}|$, donc cette égalité équivaut à $|\bar{z}-a| = |z-b|$ (selon les valeurs de a, b).

Le lieu $|z - z_A| = R$ (avec $R \in \mathbb{R}_+^*$) est le cercle de centre A et de rayon R.

Exemple 22

1) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z-2| = |z-3+i|$: c'est la médiatrice de $[AB]$ avec $A(2)$ et $B(3-i)$.
2) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z-2| = |\bar{z}+5-3i|$: en utilisant $|z| = |\bar{z}|$, on a $|z-2| = |z+5-3i|$: médiatrice de $[AB]$ avec $A(2)$, $B(-5+3i)$.
3) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|3iz+6| = |3iz-3+9i|$.

$$|3iz+6| = |3i(z+2)| = 3|z+2|, \qquad |3iz-3+9i| = |3i(z+i+3)| = 3|z+i+3|.$$

L'égalité $3|z+2| = 3|z+i+3|$ équivaut à $|z+2| = |z+i+3|$: médiatrice de $[AB]$ avec $A(-2)$, $B(-3-i)$.

Exemple 23

Déterminons l'ensemble des points M du plan tels que $|z-i| = 1$. En posant $z = x+iy$:

$$|z-i| = |x+i(y-1)| = \sqrt{x^2+(y-1)^2} = 1 \iff x^2+(y-1)^2 = 1.$$

$M(z = x+iy)$ décrit le cercle $\mathcal{C}\,(A(0;1)\,,\, R=1)$.

Exemple 24

Déterminons l'ensemble des points M du plan tels que $|z-1|+|z+1| = 3$. On pose $z = x+iy$:

$$|z-1| = \sqrt{(x-1)^2+y^2}, \qquad |z+1| = \sqrt{(x+1)^2+y^2}.$$
$$\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2} = 3 \implies \sqrt{(x+1)^2+y^2} = 3-\sqrt{(x-1)^2+y^2}.$$

En élevant au carré :

$$(x+1)^2+y^2 = 9-6\sqrt{(x-1)^2+y^2}+(x-1)^2+y^2,$$
$$x^2+2x+1 = 9-6\sqrt{(x-1)^2+y^2}+x^2-2x+1,$$
$$4x-9 = -6\sqrt{(x-1)^2+y^2}.$$

En élevant à nouveau au carré :

$$(4x-9)^2 = 36\big[(x-1)^2+y^2\big], \qquad 16x^2-72x+81 = 36(x-1)^2+36y^2,$$
$$16x^2-72x+81 = 36x^2-72x+36+36y^2,$$
$$81-36 = 36x^2-16x^2+36y^2, \qquad 45 = 20x^2+36y^2.$$

En divisant par 45 :

$$\frac{20}{45}x^2+\frac{36}{45}y^2 = 1 \iff \frac{4}{9}x^2+\frac{4}{5}y^2 = 1 \iff \frac{x^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2} = 1.$$

L'ensemble des points M décrit une ellipse de centre O, de demi-axes $\dfrac{3}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Exemple 25

Déterminons l'ensemble des points $M(z)$ tels que $\arg\left(\dfrac{z-2-3i}{z-3+i}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Avec $A(2+3i)$ et $B(3-i)$: $\arg\left(\dfrac{z-z_A}{z-z_B}\right) = \left(\overrightarrow{MB}\,;\,\overrightarrow{MA}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Le triangle ABM est donc rectangle en M : l'ensemble cherché est le demi-cercle supérieur de diamètre $[AB]$, privé de A et de B.

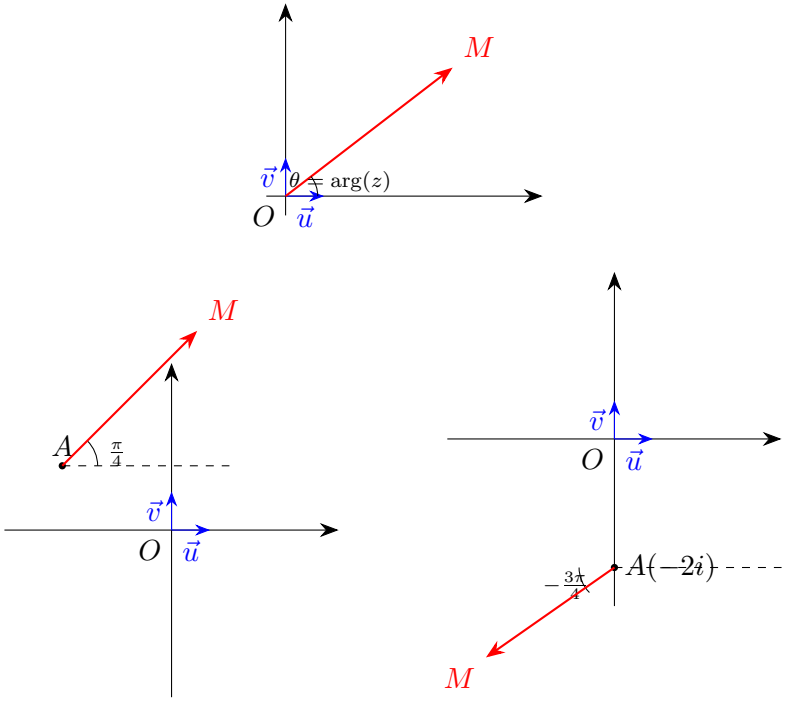
Si la condition est donnée modulo π (c'est-à-dire $\left(\overrightarrow{MB}\,;\,\overrightarrow{MA}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$), l'ensemble cherché est le **cercle** de diamètre $[AB]$ tout entier, privé de A et B.

8.2 Ensembles définis par un argument

Propriété

Soit $A(z_A)$. L'ensemble des points $M(z)$ tels que $\arg(z-z_A) = \theta\ [2\pi]$ est la **demi-droite** $[AM)$ privée de A, faisant un angle θ avec l'axe des abscisses (ou une droite parallèle à cet axe passant par A).

Modulo π, l'ensemble est la **droite** (AM) privée de A.



À gauche : $\arg(z-z_A) = \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$ (demi-droite privée de A). À droite : $\arg(z+2i) = -\dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]$ (demi-droite privée de $A(-2i)$).

Exemple 26

Déterminons l'ensemble des points M du plan tels que $\arg(iz) = \dfrac{\pi}{3}\ [\pi]$.

$\arg(iz) = \arg(i) + \arg(z)\ [\pi]$, donc $\dfrac{\pi}{2} + \arg(z) = \dfrac{\pi}{3}\ [\pi]$, d'où $\arg(z) = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{2} = -\dfrac{\pi}{6}\ [\pi]$, soit $\left(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{OM}\right) = -\dfrac{\pi}{6}\ [\pi]$.

L'ensemble cherché est la droite (OM) privée de O, faisant un angle $-\dfrac{\pi}{6}$ avec $\vec{u}$.

Exemple 27

Déterminons l'ensemble des points M tels que $\arg(\bar{z}-3+i)=\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$.
On utilise $\arg(\bar{z})=-\arg(z)$: $\overline{z-3-i}=\bar{z}-3+i$, donc

$$\arg(\bar{z}-3+i)=\arg\left(\overline{z-3-i}\right)=-\arg(z-3-i)=\frac{\pi}{4}\ [2\pi]\iff \arg(z-3-i)=-\frac{\pi}{4}\ [2\pi].$$

On prend $M(z)$ et $A(3+i)$: l'ensemble cherché est la demi-droite $[AM)$ privée de A, faisant un angle $-\dfrac{\pi}{4}$ avec la parallèle à l'axe des abscisses passant par A.

Exemple 28

En posant $z=x+iy$, déterminons l'ensemble des points $M(z)$ tels que $\arg(z-1+2i)=\dfrac{\pi}{3}$.
On pose $A(z_A=1-2i)$. On a $z-1+2i=x-1+i(y+2)$, et

$$\arg\big(x-1+i(y+2)\big)=\frac{\pi}{3}\iff \tan\frac{\pi}{3}=\frac{y+2}{x-1}\iff \sqrt{3}\,(x-1)=y+2,$$

soit $y=\sqrt{3}\,x-2-\sqrt{3}$: l'ensemble cherché est (une partie de) cette droite.

Exemple 29

En posant $z=x+iy$, déterminons l'ensemble des points $M(z)$ tels que $\arg(z+2i)=\dfrac{\pi}{4}$.

$$\arg\big(x+i(y+2)\big)=\frac{\pi}{4}\iff \tan\frac{\pi}{4}=\frac{y+2}{x}\iff 1=\frac{y+2}{x}\iff x=y+2\iff y=x-2.$$

L'ensemble cherché est la droite (AM) d'équation $y=x-2$.

Exemple 30

Déterminons l'ensemble des points M tels que $\arg\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)=\dfrac{\pi}{4}$. En posant $z=x+iy$:

$$\frac{z-i}{z+i}=\frac{x+i(y-1)}{x+i(y+1)}=\frac{\big[x+i(y-1)\big]\big[x-i(y+1)\big]}{x^2+(y+1)^2}=\frac{x^2+y^2-1+i(-2x)}{x^2+(y+1)^2}.$$

On pose $X=\dfrac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}$ et $Y=\dfrac{-2x}{x^2+(y+1)^2}$, avec $\arg(X+iY)=\dfrac{\pi}{4}$, soit $\tan\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{Y}{X}=1$:

$$\frac{-2x}{x^2+(y+1)^2}\times\frac{x^2+(y+1)^2}{x^2+y^2-1}=1\iff\frac{-2x}{x^2+y^2-1}=1\iff x^2+2x-y^2=1,$$

$$(x+1)^2-y^2=2.$$

L'ensemble cherché est une branche d'hyperbole.

Exemple 31

Déterminons l'ensemble des points M tels que $\arg(z+2)=\dfrac{\pi}{2}$, puis $\arg\big(z(z-1)\big)=\dfrac{\pi}{2}$.
Pour $\arg(z+2)=\dfrac{\pi}{2}$: en posant $z=x+iy$, $\tan\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{y}{x+2}$ (limite infinie), ce qui impose $x+2=0$ avec $y\in\mathbb{R}^*$: demi-droite verticale $x=-2$, $y>0$ (privée du point $(-2;0)$).
Pour $\arg\big(z(z-1)\big)=\dfrac{\pi}{2}$: en posant $z=x+iy$,

$$z(z-1)=(x+iy)(x-1+iy)=x^2-x+ixy+ixy-y-y^2=\big(x^2-x-y^2\big)+i(2xy-y).$$

$\tan\dfrac{\pi}{2} \to +\infty$ impose $x^2 - x - y^2 = 0$ (avec $y \neq 0$, $x \neq 0$), soit

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - y^2 = \frac{1}{4}.$$

L'ensemble cherché est une hyperbole d'équation $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - y^2 = \dfrac{1}{4}$ (privée des points où $y = 0$).

Exercice 21

En posant $z = x + iy$, déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que :

1) $\arg(z-1) = \dfrac{\pi}{4}$
2) $\arg\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right) = \dfrac{\pi}{3}$
3) $\arg(z-1-i) = \dfrac{\pi}{3}$
4) $\arg(z-3i) = \dfrac{3\pi}{4}$
5) $\arg\left(\dfrac{z-3}{z+3}\right) = \dfrac{\pi}{3}$
6) $\arg(z-4-i) = \dfrac{\pi}{6}$
7) $\arg\left(\dfrac{z+2}{z}\right) = \dfrac{\pi}{2}$, $z \neq 0$
8) $\arg\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

Exercice 22

Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que :

1) $\arg(z) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$
2) $\arg(z) = \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$
3) $\arg(z+3+i) = \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$
4) $\arg\left(\dfrac{z-2-3i}{z+3+2i}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$
5) $\arg\left(\dfrac{z-2-3i}{z-3+2i}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$
6) $\arg\left(\dfrac{z-2+i}{1+i}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$
7) $\arg(\bar{z}-1+2i) = \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$
8) $\arg\left(\dfrac{z}{1+i}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

Exercice 23

Déterminer le lieu géométrique des points $M(z)$ tels que :

1) $|z-i| = |z+i|$
2) $|z-3+i| = |z+5-2i|$
3) $|(1+i)z - 2i| = 2$
4) $|3+iz| = |3-iz|$

Thème 9

Fonction Logarithme Népérien
Calcul Intégral

Sommaire

1. Rappels sur les fonctions réciproques
2. La fonction logarithme népérien
   - 2.1. Définition et premières conséquences
   - 2.2. Propriétés algébriques
   - 2.3. Résolution d'équations
3. Étude de la fonction ln
   - 3.1. Limites de référence
   - 3.2. Tableau de variation et courbe représentative
   - 3.3. Tangentes remarquables
   - 3.4. Croissances comparées
4. Dérivée de $\ln(u)$ et primitives en $\ln|u|$
5. Problème de synthèse (fonctions g, h, f et suite (u_n))
6. Calcul intégral
   - 6.1. Primitive et théorème fondamental
   - 6.2. Intégrale sur un intervalle non borné
   - 6.3. Domaine situé sous une courbe
   - 6.4. Valeur moyenne et propriétés de l'intégrale
   - 6.5. Exercices résolus
7. Exercices proposés

1 Rappels sur les fonctions réciproques

Propriété. Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I telle que $f'(x) > 0$ (respectivement $f'(x) < 0$) alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$, et sa réciproque f^{-1} est dérivable sur $f(I)$.

2 La fonction logarithme népérien

2.1 Définition et premières conséquences

Définition. La fonction logarithme népérien, notée ln, est la primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$ qui s'annule en 1.

Conséquences

- La fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad \text{ou} \qquad \ln'(x) = \frac{1}{x}$$

- $\ln(1) = 0$
- Il existe un unique réel e tel que $\ln(e) = 1$.

2.2 Propriétés algébriques

Propriété. Pour tous réels x et y strictement positifs, on a :

$$\begin{aligned}
\forall p \in \mathbb{R}, \quad & \ln(x^p) = p\ln(x) \\
& \ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y) \\
& \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y) \\
& \ln\left(\frac{1}{y}\right) = \ln(1) - \ln(y) = 0 - \ln(y) = -\ln(y) \\
& \ln(\sqrt{x}) = \ln\left(x^{1/2}\right) = \frac{1}{2}\ln(x) \\
& e^{\ln(x)} = x
\end{aligned}$$

Propriété. La fonction ln est une bijection croissante de $]0\,;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

$$\ln(x) = \ln(y) \iff x = y \qquad \ln(x) < \ln(y) \iff x < y$$

2.3 Résolution d'équations

Exemple. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $7^x = 9$.

$$\begin{aligned}
7^x = 9 &\iff \ln(7^x) = \ln(9) \\
&\iff x\ln(7) = \ln(3^2) \\
&\iff x\ln(7) = 2\ln(3) \\
&\iff x = \frac{2\ln(3)}{\ln(7)}
\end{aligned}$$

△ **Attention.**

$$\frac{\ln(x)}{\ln(y)} \neq \ln(x) - \ln(y) \qquad \ln(x \pm y) \neq \ln(x) \pm \ln(y)$$

Exemple. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $5^{3x} = 2^{7x-2}$.

$$\begin{aligned} 5^{3x} = 2^{7x-2} &\iff \ln\left(5^{3x}\right) = \ln\left(2^{7x-2}\right) \\ &\iff 3x\ln(5) = (7x-2)\ln(2) \\ &\iff 3x\ln(5) = 7x\ln(2) - 2\ln(2) \\ &\iff 3x\ln(5) - 7x\ln(2) = -2\ln(2) \\ &\iff x\big[3\ln(5) - 7\ln(2)\big] = -2\ln(2) \\ &\iff x = \frac{-2\ln(2)}{3\ln(5) - 7\ln(2)} \end{aligned}$$

$$\boxed{x = \frac{2\ln(2)}{7\ln(2) - 3\ln(5)}}$$

Exemple. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2e^{2x+4} - 8 = 0$.

$$\begin{aligned} 2e^{2x+4} - 8 = 0 &\iff 2e^{2x+4} = 8 \\ &\iff e^{2x+4} = 4 \\ &\iff \ln\left(e^{2x+4}\right) = \ln(4) \\ &\iff 2x + 4 = \ln(4) \\ &\iff 2x = \ln(4) - 4 \\ &\iff x = \frac{\ln(4) - 4}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{x = \ln(2) - 2}$$

Exercice 1 — équation à résoudre.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(2x+1) + \ln(x-2) = \ln(x+9)$.

3 Étude de la fonction ln

3.1 Limites de référence

Propriété.

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$$

Calcul de $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h}$. On utilise le taux d'accroissement de ln en 1 :

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Avec $f = \ln$, on a $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$, donc $\ln'(1) = \dfrac{1}{1} = 1$. Or

$$\ln'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h}$$

D'où

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1}$$

Calculs de limites. • $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(7x^3 - x^2 + 1\right)$

Posons $u = 7x^3 - x^2 + 1$. Quand $x \to +\infty$, $u \to +\infty$ (car $7x^3 - x^2 + 1$ est une fonction polynôme dont le terme dominant $7x^3$ tend vers $+\infty$). Donc

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(7x^3 - x^2 + 1\right) = \lim_{u\to+\infty} \ln u = +\infty$$

• $\lim\limits_{x\to 0^+} \left[10x - 5\ln x\right]$

$$\lim_{x\to 0^+} \left[10x - 5\ln x\right] = \lim_{x\to 0^+} 10x \;-\; 5 \lim_{x\to 0^+} \ln x = \text{“}0 - 5(-\infty)\text{”} = \text{“} + \infty\text{”}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \left[10x - 5\ln x\right] = +\infty$$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[10x - 5\ln x\right]$

$$10x - 5\ln x = x\left[10 - 5\frac{\ln x}{x}\right]$$

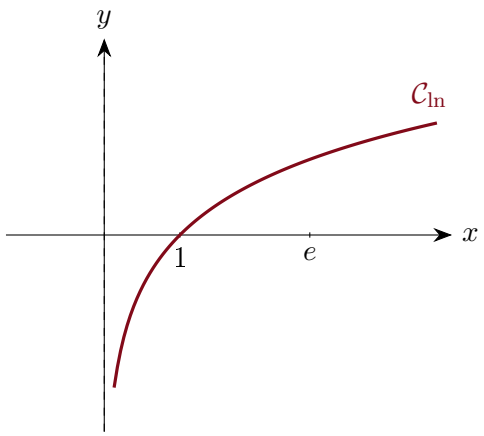
$$\lim_{x\to+\infty} \left[10 - 5\frac{\ln x}{x}\right] = 10 - 5\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 10 - 5(0) = 10$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left[10x - 5\ln x\right] = \lim_{x\to+\infty} x \times \lim_{x\to+\infty} \left[10 - 5\frac{\ln x}{x}\right] = \text{“}(+\infty)(10)\text{”} = +\infty$$

3.2 Tableau de variation et courbe représentative

La fonction $f(x) = \ln x$ est définie, continue et dérivable sur $]0\,;+\infty[$, avec $f'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$.

x	0	$+\infty$
$f'(x) = \frac{1}{x}$	$+$	
$f(x) = \ln x$	$-\infty$ ↗	$+\infty$



La fonction ln réalise une bijection croissante de $]0\,;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$, avec pour asymptote la droite d'équation $x = 0$.

3.3 Tangentes remarquables

L'équation de la tangente T_a à la courbe de f au point d'abscisse a est

$$T_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Tangente en $x = 1$. $f(x) = \ln x$, $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, donc $f(1) = \ln(1) = 0$ et $f'(1) = \dfrac{1}{1} = 1$.

$$T_1 : y = 1 \times (x-1) + 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{T_1 : y = x - 1}$$

Tangente en $x = e$. $f(e) = \ln(e) = 1$, $f'(e) = \dfrac{1}{e}$.

$$T_e : y = \frac{1}{e}(x-e) + 1 = \frac{1}{e}x - \frac{1}{e} \times e + 1 = \frac{1}{e}x - 1 + 1$$

$$\boxed{T_e : y = \frac{1}{e}x}$$

3.4 Croissances comparées

Propriété.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0 \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

4 Dérivée de $\ln(u)$ et primitives en $\ln|u|$

Propriété. On note $\ln \circ u$ ou $\ln(u)$. Si $f = \ln(u)$ où u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle, alors f est dérivable sur cet intervalle et

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u} \qquad \text{et} \qquad (\ln|u|)' = \frac{u'}{u} \quad (u \text{ ne s'annulant pas})$$

Exemple. $f(x) = \ln\left(x^2 - 4x - 5\right)$, $f'(x) = ?$

Posons $u = x^2 - 4x - 5$. On a $f = \ln u$ et $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, avec $u' = 2x - 4$.

$$\boxed{f'(x) = \frac{2x - 4}{x^2 - 4x - 5}}$$

Exemple. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$, $f'(x) = ?$

$\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = \ln x - \ln(x+1)$, donc $f'(x) = \left(\ln x - \ln(x+1)\right)'$.

$\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$ $\qquad$ $\ln'(x+1) = \dfrac{(x+1)'}{x+1} = \dfrac{1}{x+1}$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-x}{x(x+1)}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{x(x+1)}}$$

Exercice 2.
Soit f la fonction définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

a) Calculer $f'(x)$.

b) Étudier le signe de $f'(x)$.

Corrigé

a) La fonction $x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction $x \mapsto x$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$f'(x) = \frac{(\ln x)' x - (\ln x) x'}{x^2} = \frac{\dfrac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}}$$

b) $f'(x) = 0 \iff 1 - \ln x = 0$ (avec $x^2 \neq 0$), soit $\ln x = 1$, donc $x = e$.

x	0		e		$+\infty$
$1 - \ln x$		$+$	0	$-$	
x^2		$+$		$+$	
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	

Exemple. Déterminer la dérivée de :

1) $f(x) = \ln\left(x^2\right)$

2) $f(x) = \ln(5x+3)$

3) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

Primitive de u'/u. Si u est une fonction dérivable ne s'annulant pas sur un intervalle I, alors la fonction $\dfrac{u'}{u}$ admet sur I des primitives de la forme

$$\ln|u| + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

Exemple. Déterminer une primitive de :

1) $\mathcal{D}_f =]0\,;+\infty[$, $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+2}$.

$u = x^2+2$, $u' = 2x$. On a $f = \dfrac{u'}{u}$, donc $F = \ln|u| + C$, $C \in \mathbb{R}$. Comme $x^2+2 > 0$:

$$\boxed{F(x) = \ln\left(x^2+2\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}}$$

2) $\mathcal{D}_f =]-4\,;1[$, $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+3x-4}$.

$u = x^2+3x-4$, $u' = 2x+3$.

$$\boxed{F(x) = \ln\left|x^2+3x-4\right| + C, \quad C \in \mathbb{R}}$$

3) $\mathcal{D}_f = \left]-\infty\,;\dfrac{2}{3}\right[$, $f(x) = \dfrac{3}{3x-2}$.

$u = 3x-2$, $u' = 3$.

$$\boxed{F(x) = \ln|3x-2| + C, \quad C \in \mathbb{R}}$$

Exemple. Déterminer $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx$.

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \frac{1}{x} \times \ln x\,dx$$

Or $\displaystyle\int u'u$ admet pour primitive $\dfrac{1}{2}u^2 + C$, donc, avec $u = \ln x$ et $u' = \dfrac{1}{x}$:

$$\boxed{\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\left[\ln x\right]^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}}$$

Exercice 3.

Étude de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$.

Corrigé

1) Ensemble de définition. f est définie si, et seulement si, $x \ln x \neq 0$, avec $x > 0$. Or

$$x \ln x = 0 \iff x = 0 \text{ ou } \ln x = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 1$$

Comme $x > 0$, on exclut $x = 1$ (et $x = 0$ n'appartient pas au domaine de ln). Donc

$$\mathcal{D}_f =]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$$

2) Dérivée de f. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathcal{D}_f$, la fonction $x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $\mathcal{D}_f$, donc f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathcal{D}_f$.

$$f'(x) = \frac{\left(\dfrac{1}{x}\right)' \ln x - \dfrac{1}{x}(\ln x)'}{(\ln x)^2} = \frac{-\dfrac{1}{x^2}\ln x - \dfrac{1}{x} \times \dfrac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{-\dfrac{\ln x}{x^2} - \dfrac{1}{x^2}}{(\ln x)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = -\frac{\ln x + 1}{x^2 (\ln x)^2} = -\frac{\ln x + 1}{(x \ln x)^2}}$$

f' s'annule si, et seulement si, $\ln x + 1 = 0$ (avec $x \ln x \neq 0$), soit $\ln x = -1$, donc $x = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$ (avec $x \neq 0$ et $x \neq 1$).

Signe de $f'(x)$

x	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
$\ln x + 1$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
$(x \ln x)^2$		$+$	‖	$+$	‖	$+$	
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	

Ainsi f est croissante sur $\left]0\,;\dfrac{1}{e}\right[$ et décroissante sur $\left]\dfrac{1}{e}\,;1\right[$ et sur $]1\,;+\infty[$.

3) Limites.

• En 0^+ : $\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0^-$ (car $x > 0$ tend vers 0 et $\ln x \to -\infty$, donc le produit tend vers 0 par valeurs négatives). D'où

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \text{“}\frac{1}{0^-}\text{”} = -\infty$$

• En 1 :

x	0		1		$+\infty$
x		$+$		$+$	
$\ln x$		$-$	0	$+$	
$x \ln x$		$-$	0	$+$	

$$\lim_{x\to 1^-} x\ln x = 0^- \qquad \lim_{x\to 1^+} x\ln x = 0^+$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \text{“}\frac{1}{0^-}\text{”} = -\infty \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \text{“}\frac{1}{0^+}\text{”} = +\infty$$

• En $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x = +\infty$, d'où

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \text{“}\frac{1}{+\infty}\text{”} = 0$$

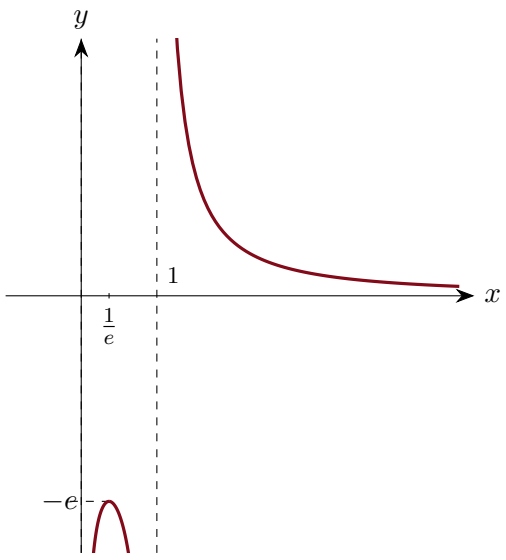
On calcule également

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{\frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{e}\times(-1)} = \frac{1}{-\frac{1}{e}} = -e$$

4) Tableau de variation

x	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$-e$	↘	‖ $-\infty$	↘	$+\infty$ → 0

5) Courbe représentative



Asymptotes verticales $x = 0$ et $x = 1$; asymptote horizontale $y = 0$ en $+\infty$.

5 Problème de synthèse

Partie A

Soit la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$.

1) Étudier les variations de g sur $]0\,;+\infty[$, dresser le tableau de variation de g sur $]0\,;+\infty[$.

2) Calculer $g(1)$. En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

Partie B

Soit la fonction h définie sur $I = [1\,;+\infty[$ par $h(x) = x - 1 - \dfrac{\ln(x)}{x}$.

1) Montrer que $\forall\, x \in [1\,;+\infty[,\ h'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

2) À l'aide du signe de $g(x)$, dresser le tableau de variation complet de la fonction h sur $[1\,;+\infty[$ (calculer la limite en $+\infty$).

3.1) Démontrer que l'équation $h(x) = 2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[2\,;4]$.

3.2) Justifier que $3{,}3 < \alpha < 3{,}4$.

Partie C

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[2\,;4]$ par $f(x) = 1 + \dfrac{\ln x}{x}$.

1) Vérifier que l'égalité $h(\alpha) = 2$ est équivalente à l'écriture $f(\alpha) = \alpha$.

2) On admet que pour tout $x \in [2\,;4]$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{4}$. En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction f, démontrer que pour tout $x \in [2\,;4]$:

$$|f(x) - \alpha| \leqslant \frac{1}{4}|x - \alpha|$$

3) Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_0 = 2$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

   a) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $2 \leqslant u_n \leqslant 4$.

   b) À l'aide de la question précédente, prouver que pour tout entier n : $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{4}|u_n - \alpha|$.

   c) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{1}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$.

   d) Déterminer la limite de la suite (u_n).

6 Calcul intégral

6.1 Primitive et théorème fondamental

Rappel. Une fonction F continue et dérivable sur un intervalle I est une primitive de f sur I si $F'(x) = f(x)$.

Théorème fondamental. Sur un intervalle I, avec a et b des éléments de I, si F est une primitive de f sur I, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Exemple. Calculer $\displaystyle\int_1^2 \left(x^3+5\right)dx = \left[\frac{1}{4}x^4+5x\right]_1^2$.

Posons $F(x) = \dfrac{1}{4}x^4+5x$.

$$\begin{aligned} F(2)-F(1) &= \frac{1}{4}(2)^4+5(2)-\left(\frac{1}{4}(1)^4+5(1)\right) \\ &= \frac{16}{4}+10-\left(\frac{1}{4}+5\right) \\ &= 4+10-\left(\frac{1}{4}+5\right) = 14-\frac{21}{4} = \frac{56}{4}-\frac{21}{4} = \frac{35}{4} \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_1^2 \left(x^3+5\right)dx = \frac{35}{4}}$$

Exemple. Calculer $\displaystyle\int_1^9 x\sqrt{x}\,dx$.

$$\int_1^9 x\sqrt{x}\,dx = \int_1^9 x\times x^{1/2}\,dx = \int_1^9 x^{3/2}\,dx = \left[\frac{x^{5/2}}{5/2}\right]_1^9 = \left[\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}\right]_1^9$$

$$\begin{aligned} F(9)-F(1) &= \frac{2}{5}(9)^2\sqrt{9}-\frac{2}{5}(1)^2\sqrt{1} = \frac{2}{5}(81)(3)-\frac{2}{5}(1)(1) \\ &= \frac{486}{5}-\frac{2}{5} = \frac{484}{5} \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_1^9 x\sqrt{x}\,dx = \frac{484}{5} = 96{,}8}$$

6.2 Intégrale sur un intervalle non borné

Calcul de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ par l'exemple. Calculons $\displaystyle\int_{-\infty}^1 \frac{1}{x^2}\,dx$.

On pose $\lambda = -\infty$. On a $I(\lambda) = \displaystyle\int_\lambda^1 \frac{1}{x^2}\,dx$ et

$$\int_{-\infty}^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\lambda\to-\infty}\int_\lambda^1 \frac{1}{x^2}\,dx$$

Or

$$\int_\lambda^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \int_\lambda^1 x^{-2}\,dx = \left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right]_\lambda^1 = \left[-\frac{1}{x}\right]_\lambda^1 = -\frac{1}{1}-\left(-\frac{1}{\lambda}\right)$$

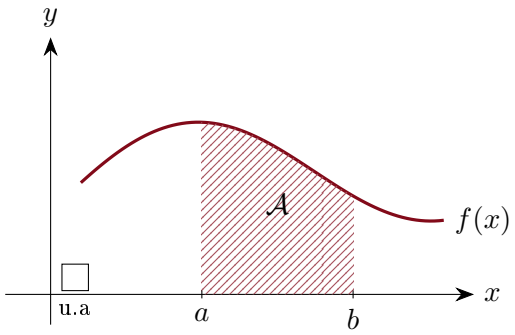
$$\int_\lambda^1 \frac{1}{x^2}\,dx = -1+\frac{1}{\lambda}$$

On calcule $I = \lim\limits_{\lambda \to -\infty} I(\lambda)$:

$$\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\lambda \to -\infty} \left(-1 + \frac{1}{\lambda}\right)$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = -1}$$

6.3 Domaine situé sous une courbe

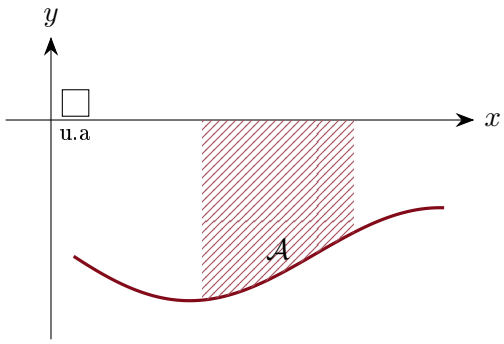


Définition. On appelle domaine situé sous la courbe de f l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;y)$ du plan tels que

$$\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$$

Remarque. Le domaine situé sous la courbe admet une aire.

$$\text{Pour } a = b, \quad \int_a^a f(x)\,dx = 0$$



Lorsque $f(x) \leqslant 0$ sur $[a\,;b]$, l'aire $\mathcal{A}$ (exprimée en unités d'aire) est

$$\mathcal{A} = -\int_a^b f(x)\,dx \times \text{u.a}$$

6.4 Valeur moyenne et propriétés de l'intégrale

Valeur moyenne. On suppose $a < b$. On appelle valeur moyenne d'une fonction f sur l'intervalle $[a\,;b]$ le nombre

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Propriétés de l'intégrale. Soient k et k' des réels. On a :

$$\int_a^b \big(kf(x)+k'g(x)\big)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx + k'\int_a^b g(x)\,dx$$

$$\text{Si } f(x)\geqslant 0 \text{ sur } [a\,;b],\ \text{alors } \int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$$

$$\text{Si } f(x)\leqslant g(x) \text{ sur } [a\,;b],\ \text{alors } \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$$

Relation de Chasles. Pour tout réel c tel que $c\in[a\,;b]$, on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

6.5 Exercices résolus

Exemple. Déterminer une primitive de :

5) $\displaystyle\int \frac{x^2-3x+2}{x-1}\,dx$

$$\int \frac{x^2-3x+2}{x-1}\,dx = \int \frac{x^2-x-2x+2}{x-1}\,dx = \int \frac{x(x-1)-2(x-1)}{x-1}\,dx$$
$$= \int \frac{(x-1)(x-2)}{x-1}\,dx = \int (x-2)\,dx$$

$$\boxed{\int \frac{x^2-3x+2}{x-1}\,dx = \frac{1}{2}x^2-2x+k,\quad k\in\mathbb{R}}$$

9) $\displaystyle\int \frac{x^3-3x^2+5}{x-3}\,dx$

$$\frac{x^3-3x^2+5}{x-3} = x^2+\frac{5}{x-3}$$

$$\int \frac{x^3-3x^2+5}{x-3}\,dx = \int x^2\,dx + 5\int \frac{1}{x-3}\,dx$$

$$\boxed{\int \frac{x^3-3x^2+5}{x-3}\,dx = \frac{1}{3}x^3+5\ln|x-3|+k,\quad k\in\mathbb{R}}$$

7) $\displaystyle\int \frac{x^2}{4x^3-6}\,dx$

$u = 4x^3 - 6$, $u' = 12x^2$.

$$\int \frac{x^2}{4x^3-6}\,dx = \frac{1}{12}\int \frac{12x^2}{4x^3-6}\,dx = \frac{1}{12}\int \frac{u'}{u}\,dx$$

$$\boxed{\int \frac{x^2}{4x^3-6}\,dx = \frac{1}{12}\ln\left|4x^3-6\right| + k, \quad k \in \mathbb{R}}$$

Exercice 4.
Soit la fonction f définie sur $]1\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x-6}{(x-1)^2}$.

1) Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $x \in]1\,;+\infty[$:

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2}$$

2) En déduire une primitive F de f sur $]1\,;+\infty[$.

Exemple. Calcul intégral.

7) $\displaystyle\int \tan(5x)\,dx = \int \frac{\sin(5x)}{\cos(5x)}\,dx = -\frac{1}{5}\int \frac{-5\sin(5x)}{\cos(5x)}\,dx$

$$\boxed{\int \tan(5x)\,dx = -\frac{1}{5}\ln\left|\cos(5x)\right| + k, \quad k \in \mathbb{R}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})}$$

Posons $u = 1+\sqrt{x}$, $u' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})}\,dx = 2\int \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}}\,dx = 2\int \frac{u'}{u}\,dx$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})} = 2\ln\left(1+\sqrt{x}\right) + k, \quad k \in \mathbb{R}}$$

$$\int_0^3 x\sqrt{1+x}\,dx$$

$$\begin{aligned}\int_0^3 x\sqrt{1+x}\,dx &= \int_0^3 \big((x+1)-1\big)(1+x)^{1/2}\,dx \\ &= \int_0^3 \left[(1+x)(1+x)^{1/2} - (1+x)^{1/2}\right]dx \\ &= \int_0^3 \left[(1+x)^{3/2} - (1+x)^{1/2}\right]dx\end{aligned}$$

7 Exercices proposés

Exercice 5 — calcul intégral.
Calculer :

$$\int_{-a}^{a} x\sin x\,dx \qquad \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)dx$$
$$\int_{-3}^{3} \frac{1}{\sqrt{2x+3}}\,dx \qquad \int_{1}^{e} \frac{\ln x}{x}\,dx$$
$$\int_{0}^{3} x\sqrt{1+x}\,dx \qquad \int_{2}^{4} \frac{dx}{x\ln x}$$
$$\int_{0}^{4} \left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)dx$$

Exercice 6 — limites.
Calculer :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+2} \qquad \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\,(\ln x)^2 \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-1}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x+x^2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{\sin x}$$

Exercice 7.

1) Calculer $A(t)=\displaystyle\int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx$.
2) Calculer $A=\displaystyle\lim_{t\to+\infty} A(t)$.

Exercice 8.

1) Calculer $I(\lambda)=\displaystyle\int_2^{\lambda} \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$.
2) Calculer $I=\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} I(\lambda)$.

Exercice 9.
On donne $f(x)=\dfrac{1}{(x+3)(x+4)}$.

1) Déterminer a et b tels que $f(x)=\dfrac{a}{x+3}+\dfrac{b}{x+4}$.
2) Calculer $I(\lambda)=\displaystyle\int_0^{\lambda} f(x)\,dx$.
3) Calculer $I=\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} I(\lambda)$.

Exercice 10.
On donne $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

1) Calculer $I(\lambda) = \displaystyle\int_1^{\lambda} f(x)\,dx$.

2) Calculer $I = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} I(\lambda)$.

Exercice 11.
On donne $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

1) Calculer $I(\lambda) = \displaystyle\int_0^{\lambda} f(x)\,dx$.

2) Calculer $\lim\limits_{\lambda \to 1^-} I(\lambda)$.

Exercice 12 — valeur moyenne.

1) Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x^3 - 3x$. Calculer la valeur moyenne de f sur $[2\,;5]$.

2) Calculer la valeur moyenne de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $[1\,;4]$.

3) Calculer la valeur moyenne de $f(x) = x^3 - 2x + 4$ sur $[-1\,;2]$.

Exercice 13.
Calculer $I = \displaystyle\int_0^2 x\sqrt{2-x^2}\,dx$.

Thème 10 : Les isométries du plan

Sommaire

10.1 Les transformations géométriques
10.2 Définitions
10.3 Isométries
10.4 Composée de deux réflexions
10.5 Décomposition d'une translation et d'une rotation ; composée de rotations
10.6 Classification des isométries ; symétrie glissée
10.7 Écriture complexe
10.8 Exercices

10.1 Les transformations géométriques

Introduction

Les transformations géométriques permettent d'associer à toute figure initiale une figure image. Les principales transformations géométriques sont :

- la translation ;
- la rotation ;
- la réflexion ;
- l'homothétie.

Une transformation géométrique qui ne modifie pas les mesures d'une figure est une **isométrie**. La translation, la rotation et la réflexion sont des isométries.

Une transformation géométrique qui associe des figures dites semblables est appelée une **similitude**. L'homothétie est une similitude.

Lorsqu'on effectue plusieurs transformations géométriques successivement, la règle qui relie ces transformations est une **composition** et le résultat est appelé le **composé**.

Le composé de u et de v s'écrit $v \circ u$: lire « v rond u ».

Exemple. Le composé d'une réflexion d'axe (Δ) et d'une translation de vecteur $\vec{u}$ s'écrit $t_{\vec{u}} \circ S_{(\Delta)}$.

Remarques.

1) On effectue les transformations de la droite vers la gauche.
2) Une réflexion suivie d'une translation (de vecteur de même direction que l'axe de réflexion) est une isométrie appelée **symétrie glissée**.

10.2 Définitions

Définition 1

On appelle **transformation du plan** toute fonction bijective du plan, c'est-à-dire que tout point du plan possède un unique antécédent par cette fonction.

Définition 2

Si f est une transformation du plan, la **transformation réciproque** de f est la transformation notée f^{-1} qui à tout point du plan associe son unique antécédent par f.

$$M' = f(M) \iff M = f^{-1}(M')$$

a) Translation

Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. $t_{\vec{u}}$ est la **translation de vecteur** $\vec{u}$ définie par :

$$M' = t_{\vec{u}}(M) \iff \overrightarrow{MM'} = \vec{u}.$$

- $t_{\vec{0}}$ est l'application identité : Id : $M \longmapsto M$.
- $t_{-\vec{u}}$ est la transformation réciproque de $t_{\vec{u}}$.
- Si $M' = t_{\vec{u}}(M)$ et $N' = t_{\vec{u}}(N)$, alors $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$.

Retenons

Rotation

Définition

$r_{(\Omega,\theta)}$: rotation de centre Ω et d'angle θ.

Soit Ω un point du plan et θ un nombre réel. On appelle **rotation de centre Ω et d'angle θ** la transformation du plan notée $r_{(\Omega,\theta)}$ définie par :

$$M' = r_{(\Omega,\theta)}(M) \iff \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta \ [2\pi] \end{cases} \qquad (M \neq \Omega), \qquad r_{(\Omega,\theta)}(\Omega) = \Omega.$$

Remarque. Les symétries centrales sont des rotations d'angle π.

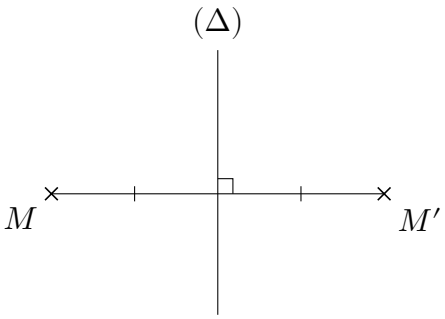
Réflexion

Définition

On appelle **réflexion d'axe** (Δ) la transformation notée $S_{(\Delta)}$ définie par :

$$M' = S_{(\Delta)}(M) \iff (\Delta) \text{ est la médiatrice de } [MM'].$$

$M' = M$ si $M \in (\Delta)$.



Remarque. La transformation réciproque de $r_{(\Omega,\theta)}$ est $r_{(\Omega,-\theta)}$; la transformation réciproque de $S_{(\Delta)}$ est $S_{(\Delta)}$.

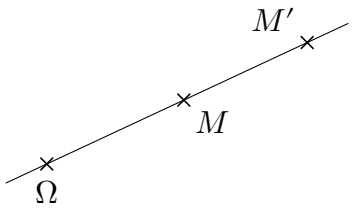
Homothétie

Définition

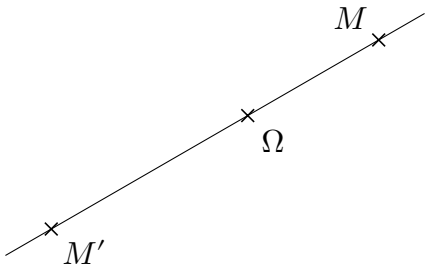
Soit $\Omega \in \mathcal{P}$ et $k \in \mathbb{R}^*$.

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M} \iff M' = h_{(\Omega,k)}(M)$$

Si $k > 0$: M et M' sont du même côté de Ω.



Si $k < 0$: M et M' sont de part et d'autre de Ω.



La transformation réciproque de $h_{(\Omega,k)}$ est $h_{(\Omega,\,1/k)}$.

Point fixe ou point invariant

Définition

On dit que M est **fixe** (ou **invariant**) par la transformation f si et seulement si $f(M) = M$.

Transformation identique

La transformation qui à tout point M du plan associe le point M lui-même s'appelle la **transformation identique** ou l'**identité** et se note Id.

10.3 Isométries

Iso : même ; métrie : mesure.

Définition

Une **isométrie du plan** est une transformation du plan qui conserve les distances. Si A a pour image A' et B a pour image B' par une isométrie, alors $A'B' = AB$.

Exemple

Soit φ l'application du plan

$$\varphi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}, \qquad M(x\,;y) \longmapsto M'(x'\,;y') \quad \text{telle que} \quad \begin{cases} x' = x+3 \\ y' = y+3 \end{cases}$$

Soit $N(x_1\,;y_1)$ et $N'(x_1'\,;y_1')$ son image par φ. Comparer MN et $M'N'$.

Corrigé

$x_1' = x_1 + 3$ et $y_1' = y_1 + 3$.

$$\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} x_1 - x \\ y_1 - y \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{M'N'}\begin{pmatrix} x_1' - x' \\ y_1' - y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 3 - (x+3) \\ y_1 + 3 - (y+3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x \\ y_1 - y \end{pmatrix}.$$

$$MN = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}, \qquad M'N' = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2},$$

donc $M'N' = MN$. Donc l'application φ est une isométrie.

φ admet-elle un point invariant ? M est un point invariant, c'est-à-dire $M = M'$ et $\varphi(M) = M$, si et seulement si

$$\begin{cases} x = x+3 \\ y = y+3 \end{cases} \iff 0 = 3 \ \text{ et } \ 0 = 3, \text{ ce qui est absurde.}$$

Donc la transformation φ n'admet pas de point invariant. Comme $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ pour tout point M, l'application φ est la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 1

Soit φ une transformation du plan $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ et $M'(x'\,;y')$ l'image de $M(x\,;y)$:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$$

Soit $N'(x_1'\,;y_1')$ l'image de $N(x_1\,;y_1)$ par φ.

1) Calculer MN et $M'N'$.
2) Comparer MN et $M'N'$ puis conclure.

Déplacements et antidéplacements

Définitions

- Une isométrie qui conserve l'orientation des angles est un **déplacement**.
- Une isométrie qui inverse l'orientation des angles est un **antidéplacement**.

- La translation, la rotation et la symétrie glissée sont des isométries du plan.
- Le composé de deux déplacements ou de deux antidéplacements est un déplacement.
- Le composé d'un déplacement et d'un antidéplacement est un antidéplacement.

À retenir

- $S_{(\Delta)}$: réflexion d'axe (Δ) ; $S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta)} = \text{Id}$ et $S_{(\Delta)}^{-1} = S_{(\Delta)}$.
- $t_{\vec{u}}$: translation de vecteur $\vec{u}$.
- Une translation (de vecteur non nul) est un déplacement qui n'a aucun point fixe, et $(t_{\vec{u}})^{-1} = t_{-\vec{u}}$.
- Une réflexion est un antidéplacement qui a pour points fixes tous les points de la droite (Δ).
- Une rotation est un déplacement qui a pour point fixe le centre de la rotation ; $(r_{(\Omega,\theta)})^{-1} = r_{(\Omega,-\theta)}$ et $r_{(\Omega,\pi)} = S_\Omega$ (symétrie de centre Ω).

Exemple

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

$$f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}, \qquad M(x\,;y) \longmapsto M'(x'\,;y') \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}\,x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,y \\ y' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,x - \dfrac{1}{2}\,y \end{cases}$$

1) Montrer que f est une isométrie du plan.
2) Déterminer l'ensemble des points M invariants par f.
3) Déterminer la nature de f.

Corrigé

1) Soit $N(x_1\,;y_1)$ et $N'(x_1'\,;y_1')$ son image. Posons $X = x_1 - x$ et $Y = y_1 - y$. Alors $MN = \sqrt{X^2+Y^2}$ et

$$\overrightarrow{M'N'}\begin{pmatrix} x_1' - x' \\ y_1' - y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}X + \dfrac{\sqrt{3}}{2}Y \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}X - \dfrac{1}{2}Y \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} M'N'^2 &= \left(\frac{1}{2}X + \frac{\sqrt{3}}{2}Y\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}X - \frac{1}{2}Y\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}X^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}XY + \frac{3}{4}Y^2 + \frac{3}{4}X^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}XY + \frac{1}{4}Y^2 \\ &= X^2 + Y^2. \end{aligned}$$

Donc $M'N' = \sqrt{X^2+Y^2} = MN$. De plus $f \circ f = \text{Id}$, donc f est bijective : f est une isométrie du plan.

2) $f(M) = M \iff M' = M$:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y \\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \dfrac{1}{2}y \end{cases} \iff \begin{cases} x - \sqrt{3}\,y = 0 \quad (1) \\ -\sqrt{3}\,x + 3y = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Or $(2) = -\sqrt{3} \times (1)$: les deux équations sont équivalentes. De (1) on tire $\sqrt{3}\,y = x$, soit $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x$. L'ensemble des points invariants par f est donc la droite (D) d'équation $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x$.

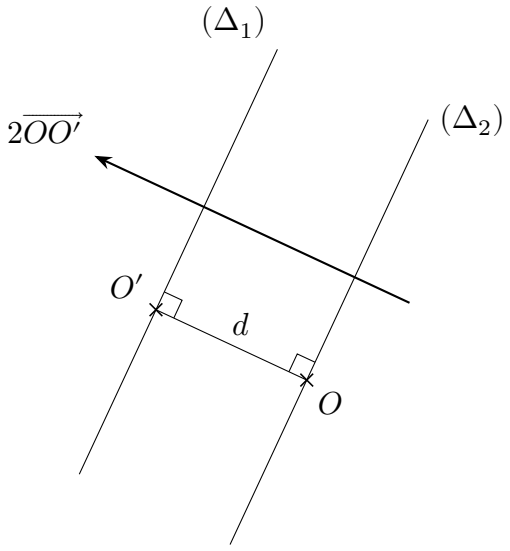
3) Soit $A(0\,;3)$. Alors

$$x'_A = \frac{1}{2}(0) + \frac{\sqrt{3}}{2}(3) = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \qquad y'_A = \frac{\sqrt{3}}{2}(0) - \frac{1}{2}(3) = -\frac{3}{2}.$$

On a $A' \neq A$ car $\dfrac{3\sqrt{3}}{2} \neq 0$ et $-\dfrac{3}{2} \neq 3$, donc f n'est pas l'identité. Comme f est une isométrie dont l'ensemble des points invariants est la droite (D), f est la symétrie orthogonale d'axe (D).

10.4 Composée de deux réflexions d'axes (Δ_1) et (Δ_2)

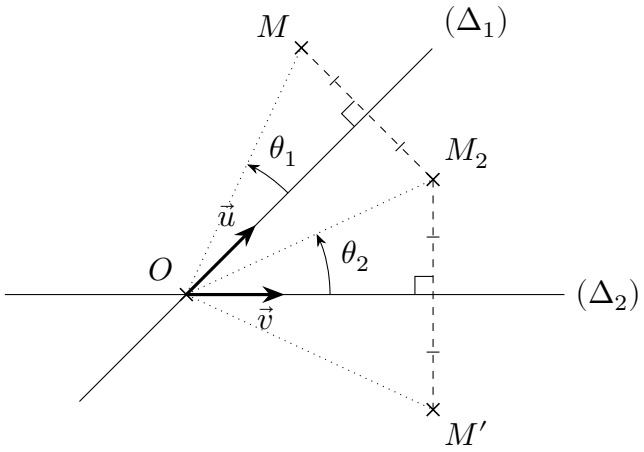
Cas $(\Delta_1) \parallel (\Delta_2)$



O' est le projeté orthogonal de $O \in (\Delta_2)$ sur (Δ_1). La composée $S_{(\Delta_1)} \circ S_{(\Delta_2)}$ est la translation de vecteur $2\,\overrightarrow{OO'}$:

$$S_{(\Delta_1)} \circ S_{(\Delta_2)} = t_{2\overrightarrow{OO'}}.$$

Cas (Δ_1) et (Δ_2) sécantes



Les axes de symétrie des segments $[MM_2]$ et $[M_2M']$ sont sécants en O, avec $M_2 = S_{(\Delta_1)}(M)$ et $M' = S_{(\Delta_2)}(M_2)$. La composée $S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)}$ est la rotation de centre O et d'angle $2\ (\vec{u}, \vec{v})$, où $\vec{u}$ dirige (Δ_1) et $\vec{v}$ dirige (Δ_2).

En posant $\theta_1 = \left(\overrightarrow{OM}, \vec{u}\right)$ et $\theta_2 = \left(\overrightarrow{OM_2}, \vec{v}\right)$, on a $\theta_1 + \theta_2 = (\vec{u}, \vec{v})$ et

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) &= \left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_2}\right) + \left(\overrightarrow{OM_2}, \overrightarrow{OM'}\right) \\ &= 2\theta_1 + 2\theta_2 = 2(\theta_1 + \theta_2) = 2\ (\vec{u}, \vec{v})\,.\end{aligned}$$

Ainsi $r_{(O,\theta)} = S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)}$ avec $\theta = 2\ (\vec{u}, \vec{v})$.

Cas particulier. Si $(\Delta_1) \perp (\Delta_2)$ en O, la composée est la symétrie centrale de centre O.

À retenir

- « $\circ$ » (rond) est associative ;
- l'élément neutre est Id ;
- « $\circ$ » (rond) n'est pas commutative : $f \circ g \neq g \circ f$ en général.

10.5 Décomposition d'une translation et d'une rotation ; composée de rotations

Décomposition d'une translation et d'une rotation

À retenir

- Toute translation est la composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles :
$$t_{\vec{u}} = S_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta)} \qquad ((\Delta) \parallel (\Delta')).$$
- Toute rotation est la composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants :
$$r = S_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta)} \qquad ((\Delta) \cap (\Delta') = \{\Omega\}).$$
- Soit S_I la symétrie de centre I et (Δ) une droite telle que $I \in (\Delta)$. Alors
$$S_I = S_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta)} \quad \text{avec } (\Delta') \perp (\Delta) \text{ en } I.$$

Composée de deux rotations

Rotations de même centre

Soit $r = r_{(\Omega,\theta)}$ et $r' = r_{(\Omega,\theta')}$.

- Si $\theta + \theta' \not\equiv 0\ [2\pi]$, alors $r' \circ r$ est la rotation de centre Ω et d'angle $\theta + \theta'$.
- Si $\theta + \theta' \equiv 0\ [2\pi]$, alors $r' \circ r$ est l'identité.
- Si $\theta + \theta' \equiv \pi\ [2\pi]$, alors $r' \circ r$ est la symétrie de centre Ω.

Rotations de centres distincts (c'est-à-dire $\Omega \neq \Omega'$)

Soit $r = r_{(\Omega,\theta)}$ et $r' = r_{(\Omega',\theta')}$.

- Si $\theta + \theta' \not\equiv 0\ [2\pi]$, alors $r' \circ r$ est une rotation d'angle $\theta + \theta'$.
- Si $\theta + \theta' \equiv 0\ [2\pi]$, alors $r' \circ r$ est une translation.

Méthode. On décompose les deux rotations en composées de deux symétries orthogonales, en utilisant la droite $(\Delta) = (\Omega\Omega')$:

$$r = S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta_1)}, \qquad r' = S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta)},$$

où (Δ_1) passe par Ω et (Δ_2) passe par Ω'. Alors

$$\begin{aligned} r' \circ r &= (S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta)}) \circ (S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta_1)}) \\ &= S_{(\Delta_2)} \circ (S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta)}) \circ S_{(\Delta_1)} \\ &= S_{(\Delta_2)} \circ \mathrm{Id} \circ S_{(\Delta_1)} \\ r' \circ r &= S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)}. \end{aligned}$$

θ et θ' sont les angles des rotations. Si $(\Delta_1) \parallel (\Delta_2)$, c'est-à-dire si $\theta + \theta' = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, cette composée est une translation. Sinon, cette composée est la rotation de centre le point d'intersection de (Δ_1) et (Δ_2) et d'angle $\theta + \theta'$.

Composée d'une translation et d'une rotation

Soit r une rotation et t une translation, avec

$$r = S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta_1)} \qquad \text{et} \qquad t = S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta)}.$$

Alors

$$\begin{aligned} t \circ r &= (S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta)}) \circ (S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta_1)}) \\ &= S_{(\Delta_2)} \circ (S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta)}) \circ S_{(\Delta_1)} \\ &= S_{(\Delta_2)} \circ \mathrm{Id} \circ S_{(\Delta_1)} \\ t \circ r &= S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_1)}. \end{aligned}$$

Les axes (Δ_1) et (Δ_2) sont sécants (l'angle de r n'est pas nul) : $t \circ r$ est une rotation de même angle que r.

10.6 Classification des isométries ; symétrie glissée

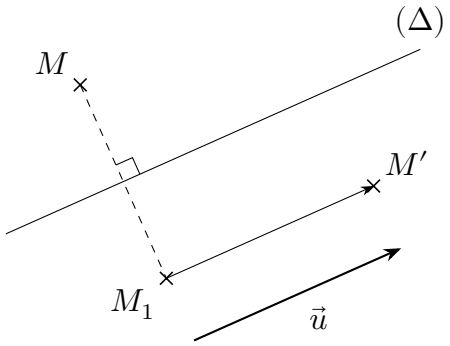
À retenir

- Toute isométrie du plan est soit une translation, soit une rotation, soit une symétrie (orthogonale ou glissée).
- Un **déplacement** est une isométrie du plan qui conserve les angles orientés.
- Un **antidéplacement** est une isométrie qui transforme tout angle orienté en son opposé.
- Tout déplacement est soit une translation, soit une rotation.
- Tout antidéplacement est soit une symétrie glissée, soit une symétrie orthogonale.

Symétrie glissée

Définition

Une **symétrie glissée** est la composée d'une réflexion suivie d'une translation de vecteur parallèle à l'axe de réflexion.



$$M_1 = S_{(\Delta)}(M) \quad \text{et} \quad M' = t_{\vec{u}}(M_1), \qquad t_{\vec{u}} \circ S_{(\Delta)}(M) = t_{\vec{u}}(S_{(\Delta)}(M)) = t_{\vec{u}}(M_1) = M'.$$

Attention. Lorsque $\vec{u}$ est parallèle à (Δ) : $t_{\vec{u}} \circ S_{(\Delta)} = S_{(\Delta)} \circ t_{\vec{u}}$.

$t_{\vec{u}} \circ S_{(\Delta)}$ est la **forme canonique** de la symétrie glissée. Une symétrie glissée n'a pas de point invariant.

Composée d'une rotation et d'une symétrie orthogonale

Soit $r = r_{(\Omega,\theta)}$ et $S = S_{(\Delta)}$ une réflexion.

- Si $\Omega \in (\Delta)$, alors $S \circ r$ est une symétrie orthogonale.
- Si $\Omega \notin (\Delta)$ (et $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$), alors $r \circ S$ ou $S \circ r$ est une symétrie glissée.

On peut écrire $r_{(\Omega,\theta)} = S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta')}$ avec (Δ') passant par Ω.

10.7 Écriture complexe

Écriture complexe des déplacements

La translation

$M' = t_{\vec{u}}(M) \iff \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

Dans le plan complexe, $M(z)$, $M'(z')$ et $\vec{u}(a)$:

$$z' - z = a, \qquad z' = z + a.$$

Rotation $r_{(\Omega,\theta)}$

$M(z)$ a pour image $M'(z')$:

$$z' - z_\Omega = e^{i\theta}\,(z - z_\Omega).$$

Écriture complexe d'un déplacement

$$z' = az + b, \qquad a \in \mathbb{C}^*,\ b \in \mathbb{C} \ \text{ et } \ |a| = 1.$$

La réflexion d'axe (Ox) : $z' = \overline{z}$.

Réflexion d'axe horizontal $(y = b)$: $z' = \overline{z} + 2ib$.

Écriture complexe d'un antidéplacement

$$z' = a\overline{z} + b \quad \text{avec } |a| = 1.$$

Exemple

Soit $f : z \longmapsto f(z) = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}\, z$.

1) Déterminer l'unique point invariant par f.
2) Montrer que f est une rotation.

Corrigé

1) M est un point invariant par f si et seulement si $f(M) = M \iff z' = z$:

$$\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\, z = z \iff \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\, z - z = 0 \iff z\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} - 1\right) = 0 \iff z \cdot \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = 0.$$

Comme $\dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \neq 0$, on obtient $z = 0$: le point invariant par f est l'origine O.

2) Rotation : $z' - z_\Omega = e^{i\theta}(z - z_\Omega)$. Ici

$$z' = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\, z = 1 \times \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z = e^{i\pi/3}\, z.$$

Donc $z' - 0 = e^{i\pi/3}(z - 0)$: f est la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

Écriture complexe d'une similitude directe

$$z' = az + b, \qquad a \in \mathbb{C}^*,\ b \in \mathbb{C}.$$

C'est une similitude directe de rapport $k = |a|$ et d'angle $\theta = \arg(a)$.

Exercice 2 – écriture complexe

Dans un repère orthonormé :

1) Déterminer la rotation de centre $A(2\,;-1)$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$.
2) On pose $z' = x' + iy'$ et $z = x + iy$. Montrer que l'écriture analytique de cette rotation est

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,y + 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ y' = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,x + \dfrac{y}{2} + \sqrt{3} - \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Corrigé

1) $z_A = 2 - i$ et $z' - z_A = e^{-i\pi/3}(z - z_A)$, soit $z' = e^{-i\pi/3}(z - z_A) + z_A$:

$$\begin{aligned} z' &= \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z - 2 + i) + (2 - i) \\ &= \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z + \left(-1 + \frac{i}{2} + i\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2 - i \\ &= \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z + \frac{2 + \sqrt{3}}{2} + i\,\frac{2\sqrt{3} - 1}{2}. \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} x' + iy' &= (x + iy)\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{2 + \sqrt{3}}{2} + i\,\frac{2\sqrt{3} - 1}{2} \\ &= \frac{1}{2}x - i\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}iy + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{2 + \sqrt{3}}{2} + i\,\frac{2\sqrt{3} - 1}{2} \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{2 + \sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{2\sqrt{3} - 1}{2}\right). \end{aligned}$$

Par identification :

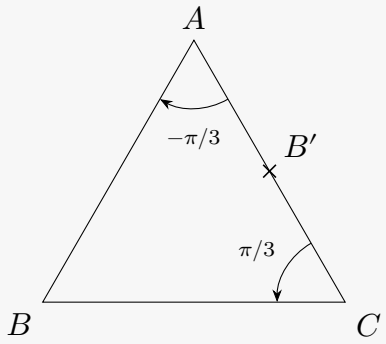
$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y + \dfrac{2 + \sqrt{3}}{2} = \dfrac{x}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y + 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ y' = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{1}{2}y + \dfrac{2\sqrt{3} - 1}{2} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{y}{2} + \sqrt{3} - \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

10.8 Exercices

Exercice 3

ABC est un triangle équilatéral de sens direct, B' est le milieu du segment $[AC]$. Déterminer les transformations du plan suivantes :

1) $f = r_{(C,\,\pi/3)} \circ r_{(A,\,-\pi/3)}$;
2) $g = r_{(B,\,2\pi/3)} \circ r_{(C,\,2\pi/3)}$;
3) $h = r_{(A,\,2\pi/3)} \circ r_{(B,\,\pi/3)}$.



Corrigé

1) *Nature de* $f = r_{(C,\,\pi/3)} \circ r_{(A,\,-\pi/3)}$. Calculons $\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{3} = 0$ et $A \neq C$: donc f est une translation.

$$r_{(C,\,\pi/3)} \circ r_{(A,\,-\pi/3)}(A) = r_{(C,\,\pi/3)}(A) = B,$$

donc $f = t_{\overrightarrow{AB}}$.

2) *Nature de* $g = r_{(B,\,2\pi/3)} \circ r_{(C,\,2\pi/3)}$. Calculons $\dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{4\pi}{3} \not\equiv 0\ [2\pi]$ et $B \neq C$: g est une rotation. Les centres sont différents, donc on décompose les rotations :

$$r_{(C,\,2\pi/3)} = r_{(C,\,2\times\pi/3)} = S_{(BC)} \circ S_{(AC)}, \qquad r_{(B,\,2\pi/3)} = r_{(B,\,2\times\pi/3)} = S_{(AB)} \circ S_{(BC)}.$$

$$\begin{aligned} r_{(B,\,2\pi/3)} \circ r_{(C,\,2\pi/3)} &= S_{(AB)} \circ S_{(BC)} \circ (S_{(BC)} \circ S_{(AC)}) \\ &= S_{(AB)} \circ (S_{(BC)} \circ S_{(BC)}) \circ S_{(AC)} \\ &= S_{(AB)} \circ \mathrm{Id} \circ S_{(AC)} \\ &= S_{(AB)} \circ S_{(AC)} \\ &= r_{(A,\,2\times(-\pi/3))} \qquad \left(\left(\overrightarrow{AC},\,\overrightarrow{AB}\right) = -\tfrac{\pi}{3}\right) \\ g &= r_{(A,\,-2\pi/3)}. \end{aligned}$$

3) *Nature de* $h = r_{(A,\,2\pi/3)} \circ r_{(B,\,\pi/3)}$. Calculons $\dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{3\pi}{3} = \pi$ et $A \neq B$: donc h est une symétrie centrale.

$$r_{(A,\,2\pi/3)} = r_{(A,\,2\times\pi/3)} = S_{(AC)} \circ S_{(AB)}, \qquad r_{(B,\,\pi/3)} = r_{(B,\,2\times\pi/6)} = S_{(AB)} \circ S_{(BB')}.$$

$$\begin{aligned} r_{(A,\,2\pi/3)} \circ r_{(B,\,\pi/3)} &= S_{(AC)} \circ S_{(AB)} \circ (S_{(AB)} \circ S_{(BB')}) \\ &= S_{(AC)} \circ (S_{(AB)} \circ S_{(AB)}) \circ S_{(BB')} \\ &= S_{(AC)} \circ \mathrm{Id} \circ S_{(BB')} \\ &= S_{(AC)} \circ S_{(BB')} \end{aligned}$$

Les droites (AC) et (BB') sont perpendiculaires en B', donc

$$h = S_{B'}.$$

Exercice 4

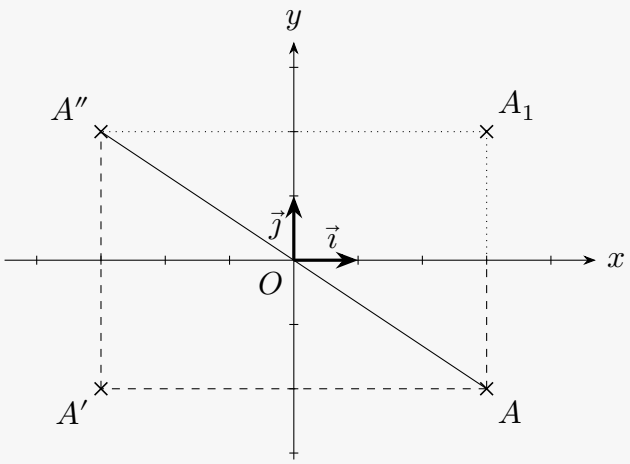
Dans un repère orthonormé, placer $A(3\,;-2)$ et $O'(0\,;2)$. Construire A', l'image de A par la transformation $S_{O'} \circ S_O$. Donner la nature de cette composée.

Exercice 5

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, placer $A(3\,;-2)$. Construire l'image de A par chacune des transformations suivantes :

2) $S_{(Ox)} \circ S_{(Oy)}$
3) $S_{(Oy)} \circ S_{(Ox)}$
4) $r_{(O,\,\pi)} \circ S_{(Ox)}$
5) $r_{(O,\,\pi/2)} \circ r_{(O,\,\pi)}$
6) $\vec{u}(2\,;2)$, $(\Delta) : y = x$
   a) $t_{\vec{u}} \circ S_{(\Delta)}$
   b) $S_{(Oy)} \circ S_{(\Delta)}$
7) $r_{(O,\,\pi)} \circ t_{\vec{v}}$ avec $\vec{v}(3\,;-2)$
8) $r_{(O,\,\pi/2)} \circ r_{(O,\,\pi/2)}$
9) $S_{(y=2)} \circ S_{(Ox)}$

Corrigé



2)

$$S_{(Ox)} \circ S_{(Oy)}(A) = S_{(Ox)}\big[S_{(Oy)}(A)\big] = S_{(Ox)}(A') = A''.$$

Cette transformation est la symétrie centrale de centre O.

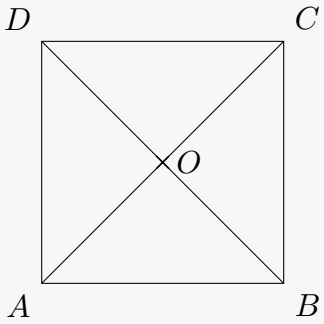
3)

$$S_{(Oy)} \circ S_{(Ox)}(A) = S_{(Oy)}\big[S_{(Ox)}(A)\big] = S_{(Oy)}(A_1) = A'',$$

où $A_1 = S_{(Ox)}(A)$: symétrie centrale de centre O.

Exercice 6

$ABCD$ est un carré direct de centre O.



A) Déterminons les transformations f suivantes.

1) $f = S_{(DC)} \circ S_{(AC)}$.
(DC) et (AC) sont sécantes en C et $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}\right) \equiv -\dfrac{\pi}{4}\ [\pi]$, donc f est la rotation de centre C et d'angle $2\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$:

$$f = r_{(C,\,-\pi/2)}.$$

2) $f = S_{(DC)} \circ S_{(AB)}$.
$(DC) \parallel (AB)$, $ABCD$ est un carré et C est le projeté orthogonal de B sur (DC). Donc f est la translation de vecteur $2\,\overrightarrow{BC}$:

$$f = t_{2\overrightarrow{BC}}.$$

3) $f = r_{(C,\,-\pi/2)} \circ r_{(A,\,\pi/2)}$.
Calculons $-\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} = 0$. On a $r_{(C,\,-\pi/2)} = S_{(DC)} \circ S_{(AC)}$ et $r_{(A,\,\pi/2)} = r_{(A,\,2\times\pi/4)} = S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$. Donc

$$\begin{aligned} f &= r_{(C,\,-\pi/2)} \circ r_{(A,\,\pi/2)} = S_{(DC)} \circ S_{(AC)} \circ (S_{(AC)} \circ S_{(AB)}) \\ &= S_{(DC)} \circ (S_{(AC)} \circ S_{(AC)}) \circ S_{(AB)} \\ &= S_{(DC)} \circ \mathrm{Id} \circ S_{(AB)} \\ f &= S_{(DC)} \circ S_{(AB)}. \end{aligned}$$

Par analogie avec 2) : $f = t_{2\overrightarrow{BC}}$.

4) $f = S_{(AC)} \circ r_{(A,\,\pi/2)}$.
$r_{(A,\,\pi/2)} = S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$, donc

$$\begin{aligned} f &= S_{(AC)} \circ (S_{(AC)} \circ S_{(AB)}) = (S_{(AC)} \circ S_{(AC)}) \circ S_{(AB)} \\ &= \mathrm{Id} \circ S_{(AB)} \\ f &= S_{(AB)}. \end{aligned}$$

5) $f = t_{2\overrightarrow{AD}} \circ r_{(A,\,-\pi/2)}$.
$t_{2\overrightarrow{AD}} = t_{2\overrightarrow{BC}} = S_{(DC)} \circ S_{(AB)}$ et $r_{(A,\,-\pi/2)} = S_{(AB)} \circ S_{(AC)}$. Donc

$$\begin{aligned} f &= S_{(DC)} \circ S_{(AB)} \circ (S_{(AB)} \circ S_{(AC)}) \\ &= S_{(DC)} \circ (S_{(AB)} \circ S_{(AB)}) \circ S_{(AC)} \\ &= S_{(DC)} \circ \mathrm{Id} \circ S_{(AC)} \\ f &= S_{(DC)} \circ S_{(AC)}. \end{aligned}$$

Par analogie avec 1) : $f = r_{(C,\,-\pi/2)}$.

B) Déterminons (Δ) telle que :

1) $t_{\overrightarrow{AB}} = S_{(\Delta)} \circ S_{(AD)}$.
La composée des réflexions d'axes (Δ) et (AD) est une translation, donc $(\Delta) \parallel (AD)$. Soit I le milieu de $[AB]$: $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, donc $t_{\overrightarrow{AB}} = t_{2\overrightarrow{AI}} = S_{(\Delta)} \circ S_{(AD)}$: (Δ) est la droite passant par I et parallèle à (AD).

2) $t_{\overrightarrow{AB}} = S_{(AD)} \circ S_{(\Delta)}$.
Soit A' le projeté orthogonal de A sur (Δ), avec $A' \in (\Delta)$ et $(\Delta) \parallel (AD)$. Alors $t_{\overrightarrow{AB}} = t_{2\overrightarrow{A'A}}$, donc

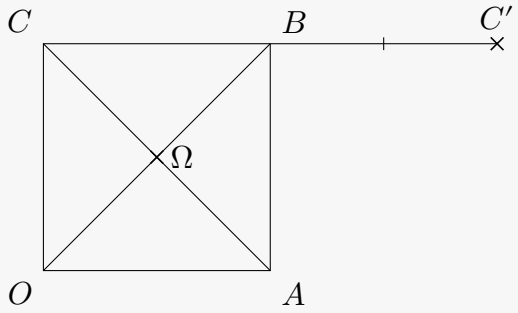
$$2\overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{A'A} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} \quad (I \text{ milieu de } [AB]).$$

A est le milieu de $[A'I]$: $S_A(I) = A'$. (Δ) est la droite parallèle à (AD) passant par A'.

Exercice 7

$OABC$ est un carré direct tel que $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$, de centre Ω. C' est le symétrique de C par rapport à B : $S_B(C) = C'$. Soit $r = r_{(O,\,\pi/2)}$ et $r' = r_{(B,\,-\pi/2)}$, avec $S = S_B$ et $S' = S_{(AC)}$.

1) Déterminer $f = r' \circ S \circ r$.
2) a) Déterminer $g = S' \circ f$.
   b) A-t-on $S' \circ f = f \circ S'$?
3) Déterminer $h = t_{\overrightarrow{OA}} \circ S'$.



Corrigé

1) Déterminons $f = r' \circ S \circ r$. On a $S_B = r_{(B,\,\pi)}$, donc

$$f = r_{(B,\,-\pi/2)} \circ r_{(B,\,\pi)} \circ r_{(O,\,\pi/2)}.$$

Calculons $-\dfrac{\pi}{2} + \pi + \dfrac{\pi}{2} = \pi$: f est une rotation d'angle π.

$$\begin{aligned} f(A) &= r' \circ S \circ r(A) = r' \circ S[r(A)] \\ &= r' \circ S(C) \\ &= r'(C') \\ &= A. \end{aligned}$$

$f(A) = A$ et f est une rotation d'angle π. En somme, f est la rotation de centre A et d'angle π : $f = S_A$.

2) a) Déterminons $g = S' \circ f$:

$$g = S' \circ S_A = S_{(AC)} \circ r_{(A,\,\pi)}.$$

Les droites (AC) et (AC') sont perpendiculaires en A, donc $r_{(A,\,\pi)} = r_{(A,\,2\times\pi/2)} = S_{(AC)} \circ S_{(AC')}$. Ainsi

$$\begin{aligned} g &= S_{(AC)} \circ (S_{(AC)} \circ S_{(AC')}) \\ &= (S_{(AC)} \circ S_{(AC)}) \circ S_{(AC')} \\ &= \mathrm{Id} \circ S_{(AC')} \\ g &= S_{(AC')}. \end{aligned}$$

b) Comparons $S' \circ f$ et $f \circ S'$:

$$S' \circ f = S_{(AC')}, \qquad f \circ S' = r_{(A,\,\pi)} \circ S_{(AC)} = S_A \circ S_{(AC)}.$$

Comme $S_A = S_{(AC')} \circ S_{(AC)}$,

$$\begin{aligned} f \circ S' &= (S_{(AC')} \circ S_{(AC)}) \circ S_{(AC)} \\ &= S_{(AC')} \circ (S_{(AC)} \circ S_{(AC)}) \\ f \circ S' &= S_{(AC')}. \end{aligned}$$

Donc $f \circ S' = S_{(AC')}$ et $S' \circ f = S_{(AC')}$: oui, $S' \circ f = f \circ S'$.

3) Déterminons $h = t_{\overrightarrow{OA}} \circ S' = t_{\overrightarrow{OA}} \circ S_{(AC)}$.

$$t_{\overrightarrow{OA}} = t_{\overrightarrow{O\Omega}+\overrightarrow{\Omega A}} = t_{\overrightarrow{\Omega A}} \circ t_{\overrightarrow{O\Omega}}.$$

$$\begin{aligned} h &= t_{\overrightarrow{\Omega A}} \circ t_{\overrightarrow{O\Omega}} \circ S_{(AC)} \\ &= t_{\overrightarrow{\Omega A}} \circ (t_{\overrightarrow{O\Omega}} \circ S_{(AC)}). \end{aligned}$$

Soit $(\Delta) \parallel (AC)$ telle que $t_{\overrightarrow{O\Omega}} = S_{(\Delta)} \circ S_{(AC)}$ ((Δ) est la parallèle à (AC) passant par le milieu de $[\Omega B]$). Alors

$$\begin{aligned} h &= t_{\overrightarrow{\Omega A}} \circ (S_{(\Delta)} \circ S_{(AC)} \circ S_{(AC)}) \\ &= t_{\overrightarrow{\Omega A}} \circ (S_{(\Delta)} \circ \mathrm{Id}) \\ h &= t_{\overrightarrow{\Omega A}} \circ S_{(\Delta)}. \end{aligned}$$

h est une symétrie glissée, avec $\overrightarrow{\Omega A}$ parallèle à (Δ).

Exercice 8 : Isométries du plan

Soit $ABCD$ un carré de sens direct tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et (Δ) la médiatrice du segment $[BC]$. Soit f une isométrie distincte de la symétrie orthogonale $S_{(\Delta)}$ telle que

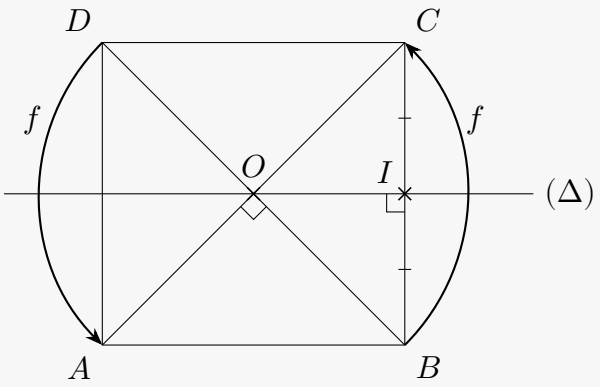
$$\begin{cases} f(B) = C \\ f(D) = A \end{cases}$$

1. Faites une figure soignée.

2. Soit O le milieu du segment $[AC]$.
   a) Montrer que O est l'unique point du plan invariant par f.
   b) Déduisez-en la nature et les éléments caractéristiques de f.
3. Soit g et h les applications du plan définies respectivement par $g = f \circ S_{(\Delta)}$ et $h = S_{(\Delta)} \circ f$.
   a) Déterminez $g(A)$ et $g(C)$, et déduisez que $g = S_{(AC)}$.
   b) Montrer que $h = S_{(BD)}$.
4. Déterminez la nature et les éléments caractéristiques de $g \circ h$.

Corrigé

1. Figure :



2. a) O est le milieu de $[AC]$ et de $[BD]$. Une isométrie conserve les milieux : $f(O)$ est le milieu de $[f(B)f(D)] = [CA]$, donc $f(O) = O$: O est invariant par f.

Supposons qu'il existe un point invariant $M \neq O$. Une isométrie qui admet deux points invariants distincts est soit l'identité, soit la réflexion d'axe la droite passant par ces points. Comme $f(B) = C \neq B$, $f \neq \text{Id}$, donc $f = S_{(OM)}$. Or $f(B) = C$ impose que l'axe soit la médiatrice de $[BC]$, c'est-à-dire (Δ) : $f = S_{(\Delta)}$, ce qui est exclu. Donc O est l'unique point du plan invariant par f.

b) Une isométrie qui admet un unique point invariant est une rotation de centre ce point : f est une rotation de centre O. $ABCD$ est un carré : les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ sont perpendiculaires en O et $OD = OA$. Comme $ABCD$ est direct, $\left(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Ainsi $r_{(O,\,\pi/2)}(D) = A$ et $r_{(O,\,\pi/2)}(B) = C$, donc

$$f = r_{(O,\,\pi/2)},$$

la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

3. Soit $g = f \circ S_{(\Delta)}$ et $h = S_{(\Delta)} \circ f$. La réflexion $S_{(\Delta)}$ échange B et C d'une part, A et D d'autre part.

a)

$$g(A) = f \circ S_{(\Delta)}(A) = f[S_{(\Delta)}(A)] = f(D) = A,$$
$$g(C) = f \circ S_{(\Delta)}(C) = f[S_{(\Delta)}(C)] = f(B) = C.$$

g est la composée d'un déplacement et d'un antidéplacement : c'est un antidéplacement, donc $g \neq \text{Id}$. Il fixe les points distincts A et C : $g = S_{(AC)}$; en effet

$$\left.\begin{array}{l} S_{(AC)}(A) = A \ \text{ et } \ g(A) = A \\ S_{(AC)}(C) = C \ \text{ et } \ g(C) = C \end{array}\right\} \quad g = S_{(AC)}.$$

b) Montrons que $h = S_{(BD)}$.

$$h(B) = S_{(\Delta)} \circ f(B) = S_{(\Delta)}(C) = B,$$
$$h(D) = S_{(\Delta)} \circ f(D) = S_{(\Delta)}(A) = D.$$

De même, h est un antidéplacement qui fixe les points distincts B et D :

$$\left.\begin{array}{l} S_{(BD)}(D) = D \text{ et } h(D) = D \\ S_{(BD)}(B) = B \text{ et } h(B) = B \end{array}\right\} \quad h = S_{(BD)}.$$

4. Déterminons $g \circ h$:

$$g \circ h = S_{(AC)} \circ S_{(BD)}.$$

(AC) et (BD) sont sécantes en O et $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$, donc

$$g \circ h = r_{(O,\,\pi)} :$$

$g \circ h$ est la symétrie centrale de centre O.

Thème 11
Fonction exponentielle — Calcul intégral — Équations différentielles

Sommaire

1. Bijection
2. Fonction exponentielle
3. Fonctions puissances
4. Calcul intégral
5. Problème de synthèse (Session normale 1997, série C)

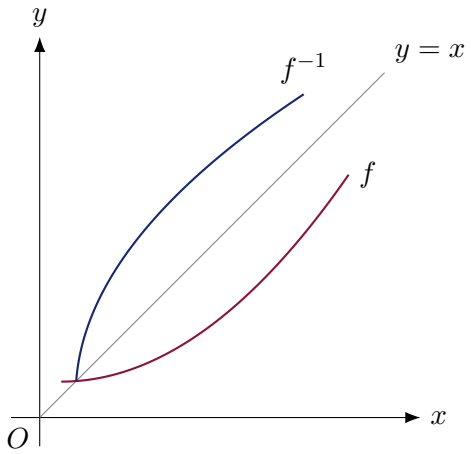
1 Bijection

Théorème

Si f est une fonction dérivable et strictement monotone sur un intervalle I, alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$.
Si $\alpha \in f(I)$, alors l'équation $f(x) = \alpha$ admet une unique solution sur I.

Remarque

Dans un plan muni d'un repère orthonormé, les courbes représentatives de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$.



Propriété

Les fonctions f et f^{-1} ont la même monotonie.

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 5x - 1$.

1) Justifier que f est dérivable et calculer $f'(x)$.
2) Étudier les variations de f.
3) Montrer que $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$.
4) Établir que $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$.
5) Donner l'ensemble de définition de f^{-1} et ses variations.

Corrigé

1) f est une fonction polynôme, donc f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$f'(x) = 3x^2 + 5.$$

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3) f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc f réalise une bijection croissante de $\mathbb{R}$ sur

$$f(\mathbb{R}) = \left]\lim_{x\to-\infty} f(x)\,;\,\lim_{x\to+\infty} f(x)\right[.$$

Or f est une fonction polynôme, donc

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty.$$

Ainsi $f(\mathbb{R}) =]-\infty\,;+\infty[$ et $0 \in]-\infty\,;+\infty[$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

4) On a

$$f(0) = -1, \qquad f(\alpha) = 0, \qquad f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{8},$$

d'où $f(0) < f(\alpha) < f\left(\frac{1}{2}\right)$. Or f est croissante sur $\left]0\,;\tfrac{1}{2}\right[$, donc

$$0 < \alpha < \frac{1}{2}.$$

5) f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) =]-\infty\,;+\infty[$, donc la fonction réciproque f^{-1} existe et est définie sur $]-\infty\,;+\infty[$. Comme f est croissante sur $\mathbb{R}$, f^{-1} est également croissante sur $\mathbb{R}$.

2 Fonction exponentielle

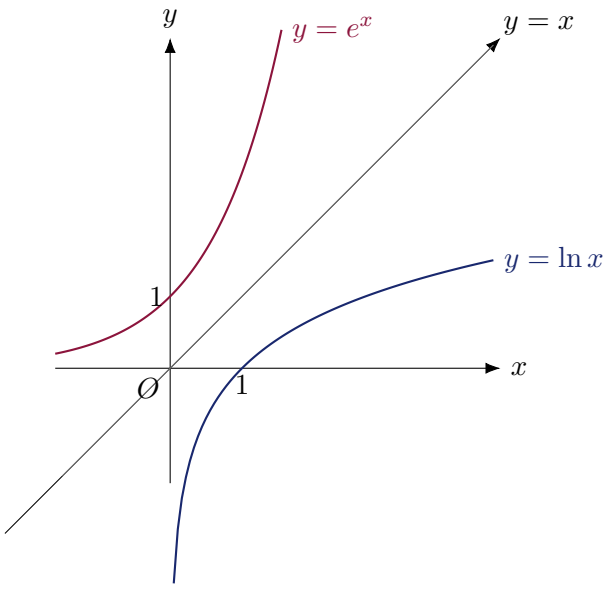
Définition

La fonction exponentielle est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien ln.
Posons $y = \ln x$, avec $x > 0$. Alors

$$e^y = e^{\ln x} \iff e^y = x.$$

En échangeant x et y, on obtient

$$f^{-1}(x) = e^x.$$



Propriété

La fonction exp est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = e^x$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]0\,;+\infty[$:

$$y = e^x \iff x = \ln(y), \qquad \ln(e^x) = x, \qquad e^{\ln y} = y.$$

Propriété

$$(e^x)' = e^x.$$

Si u est une fonction définie et dérivable sur I, alors

$$(e^u)' = u'e^u.$$

Exemple — Calcul de dérivées

Déterminer la dérivée de chacune des fonctions suivantes.

Corrigé

- $f(x) = e^{x^2} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 2xe^{x^2}$.

- $f(x) = 3xe^{-4x}$

$$f'(x) = (3x)'e^{-4x} + 3x\left(e^{-4x}\right)' = 3e^{-4x} + 3x(-4e^{-4x}) = 3(1-4x)e^{-4x}.$$

- $f(x) = \ln(1+e^{-x})$

$$f'(x) = \frac{(1+e^{-x})'}{1+e^{-x}} = \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{-e^{-x}}{\frac{e^x+1}{e^x}} = -e^{-x} \times \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{-1}{1+e^x}.$$

- $f(x) = \dfrac{e^x+1}{e^x-1}$

$$f'(x) = \frac{(e^x+1)'(e^x-1) - (e^x+1)(e^x-1)'}{(e^x-1)^2} = \frac{e^x(e^x-1) - (e^x+1)e^x}{(e^x-1)^2}$$
$$= \frac{e^x\left(e^x - 1 - e^x - 1\right)}{(e^x-1)^2} = \frac{-2e^x}{(e^x-1)^2}.$$

Propriétés algébriques

Propriété

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:

$$e^0 = 1, \quad e^1 = e, \quad e^x > 0, \quad e^{a+b} = e^a \times e^b, \quad \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}, \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a}.$$

$$e^a < e^b \iff a < b, \qquad e^a = e^b \iff a = b.$$

Exemple — Simplifier

$$A = \frac{e^{x+2}}{e^{x+1}}, \qquad B = e^3 \times \left(e^{-2}\right)^3, \qquad E = \frac{e^6 \times e^{-5}}{e^{-4}}, \qquad F = \frac{\left(e^{3x}\right)^2}{e^{4x+1} \times e^{-x-1}}.$$

Corrigé

$$A = \frac{e^{x+2}}{e^{x+1}} = e^{x+2-(x+1)} = e^1 \Longrightarrow \boxed{A = e}$$

$$E = \frac{e^6 \times e^{-5}}{e^{-4}} = \frac{e^{6-5}}{e^{-4}} = \frac{e^1}{e^{-4}} = e^{1+4} \Longrightarrow \boxed{E = e^5}$$

$$B = e^3 \times \left(e^{-2}\right)^3 = e^3 \times e^{-6} = e^{3-6} \Longrightarrow \boxed{B = e^{-3}}$$

$$F = \frac{\left(e^{3x}\right)^2}{e^{4x+1} \times e^{-x-1}} = \frac{e^{6x}}{e^{4x+1-x-1}} = \frac{e^{6x}}{e^{3x}} = e^{6x-3x} \Longrightarrow \boxed{F = e^{3x}}$$

Équations — Inéquations

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $e^{x-2} = e^{-x}$ puis $1 - e^{x-3} \geqslant 0$.

Corrigé

$$e^{x-2} = e^{-x} \iff x - 2 = -x \iff 2x - 2 = 0 \iff x = 1, \qquad \boxed{S = \{1\}}$$

$$1 - e^{x-3} \geqslant 0 \iff -e^{x-3} \geqslant -1 \iff e^{x-3} \leqslant 1 \iff \ln\left(e^{x-3}\right) \leqslant \ln(1)$$
$$\iff (x-3)\ln(e) \leqslant 0 \iff x - 3 \leqslant 0 \iff x \leqslant 3$$

$$\boxed{S =]-\infty\,;3]}$$

Exemple — Signe de $1 - e^x$

Déterminer le signe de $1 - e^x$ suivant les valeurs de x.

Corrigé

$$1 - e^x = 0 \iff -e^x = -1 \iff e^x = 1 \iff x = 0.$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$1 - e^x$		$+$	0	$-$	

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1) $e^{5-x^2} = e$

2) $e^{5x} - 3 < 0$

3) $2e^{2x} - e^x - 1 = 0$

Exercice 2

On admet que les fonctions suivantes sont dérivables. Déterminer la dérivée de chacune.

1) $f(x) = e^{1-3x}$

2) $f(x) = e^{\cos(x)}$

3) $f(x) = x^2 e^{-x}$

4) $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{e^{2x} + 1}$

5) $f(x) = \ln(e^x + e^{-x} + 1)$

Limites — propriétés

Propriété

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0, \qquad \lim_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Exemple

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-1)e^x$, $\lim\limits_{x\to-\infty} (x - e^x + 1)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{1-x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{4x}$.

Corrigé

- Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, par produit des limites,

$$\lim_{x\to+\infty} (x-1)e^x = +\infty.$$

- $$\lim_{x\to-\infty} (x - e^x + 1) = \lim_{x\to-\infty} (x+1) - \lim_{x\to-\infty} e^x = (-\infty) - 0 = -\infty.$$

- Posons $u = 1 - x$. Quand $x \to +\infty$, $u \to -\infty$, donc

$$\lim_{x\to+\infty} e^{1-x} = \lim_{u\to-\infty} e^u = 0.$$

- Posons $u = 4x$, soit $x = \dfrac{u}{4}$. Quand $x \to -\infty$, $u \to -\infty$, donc

$$\lim_{x\to-\infty} xe^{4x} = \lim_{u\to-\infty} \frac{u}{4}e^u = \frac{1}{4} \lim_{u\to-\infty} ue^u = \frac{1}{4} \times 0 = 0.$$

Exercice 3 — Calculer

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x^3-x}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-x)e^x$

Corrigé

- Posons $u = x^3 - x$. Quand $x \to -\infty$, $u \to -\infty$, donc

$$\lim_{x\to-\infty} e^{x^3-x} = \lim_{u\to-\infty} e^u = 0.$$

- $$\lim_{x\to+\infty} (1-x)e^x = \lim_{x\to+\infty} (1-x) \times \lim_{x\to+\infty} e^x = (-\infty) \times (+\infty) = -\infty.$$

3 Fonctions puissances

Présentation

Pour tout $u \in]0\,;+\infty[$, on a

$$u^\alpha = e^{\alpha \ln u}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}^*.$$

Exemple

$f(x) = 2^x \iff f(x) = e^{x \ln 2}$.

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

$$f(x) = \sqrt[n]{x} \iff f(x) = x^{\frac{1}{n}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n} x^{\frac{1-n}{n}}.$$

Croissance comparée

Propriété

En $+\infty$: $\exp(x) \gg x^\alpha \gg \ln(x)$, avec $\alpha > 0$. Plus précisément :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0, \qquad \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} |x|^\alpha e^x = 0.$$

Exercice 4 — Calculer

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x+1)e^{-x}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - e^x + 1)$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{e^x - x - 1}{x}\right)$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{e^x - x}{x^2}\right)$

Exercice 5 — Problème

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x^2}$.

1) Calculer $f(1)$.
2) Étudier la fonction f.
3) Donner l'équation de la tangente T_1 en 1 à la courbe de f.
4) Tracer la courbe de f et T_1.
5) Déterminer l'intersection de la courbe de f avec l'axe (Ox).
6) Déterminer l'intersection de la courbe de f avec l'axe (Oy).

4 Calcul intégral

Intégration par parties

Théorème

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I et dont les dérivées u' et v' sont continues sur I, alors pour tous réels a et b de I :

$$\int_a^b u'v = \Big[uv\Big]_a^b - \int_a^b uv'.$$

Il est parfois utile de remarquer que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b 1 \times f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{en posant } u'(x) = 1.$$

Exemple

Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x$.

Corrigé

Posons $u = x$, $u' = 1$ et $v' = e^x$, $v = e^x$.

$$\begin{aligned} I &= \Big[xe^x\Big]_0^1 - \int_0^1 1 \times e^x\,\mathrm{d}x = \Big[xe^x\Big]_0^1 - \Big[e^x\Big]_0^1 \\ &= \left(1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0\right) - \left(e^1 - e^0\right) = e - 0 - (e-1) = e - e + 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{I = 1}$$

Exercice 6 — Calculer

$$T = \int_0^{\pi/3} x\cos x\,\mathrm{d}x, \qquad I = \int_1^2 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x, \qquad J = \int_1^e x\ln x\,\mathrm{d}x.$$

Exemple

Calculer $\displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x$ et $I = \int e^x \sin x\,\mathrm{d}x$.

Corrigé

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = \int 1 \times \ln x\,\mathrm{d}x, \qquad \text{posons } u = \ln x,\ u' = \frac{1}{x}, \qquad v' = 1,\ v = x.$$

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = \Big[x\ln x\Big] - \int x \times \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \Big[x\ln x\Big] - \int 1\,\mathrm{d}x = \Big[x\ln x\Big] - [x]$$

$$\boxed{\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - x + C,\ C \in \mathbb{R}}$$

Pour $I = \int e^x \sin x \, \mathrm{d}x$, posons $u = \sin x$, $u' = \cos x$ et $v' = e^x$, $v = e^x$.

$$I = \left[e^x \sin x\right] - \int e^x \cos x \, \mathrm{d}x.$$

On calcule à présent $\int e^x \cos x \, \mathrm{d}x$ en posant $u = \cos x$, $u' = -\sin x$ et $v' = e^x$, $v = e^x$:

$$\int e^x \cos x \, \mathrm{d}x = \left[e^x \cos x\right] - \int (-e^x \sin x) \, \mathrm{d}x = e^x \cos x + \int e^x \sin x \, \mathrm{d}x.$$

D'où

$$I = e^x \sin x - \left(e^x \cos x + \int e^x \sin x \, \mathrm{d}x\right) = e^x \sin x - e^x \cos x - I$$

$$2I = e^x(\sin x - \cos x)$$

$$\boxed{I = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C, \ C \in \mathbb{R}}$$

Exercice 7 — Déterminer $\int_0^1 x^2 e^x \, \mathrm{d}x$

On donne également les intégrales suivantes à calculer par la même méthode :

$$I = \int x^2 e^x \, \mathrm{d}x, \qquad J = \int x^2 \cos x \, \mathrm{d}x, \qquad T = \int e^x \cos x \, \mathrm{d}x,$$

$$S = \int e^{2x} \sin x \, \mathrm{d}x, \qquad E = \int (\ln x)^2 \, \mathrm{d}x.$$

Les équations différentielles

Définition

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction.

Exemple

Résoudre l'équation différentielle du premier ordre $3y' + 5y = 0$, puis déterminer l'unique solution telle que $y(1) = 2$.

Corrigé

$$3y' + 5y = 0 \iff 3y' = -5y \iff \frac{y'}{y} = -\frac{5}{3}, \ y \neq 0.$$

$$\int \frac{y'}{y} \, \mathrm{d}y = \int -\frac{5}{3} \, \mathrm{d}x \iff \ln|y| = -\frac{5}{3}x + C, \ C \in \mathbb{R}.$$

$$e^{\ln|y|} = e^{-\frac{5}{3}x} \times e^C \iff \boxed{y(x) = ke^{-\frac{5}{3}x}, \ k \in \mathbb{R}}$$

Déterminons l'unique solution telle que $y(1) = 2$:

$$y(x) = ke^{-\frac{5}{3}x} \implies y(1) = ke^{-\frac{5}{3}} = 2 \implies k = 2e^{\frac{5}{3}}.$$

$$\boxed{y(x) = 2e^{\frac{5}{3}-\frac{5}{3}x} = 2\exp\left[\frac{5}{3}(1-x)\right]}$$

Exercice 8

1) Résoudre l'équation différentielle $2y' + 5y = 0$ (E_0).

2) Déterminer la solution de (E_0) telle que $f(0) = 1$.

3) Résoudre : a) $y' + 5y = 0$ b) $y' = 2(25 - y)$ c) $y' - \dfrac{y}{x} = 0$

Équations différentielles du second ordre

Du type $y'' + \omega^2 y = 0$ et $y'' - \omega^2 y = 0$.

Propriété

Les solutions de $y'' + \omega^2 y = 0$ sont de la forme

$$f(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x), \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Les solutions de l'équation $y'' - \omega^2 y = 0$ sont de la forme

$$f(x) = ae^{\omega x} + be^{-\omega x}, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Exemple

Résoudre $y'' - 9y = 0$ et $y'' + 25y = 0$ (E_0).

Corrigé

• $y'' - 9y = 0$: l'équation caractéristique est $r^2 - 9 = 0 \iff (r+3)(r-3) = 0 \iff r = -3$ ou $r = 3$.

$$\boxed{f(x) = ae^{3x} + be^{-3x},\ a, b \in \mathbb{R}}$$

• $y'' + 25y = 0$ (E_0) : l'équation caractéristique est

$$r^2 + 25 = 0 \iff r^2 - 25i^2 = 0 \iff (r - 5i)(r + 5i) = 0 \iff r = 5i \text{ ou } r = -5i.$$

Les solutions de (E_0) sont

$$\boxed{f(x) = a\cos(5x) + b\sin(5x),\ a, b \in \mathbb{R}}$$

Exemple

Déterminer la fonction f solution de $y'' - 9y = 0$ telle que $f(0) = 2$ et $f'(0) = -1$.

Corrigé

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3ae^{3x} - 3be^{-3x}$. On a

$$f(0) = ae^{3(0)} + be^{-3(0)} = 2 \iff a + b = 2 \quad (1)$$

$$f'(0) = 3ae^{3(0)} - 3be^{-3(0)} = -1 \iff 3a - 3b = -1 \quad (2)$$

$$\begin{cases} a + b = 2 & (1) \\ 3a - 3b = -1 & (2) \end{cases}$$

$3 \times (1)$: $3a + 3b = 6$; en ajoutant à (2) : $6a = 5$, donc $a = \dfrac{5}{6}$.

$-3 \times (1)$: $-3a - 3b = -6$; en ajoutant à (2) : $-6b = -7$, donc $b = \dfrac{7}{6}$.

Donc la fonction recherchée est

$$\boxed{f(x) = \frac{5}{6}e^{3x} + \frac{7}{6}e^{-3x}}$$

Exemple

1) Résoudre $2y' + 3y = 0$.

2) Soit (E') l'équation différentielle $2y' + 3y = x^2 + 1$.

a) Déterminer une fonction f, polynôme du second degré, solution de (E').

b) Montrer que si g est une solution de (E'), alors $g - f$ est une solution de (E) : $2y' + 3y = 0$.

c) Montrer que si $g - f$ est une solution de (E), alors g est une solution de (E').

d) Déterminer toutes les solutions de (E').

Corrigé

1)

$$2y' + 3y = 0 \iff 2y' = -3y \iff \frac{y'}{y} = -\frac{3}{2},\ y \neq 0.$$

$$\int \frac{y'}{y}\,\mathrm{d}y = \int -\frac{3}{2}\,\mathrm{d}x \iff \ln|y| = -\frac{3}{2}x + C \iff \boxed{y(x) = ke^{-\frac{3}{2}x},\ k \in \mathbb{R}}$$

2a) Cherchons $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, avec $f'(x) = 2ax + b$.

f solution de $(E') \iff 2f' + 3f = x^2 + 1$:

$$2(2ax + b) + 3(ax^2 + bx + c) = x^2 + 1$$

$$3ax^2 + (4a + 3b)x + 2b + 3c = x^2 + 1$$

Par identification :

$$3a = 1, \qquad 4a + 3b = 0, \qquad 2b + 3c = 1$$

$$a = \frac{1}{3}, \qquad \frac{4}{3} + 3b = 0 \Rightarrow b = -\frac{4}{9}, \qquad 2\left(-\frac{4}{9}\right) + 3c = 1 \Rightarrow c = \frac{17}{27}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{9}x + \frac{17}{27}}$$

2b) Supposons que g est une solution de (E') :

$$\begin{cases} 2g' + 3g = x^2 + 1 & (1) \\ 2f' + 3f = x^2 + 1 & (2) \end{cases}$$

$(1) - (2)$: $2(g - f)' + 3(g - f) = 0$, donc $(f - g)$, et de même $(g - f)$, est une solution de (E).

2c) Réciproquement, supposons que $g - f$ est une solution de (E) :

$$2(g-f)' + 3(g-f) = 0 \iff 2g' + 3g = 2f' + 3f.$$

Or f est une solution de (E'), donc $2f' + 3f = x^2 + 1$, d'où

$$2g' + 3g = x^2 + 1,$$

ce qui montre que g est une solution de (E').
2d) On en déduit que les solutions de (E') s'écrivent comme la somme d'une solution de l'équation homogène (E) et de la solution particulière f :

$$\boxed{y(x) = ke^{-\frac{3}{2}x} + \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{9}x + \frac{17}{27},\ k \in \mathbb{R}}$$

Exercice 9

Résoudre l'équation différentielle $3y'' + y = 0$.

Exercice 10

1) Résoudre l'équation différentielle $y'' + 16y = 0$ (E_0).

2) Trouver la solution de (E_0) telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 4$.

Exercice 11

Résoudre les équations différentielles $4y'' - 9y = 0$ et $y'' + 9y = 0$.

Exercice 12

1) Résoudre l'équation différentielle $y'' - 9y = 0$ (E_0).

2) Trouver la solution de (E_0) telle que $y(0) = 2$ et $y'(0) = 1$.

3) Résoudre : a) $y'' - 36y = 0$ b) $y'' + 36y = 0$

Exercice 13

1) Résoudre l'équation différentielle $y'' + 3y = 0$ (E_0).

2) Déterminer la solution de (E_0) telle que $y(0) = 2$ et $y'(0) = -3$.

Exercice 14

On donne (E) : $y' - 2y = 1 + 6x$.

1) Montrer que l'équation (E) admet une fonction affine comme solution.

2) Résoudre l'équation homogène $y' - 2y = 0$ (E_0).

3) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Exemple — I et J deux intégrales

I et J sont deux intégrales définies par

$$I = \int_0^{\pi} e^x \sin x \, \mathrm{d}x, \qquad J = \int_0^{\pi} e^x \cos x \, \mathrm{d}x.$$

a) Démontrer que $I + J = 0$ et que $I - J = 1 + e^{\pi}$.

b) En déduire les valeurs exactes de I et J.

Exemple — Calculer $J = \displaystyle\int_1^2 x \ln x \, \mathrm{d}x$ et $T = \displaystyle\int_0^1 x^2 e^x \, \mathrm{d}x$

Corrigé

Pour J, posons $u = \ln x$, $u' = \dfrac{1}{x}$ et $v' = x$, $v = \dfrac{1}{2}x^2$.

$$J = \left[\tfrac{1}{2}x^2 \ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \tfrac{1}{2}x^2 \times \tfrac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{2}x^2 \ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \tfrac{1}{2}x \, \mathrm{d}x$$
$$= \left(\tfrac{1}{2}(2)^2 \ln 2 - \tfrac{1}{2}(1)^2 \ln 1\right) - \left[\tfrac{1}{4}x^2\right]_1^2 = 2\ln 2 - \left(1 - \tfrac{1}{4}\right)$$

$$\boxed{J = 2\ln(2) - \frac{3}{4}}$$

Pour T, posons $u = x^2$, $u' = 2x$ et $v' = e^x$, $v = e^x$.

$$T = \left[x^2 e^x\right]_0^1 - \int_0^1 2xe^x \, \mathrm{d}x = \left[x^2 e^x\right]_0^1 - 2\int_0^1 xe^x \, \mathrm{d}x.$$

Or, en posant $u = x$, $u' = 1$, $v' = e^x$, $v = e^x$,

$$\int_0^1 xe^x \, \mathrm{d}x = \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x \, \mathrm{d}x = \left[xe^x\right]_0^1 - \left[e^x\right]_0^1 = e - (e-1) = 1.$$

D'où

$$T = (e - 0) - 2 \times 1 = e - 2, \qquad \boxed{T = e - 2}$$

5 Problème de synthèse (Session normale 1997, série C)

Partie A

Exercice 15

Soit la fonction f définie par

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \dfrac{x \ln x}{x+1}, \text{ si } x > 0. \end{cases}$$

1) Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

2) Soit φ la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $\varphi(x) = \ln x + x + 1$.

   a) Étudier les variations de φ.

   b) Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique β telle que $0{,}27 \leqslant \beta \leqslant 0{,}28$.

1) a) Exprimer $f'(x)$ en fonction de $\varphi(x)$. En déduire les variations de f.
   b) Vérifier que $f(\beta) = -\beta$.
2) Tracer la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J).
(On prendra $\ln 0{,}27 \approx -1{,}31$, $\ln 0{,}28 \approx -1{,}27$, $\ln 2 \approx 0{,}7$, $\ln 3 \approx 1{,}1$, $\ln 5 \approx 1{,}6$.)

Corrigé

1) Continuité en 0. On sait que $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0}(x+1) = 1$, d'où

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{0}{1} = 0 = f(0).$$

Donc f est continue en 0.
Dérivabilité en 0.

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{x} \times \frac{x \ln x}{x+1} = \frac{\ln x}{x+1}.$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x+1} = \lim_{x\to 0^+} \ln x \times \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x+1} = (-\infty) \times 1 = -\infty.$$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$: f n'est pas dérivable en 0, mais f admet en 0 une demi-tangente verticale.
2a) φ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables, et

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x} + 1.$$

Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $\dfrac{1}{x} > 0$ et $1 > 0$, donc $\varphi'(x) > 0$: φ est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.
2b) $[0{,}27\,;0{,}28] \subset]0\,;+\infty[$, donc φ est croissante sur $[0{,}27\,;0{,}28]$. Avec les valeurs approchées données,

$$\varphi(0{,}27) \approx -1{,}31 + 0{,}27 + 1 = -0{,}04, \qquad \varphi(0{,}28) \approx -1{,}27 + 0{,}28 + 1 = 0{,}01.$$

Donc φ réalise une bijection croissante de $[0{,}27\,;0{,}28]$ sur $[\varphi(0{,}27)\,;\varphi(0{,}28)] = [-0{,}04\,;0{,}01]$, et $0 \in [-0{,}04\,;0{,}01]$. D'après le théorème de la bijection, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution $\beta \in [0{,}27\,;0{,}28]$.

1a) f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables (le dénominateur ne s'annulant pas).

$$(x\ln x)' = \ln x + 1, \qquad (x+1)' = 1.$$

$$f'(x) = \frac{(\ln x+1)(x+1) - x\ln x}{(x+1)^2} = \frac{x\ln x + \ln x + x + 1 - x\ln x}{(x+1)^2} = \frac{\ln x + x + 1}{(x+1)^2}.$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{\varphi(x)}{(x+1)^2}}$$

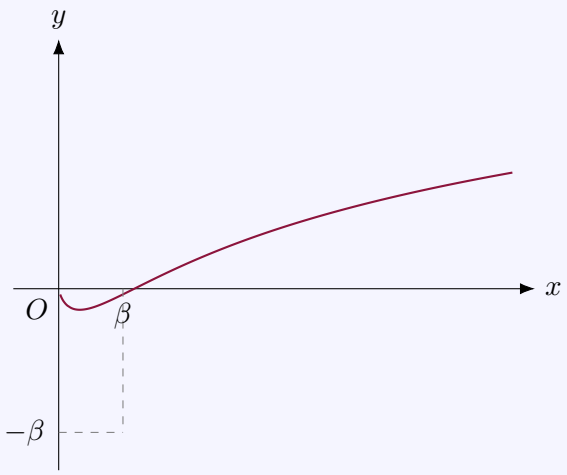
Comme $\varphi(\beta) = 0$, on a $f'(\beta) = 0$.
Signe de f'. Pour $x \in]0\,;\beta[$, φ étant croissante, $\varphi(x) < \varphi(\beta) = 0$, donc $f'(x) < 0$: f est décroissante sur $]0\,;\beta[$.
Pour $x \in]\beta\,;+\infty[$, $\varphi(x) > \varphi(\beta) = 0$, donc $f'(x) > 0$: f est croissante sur $]\beta\,;+\infty[$.
1b) $\varphi(\beta) = 0 \iff \ln\beta + \beta + 1 = 0 \iff \ln\beta = -(\beta+1)$. Donc

$$f(\beta) = \frac{\beta\ln\beta}{\beta+1} = \frac{-\beta(\beta+1)}{\beta+1} = -\beta.$$

Limite en $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{1+\frac{1}{x}} = +\infty.$$

x	0		β		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0 ‖	$\searrow$	$-\beta$	$\nearrow$	$+\infty$



Partie B

Exercice 16

1) a) Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique α dans $[3\,;4]$.
   b) Démontrer que les équations $f(x) = 1$ et $e^{1+\frac{1}{x}} = x$ sont équivalentes.

2) Soit g la fonction définie pour tout réel strictement positif x par $g(x) = e^{1+\frac{1}{x}}$.

   a) Étudier les variations de g.

b) Démontrer que pour tout $x \in [3\,;4]$, $g(x)$ est un élément de $[3\,;4]$.

c) Démontrer que $\forall x \in [3\,;4],\ \ g'(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

(On prendra $e^{4/3} \approx 3{,}8$ et $e^{5/4} \approx 3{,}49$.)

3) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = g(u_n)$.

a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$. En déduire que $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.

b) Démontrer que la suite (u_n) est convergente. Calculer sa limite.

c) Pour quelles valeurs de n, u_n est-elle une valeur approchée de α à 10^{-2} près ?

Corrigé

1a) $[3\,;4] \subset]\beta\,;+\infty[$; f est continue et strictement croissante sur $[3\,;4]$, donc f réalise une bijection croissante de $[3\,;4]$ sur

$$[f(3)\,;f(4)] = \left[\frac{3\ln 3}{4}\,;\frac{4\ln 4}{5}\right] \approx [0{,}82\,;1{,}1].$$

Or $1 \in [0{,}82\,;1{,}1]$, donc l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α dans $[3\,;4]$ (théorème de la bijection).

1b)

$$f(x) = 1 \iff \frac{x\ln x}{x+1} = 1 \iff x\ln x = x+1 \iff \ln x = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$$
$$\iff e^{\ln x} = e^{1+\frac{1}{x}} \iff x = e^{1+\frac{1}{x}}.$$

2a) g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme composée de fonctions dérivables.

$$g'(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)' e^{1+\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x^2}e^{1+\frac{1}{x}}.$$

Pour tout $x > 0$, $-\dfrac{1}{x^2} < 0$ et $e^{1+\frac{1}{x}} > 0$, donc $g'(x) < 0$: g est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

2b) $[3\,;4] \subset]0\,;+\infty[$, donc pour $3 \leqslant x \leqslant 4$, g étant décroissante,

$$g(4) \leqslant g(x) \leqslant g(3).$$

Or $g(3) = e^{1+\frac{1}{3}} = e^{4/3} \approx 3{,}8$ et $g(4) = e^{1+\frac{1}{4}} = e^{5/4} \approx 3{,}49$, donc

$$3{,}49 \leqslant g(x) \leqslant 3{,}8,$$

et comme $3 \leqslant 3{,}49$ et $3{,}8 \leqslant 4$, on a $3 \leqslant g(x) \leqslant 4$: pour tout $x \in [3\,;4]$, $g(x) \in [3\,;4]$.

2c) Pour $3 \leqslant x \leqslant 4$, $9 \leqslant x^2 \leqslant 16$, donc $\dfrac{1}{16} \leqslant \dfrac{1}{x^2} \leqslant \dfrac{1}{9}$.

De plus $\dfrac{1}{4} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{3}$, donc $\dfrac{5}{4} \leqslant 1 + \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{4}{3}$, et par croissance de l'exponentielle,

$$e^{5/4} \leqslant e^{1+\frac{1}{x}} \leqslant e^{4/3}, \qquad \text{soit} \qquad 3{,}49 \leqslant e^{1+\frac{1}{x}} \leqslant 3{,}8.$$

En multipliant les bornes positives,

$$\frac{1}{16} \times 3{,}49 \leqslant \frac{1}{x^2}e^{1+\frac{1}{x}} \leqslant \frac{1}{9} \times 3{,}8, \qquad \text{soit} \qquad 0{,}218 \leqslant |g'(x)| \leqslant 0{,}422.$$

Donc $|g'(x)| \leqslant 0{,}422 < 0{,}5$, d'où

$$\boxed{\forall x \in [3\,;4],\ |g'(x)| \leqslant \frac{1}{2}}$$

3a) Montrons par récurrence que $u_n \in [3\,;4]$ pour tout n. $u_0 = 3 \in [3\,;4]$: la propriété est vraie au rang 0. Supposons $u_n \in [3\,;4]$: d'après 2b), $g(u_n) \in [3\,;4]$, donc $u_{n+1} = g(u_n) \in [3\,;4]$: la propriété est vraie au rang $n+1$. D'après le principe de récurrence, $u_n \in [3\,;4]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Comme $u_n, \alpha \in [3\,;4]$ et $|g'| \leqslant \dfrac{1}{2}$ sur $[3\,;4]$, l'inégalité des accroissements finis donne

$$|g(u_n) - g(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|, \qquad \text{soit} \qquad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|.$$

Montrons par récurrence que $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$. Comme $3 \leqslant \alpha \leqslant 4$, on a $-4 \leqslant -\alpha \leqslant -3$, donc $-1 \leqslant u_0 - \alpha = 3 - \alpha \leqslant 0$, d'où $|u_0 - \alpha| \leqslant 1 = \dfrac{1}{2^0}$: la propriété est vraie au rang 0.
Supposons $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$. Alors

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

La propriété est vraie au rang $n+1$. D'après le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}}$$

3b) De l'encadrement précédent,

$$-\frac{1}{2^n} \leqslant u_n - \alpha \leqslant \frac{1}{2^n},$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$. D'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n - \alpha) = 0, \qquad \text{donc} \qquad \lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha.$$

La suite (u_n) est donc convergente, de limite α.
3c) u_n est une valeur approchée de α à 10^{-2} près dès que $\dfrac{1}{2^n} \leqslant 10^{-2}$, c'est-à-dire $2^n \geqslant 100$, soit $n \geqslant 7$ (car $2^6 = 64 < 100 \leqslant 128 = 2^7$).

Thème 12

Dénombrement – Probabilités

Sommaire

1. Le dénombrement
   - Cardinal d'un ensemble, propriétés
   - Arbre pondéré, roulettes, diagramme de Venn, diagramme de Carroll
2. Principe de multiplication
3. Notation factorielle
4. Les p-listes (arrangements avec répétition)
5. Arrangements sans répétition
6. Anagrammes
7. Combinaisons
8. Triangle de Pascal
9. Binôme de Newton
10. Probabilités
    - Définitions, équiprobabilité, propriétés
    - Exercices corrigés (cartes, dés, urnes)
    - Probabilités conditionnelles, arbre de probabilité

13.1 – Le dénombrement

Dénombrer, c'est compter les issues de la réalisation d'une expérience aléatoire.

Le cardinal d'un ensemble fini E est le nombre d'éléments de cet ensemble. On le note $\operatorname{Card} E$.

Soit A et B deux sous-ensembles de E. On a :

$$\operatorname{Card}(A \cup B) = \operatorname{Card}(A) + \operatorname{Card}(B) - \operatorname{Card}(A \cap B)$$

Si A et B sont disjoints, on a $A \cap B = \varnothing$ et

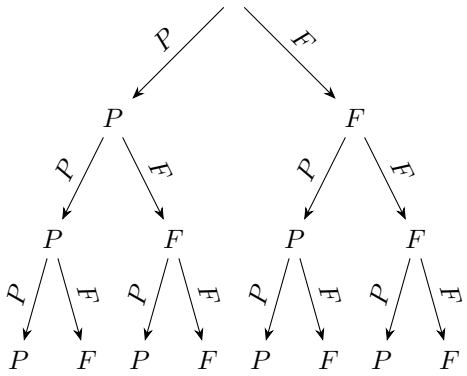
$$\operatorname{Card}(A \cup B) = \operatorname{Card}(A) + \operatorname{Card}(B)$$

Si A est un sous-ensemble de E ($A \subset E$), on note $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E. On a :

$$\operatorname{Card}(A) + \operatorname{Card}(\overline{A}) = \operatorname{Card}(E) \qquad \text{soit} \qquad \operatorname{Card}(\overline{A}) = \operatorname{Card}(E) - \operatorname{Card}(A)$$

Activités

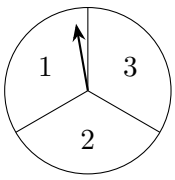
1) Arbre de dénombrement (arbre pondéré) : On lance trois fois de suite une pièce de monnaie non truquée, de côté pile P et face F. Dénombrer le nombre d'issues possibles à l'aide d'un arbre pondéré.



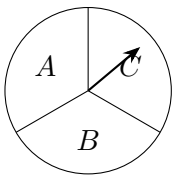
$$\Omega = \{PPP,\ PPF,\ PFP,\ PFF,\ FPP,\ FPF,\ FFP,\ FFF\} \qquad \operatorname{Card}\Omega = 8$$

On dénombre 8 issues possibles.

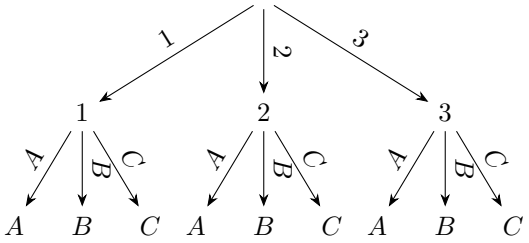
2) Deux roulettes : On fait tourner deux roulettes : la première avec les chiffres $1, 2, 3$, la deuxième avec les lettres A, B, C. La flèche de chaque roulette ne peut s'arrêter que sur un chiffre ou une lettre. Dénombrer l'univers des possibles à l'aide d'un arbre puis d'un tableau.



Roulette 1



Roulette 2



$$\text{Card}\,\Omega = 9$$

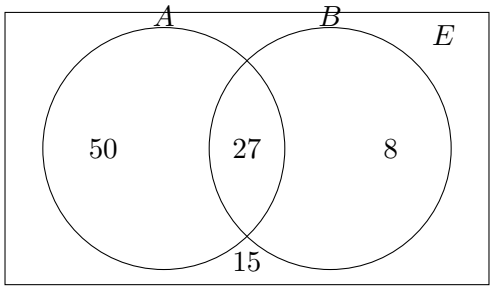
	1	2	3
A	$1A$	$2A$	$3A$
B	$1B$	$2B$	$3B$
C	$1C$	$2C$	$3C$

$$\text{Card}\,\Omega = 3 \times 3 = 9$$

Le diagramme de Venn

Parmi une promotion de 100 diplômés qui ont obtenu leur diplôme à l'université il y a 10 ans : 77 sont aujourd'hui salariés ; 35 sont pères de famille ; 27 sont salariés et pères de famille.

a) On note E l'ensemble des diplômés. On désigne par A l'ensemble des diplômés qui sont salariés et B l'ensemble des diplômés qui sont pères de famille. Quel est le nombre de diplômés qui ne sont ni salariés ni pères de famille ?



$$\text{Card}(A \cup B) = 50 + 27 + 8 = 85$$

On en déduit qu'il y a $100 - 85 = 15$ personnes qui ne sont ni salariées ni pères de famille.

Le diagramme de Carroll

	A	$\overline{A}$	Total
B	27	$35 - 27 = 8$	35
$\overline{B}$	$77 - 27 = 50$	$65 - 50 = 15$	$100 - 35 = 65$
Total	77	$100 - 77 = 23$	100

Exercice 1 : Soient les ensembles E, A et B tels que :

$$E = \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\} \qquad A = \{0;1;3;5;7\} \qquad B = \{0;2;4;5;7;9\}$$

Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$.

Corrigé :

$$A \cap B = \{0;5;7\} \qquad A \cup B = \{0;1;2;3;4;5;7;9\}$$

$$\overline{A} = \{2;4;6;8;9\} \qquad \overline{B} = \{1;3;6;8\}$$

Exercice 2 : Soient les ensembles E, A, B et C tels que :

$$E = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j\} \qquad A = \{a,b,c,i\} \qquad B = \{b,c,d,e\} \qquad C = \{c,d,i,j\}$$

Déterminer $A \cap B$, $A \cap B \cap C$, $A \cup C$, $\overline{A}$ et $\overline{C}$.

13.2 – Principe de multiplication

Pierre constate, en regardant dans son armoire, qu'il possède 5 tee-shirts, 4 pantalons, 6 paires de chaussures (dans des boîtes) et 3 sacs à dos.

De combien de manières différentes peut-il s'habiller le matin ?

1re étape tee-shirt	2ème étape pantalon	3ème étape chaussures	4ème étape sac à dos
5	4	6	3

On multiplie le nombre de choix possibles à chacune des étapes.

Le nombre de tenues différentes est : $5 \times 4 \times 6 \times 3 = 360$.

La notation factorielle

On appelle factorielle n le nombre noté $n!$ défini par :

$$n! = n(n-1)(n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1, \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

Par convention : $0! = 1$ et $1! = 1$.

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6 \qquad 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Avec la calculatrice :

$$9! = 362\,880 \qquad 4! = 24 \qquad 5! = 120, \quad 5 \times 4! = 120, \quad \text{donc } 5! = 5 \times 4!$$

Calculer :

$$\frac{8!}{7!} = \frac{8 \times \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 8 \qquad \frac{8!}{6!} = \frac{8 \times 7 \times \cancel{6!}}{\cancel{6!}} = 8 \times 7 = 56$$

$$\frac{21!}{20!} = \frac{21 \times \cancel{20!}}{\cancel{20!}} = 21 \qquad \frac{6!}{5!} = \frac{6 \times \cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 6$$

$$\frac{(n+2)!}{(n-1)!} = \frac{(n+2)(n+1)(n)\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = n(n+1)(n+2)$$

Les p-listes

Une banque distribue à chacun de ses clients un identifiant de connexion formé de 4 chiffres entre 0 et 9. Combien existe-t-il de modes de connexion ?

1er		2ème		3ème		4ème
10	×	10	×	10	×	10

Chaque chiffre peut être utilisé plusieurs fois, on a :

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$$

Cet exemple illustre la formule de dénombrement des p-listes.

Arrangement avec répétition : on appelle arrangement avec répétition de p éléments choisis parmi n le nombre noté $\overline{A}_n^p$:

$$\overline{A}_n^p = n^p, \qquad n \geqslant 1$$

Exemples : $\overline{A}_{26}^5 = 26^5$ $\quad$ $\overline{A}_{10}^4 = 10^4$ $\quad$ $\overline{A}_3^2 = 3^2$

Arrangement sans répétition : on appelle arrangement sans répétition de p éléments distincts choisis parmi n le nombre noté A_n^p, avec $1 \leqslant p \leqslant n$:

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Calculer :

$$A_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 4! = 24 \qquad A_n^0 = \frac{n!}{(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

$$A_n^1 = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n \times (n-1)!}{(n-1)!} = n$$

$$A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times \cancel{6!}}{\cancel{6!}} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$$

Avec la calculatrice : $A_4^3 = 4\,nPr\,3 = 24$ $\quad$ $A_{10}^4 = 5040$

Exercice 3 – Simplifier :

$$1)\ \frac{(n+2)!}{n!} \qquad 2)\ \frac{n!}{(n-1)!}$$

△ Attention

La formule A_n^p s'utilise quand l'expérience s'apparente à un **tirage successif sans remise**.

Exercice 4 – Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation : $A_n^2 = 72$

Corrigé :

$$\frac{n!}{(n-2)!} = 72 \implies \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 72 \implies n(n-1) = 72$$

$$n^2 - n - 72 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-72) = 1 + 288 = 289$$

$$n_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-17}{2} = -8 \notin \mathbb{N} \qquad n_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+17}{2} = 9 \in \mathbb{N}$$

$$\text{donc } S = \{9\}$$

Exercice 5 – Résoudre dans $\mathbb{N}$:

$$1)\ A_n^4 = 42\,A_n^2 \qquad 2)\ A_{2n}^2 - 5A_n^2 = 50$$

Une urne contient 4 boules numérotées a, b, c et d. On tire successivement 3 boules, en notant après chaque tirage le numéro obtenu puis en remettant la boule tirée dans l'urne avant le tirage suivant, soit : on effectue 3 tirages avec remise parmi 4 possibles.

$$\overline{A}_4^3 = 4^3 \text{ soit } 64 \text{ possibilités}$$

Anagramme

Le nombre d'anagrammes d'un "mot" de n lettres distinctes est $n!$.

Nombre d'anagrammes du mot BIC : BIC, BCI, IBC, ICB, CIB, CBI (6 possibilités), soit BIC formé de 3 lettres distinctes : $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$.

Si une lettre est répétée p fois, on divise par $p!$. De même, si plusieurs lettres sont répétées, on divise par le produit des factorielles correspondantes.

Anagramme de TABLEAU : Le nombre d'anagrammes de TABLEAU est $\dfrac{7!}{2!}$

TABLEAU
7 lettres : 7!
2 A : 2!

Anagramme de ANANAS :

ANANAS
6 lettres : 6!
3 A : 3!
2 N : 2!

Le nombre d'anagrammes de ANANAS est $\dfrac{6!}{3! \times 2!}$

Exercice 6: Déterminer le nombre d'anagrammes des mots : PISE, ANAGRAMME, SOPHIE, CALCULIS, MISSISSIPI.

Combinaison

Le nombre de combinaisons de p éléments choisis parmi n $(1 \leqslant p \leqslant n)$ est :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} \qquad C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Cette formule s'utilise si l'expérience s'apparente à un **tirage simultané**. Il n'y a pas d'ordre possible dans le tirage.

Exemple : calculer

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!\,3!} = 10 \qquad C_9^3 = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9!}{3!\,6!} = 84$$

Exercice 7: Avec la calculatrice, déterminer C_8^5 ; C_{34}^4 ; C_{25}^{24}. **Exercice 8:** Calculer à la main C_{12}^8 ; C_7^0 ; C_5^5 ; C_{16}^3.

Propriété

$$C_n^p = C_n^{n-p} \qquad C_n^0 = C_n^n$$

Exercice 9 – Résoudre les équations, $n \in \mathbb{N}$:

1) $3C_n^4 = 14C_n^2$ 2) $5C_n^3 = C_{n+2}^4$

3) $C_n^4 = \dfrac{15}{4}A_n^2$ 4) $C_n^3 + C_n^2 = 15(n-1)$

Exercice 10 : Démontrer que $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$.

Triangle de Pascal

Le triangle de Pascal est un ensemble triangulaire de coefficients binomiaux.

n \ p	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1

$$C_1^1 = 1 \quad C_2^1 = 2 \qquad C_3^2 = 3 \quad C_4^2 = 6$$

$$C_3^0 + C_3^1 = C_4^1 \qquad \binom{3}{0} + \binom{3}{1} = \binom{4}{1}$$

$$C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} = C_n^p \qquad \forall\, n, p \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant p \leqslant n-1$$

Le binôme de Newton

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N}: \qquad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, a^k\, b^{n-k}$$

$$(a+b)^2 = \sum_{k=0}^{2} C_2^k\, a^k\, b^{2-k} = C_2^0\, a^0 b^2 + C_2^1\, a^1 b^1 + C_2^2\, a^2 b^0$$

$$(a+b)^3 = \sum_{k=0}^{3} C_3^k\, a^k\, b^{3-k} = C_3^0 a^0 b^3 + C_3^1 a^1 b^2 + C_3^2 a^2 b^1 + C_3^3 a^3 b^0$$

$$(x+2y)^4 = \sum_{k=0}^{4} C_4^k\, x^k (2y)^{4-k} = C_4^0 x^0 (2y)^4 + C_4^1 x^1 (2y)^3 + C_4^2 x^2 (2y)^2 + C_4^3 x^3 (2y)^1 + C_4^4 x^4 (2y)^0$$

Exercice 11 : À l'aide de la calculatrice et du binôme de Newton, développer : $(1+3x)^3$; $(3x+2)^2$; $(2x+y)^4$; $(2x+3y)^5$.

Probabilité

Définition : la probabilité d'un événement de l'univers Ω est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

Lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité, on dit qu'il y a **équiprobabilité**. Dans ce cas :

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables de } A}{\text{nombre de cas possibles de } \Omega} = \frac{\operatorname{Card} A}{\operatorname{Card} \Omega}$$

Propriétés

Soient A et B deux événements, on a :

- $P(\varnothing) = 0$ (probabilité de l'événement impossible)
- $P(\Omega) = 1$ (probabilité de l'événement certain)
- $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Si A et B sont disjoints, $A \cap B = \varnothing$, on a $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

L'événement "A et B" est représenté par $A \cap B$. L'événement "A ou B" est représenté par $A \cup B$.

Si A est un événement réunion de k événements élémentaires, on a :

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\operatorname{Card} A}{\operatorname{Card} \Omega}$$

Chacun des éléments contenus dans A est appelé un **cas favorable**. On a donc, dans le cas de l'équiprobabilité :

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Le calcul de probabilité se ramène donc, dans ce cas, à deux calculs de dénombrement. L'équiprobabilité sera signalée dans les exercices par des expressions comme : *au hasard, indiscernable au toucher, non pipé, non truqué*, etc.

Exercice 12 : On tire au hasard 5 cartes d'un jeu de 32. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 cœurs exactement parmi les 5 cartes tirées ?

Corrigé : le mot "au hasard" signifie que l'on est dans le cas d'équiprobabilité. Le nombre de cas possibles associés à cette épreuve est le nombre de manières de tirer 5 cartes parmi 32 : C_{32}^5.

Le nombre de cas favorables, c'est-à-dire le nombre de manières de tirer 5 cartes contenant exactement 3 cœurs, s'obtient ainsi : le nombre de manières de tirer 3 cœurs parmi les 8 cœurs est C_8^3 ; les deux autres cartes ne doivent pas être des cœurs et sont donc à prendre parmi les $32-8=24$ cartes restantes, il y a C_{24}^2 manières de les prendre.

Le nombre de mains favorables est donc $C_8^3 \times C_{24}^2$. La probabilité de l'événement "tirer 3 cœurs exactement sur 5 cartes" est :

$$\frac{C_8^3 \times C_{24}^2}{C_{32}^5} = \frac{69}{899} \approx 0{,}077.$$

Exercice 13 : On lance deux dés non pipés. Déterminer la probabilité de l'événement A : obtenir 6 en faisant la somme des deux nombres lus.

Corrigé : les deux dés étant non pipés, il y a équiprobabilité des couples de résultats possibles, qui sont au nombre de 36. Les couples favorables, c'est-à-dire les couples dont la somme fait 6, sont :

$$(1,5),\ (5,1),\ (2,4),\ (4,2),\ (3,3)$$

Il y a donc 5 cas favorables. D'où la probabilité de réaliser A :

$$P(A) = \frac{5}{36} \approx 0{,}139.$$

Exercice 14 : Une urne contient trois boules blanches et quatre boules rouges, indiscernables au toucher.

1. On tire simultanément deux boules de l'urne, déterminer la probabilité p_1 de tirer deux boules rouges.

2. On tire une boule, on note sa couleur, on la remet dans l'urne et on tire une deuxième boule. Quelle est la probabilité p_2 de tirer deux boules rouges ?

Corrigé :

1. Il y a équiprobabilité, car les boules sont indiscernables au toucher. Nombre de cas possibles : il y a sept boules donc C_7^2 manières de prendre deux boules. Nombre de cas favorables : il y a quatre boules rouges donc C_4^2 manières de prendre deux boules rouges.

$$p_1 = \frac{C_4^2}{C_7^2} = \frac{4\times 3}{2!} \times \frac{2!}{7\times 6} = \frac{2}{7} \approx 0{,}286.$$

2. Il y a 7^2 manières de prendre les deux boules (tirages successifs avec remise, dans un ensemble à sept éléments). De même, le nombre de cas favorables est 4^2, d'où

$$p_2 = \frac{4^2}{7^2} \approx 0{,}327.$$

Exercice 15 : Une urne contient trois boules blanches, deux boules rouges et une boule verte. Les boules sont indiscernables au toucher.

1. On tire au hasard, successivement et sans remise, deux boules de l'urne.

a. Calculer la probabilité des événements suivants : A : "les deux boules tirées sont de la même couleur" ; B : "la première boule tirée est blanche". On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

b. Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche au second tirage.

Corrigé :

- **Ensemble des cas possibles.** Soit $E = \{b_1, b_2, b_3, r_1, r_2, v\}$ l'ensemble des six boules de l'urne : 3 blanches, 2 rouges et 1 verte. Un cas possible, c'est-à-dire un tirage successif et sans remise de 2 boules, peut être décrit comme une liste de 2 éléments distincts de E, notée (x_1, x_2) : x_1 étant la première boule tirée, x_2 étant la deuxième boule tirée.

  L'ensemble des cas possibles est l'ensemble des 2-listes (ou couples) d'éléments distincts de E. Il y a A_6^2 cas possibles, soit 30 cas possibles :

$$A_6^2 = 6\times 5 = 30.$$

  (Intuitivement, il y a 6 choix possibles pour la 1re boule, puis 5 pour la deuxième puisqu'il n'y a pas de remise et l'ordre est important puisque les 2 tirages sont successifs.)

- **Équiprobabilité.** Les tirages se faisant au hasard, on peut faire l'hypothèse d'équiprobabilité, et la probabilité d'un événement A est :

$$p(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables à la réalisation de } A}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

- **Probabilité de A : "les 2 boules sont de la même couleur".** A est la réunion de deux événements incompatibles : A_1 : "les 2 boules sont blanches" ; A_2 : "les 2 boules sont rouges".

  Le nombre de cas favorables à A_1 est le nombre de 2-listes d'éléments distincts de $E_1 = \{b_1, b_2, b_3\}$. Il y en a : $A_3^2 = 3 \times 2$ et $p(A_1) = \dfrac{3 \times 2}{6 \times 5} = \dfrac{1}{5}$.

  Le nombre de cas favorables à A_2 est le nombre de 2-listes d'éléments distincts de $E_2 = \{r_1, r_2\}$. Il y en a : $A_2^2 = 2 \times 1 = 2$ et $p(A_2) = \dfrac{2}{6 \times 5} = \dfrac{1}{15}$:

$$p(A) = p(A_1 \cup A_2) = p(A_1) + p(A_2) = \frac{1}{5} + \frac{1}{15} = \frac{4}{15}.$$

- **Probabilité de B : "la première boule tirée est blanche".** (x_1, x_2) est favorable à B lorsque x_1 appartient à E_1 (il y a donc 3 possibilités pour x_1) et lorsque x_2 est l'une des 5 boules restantes. Il y a $3 \times 5 = 15$ cas favorables à B.

$$p(B) = \frac{3 \times 5}{6 \times 5} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{p(A) = \frac{4}{15}} \qquad \boxed{p(B) = \frac{1}{2}}$$

Remarque : on peut calculer $p(B)$ en ne considérant que la première boule : 3 chances sur 6 qu'elle soit blanche donc $p(B) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 16 – Simplifier :

$$\frac{n!}{(n-1)!} \qquad \frac{(n+2)!}{n!} \qquad C_n^2 \qquad \frac{(n+3)!}{(n+1)!}$$

Exercice 17 – Soit n un entier naturel, résoudre les équations :

$$1)\ A_n^2 = 72 \qquad n! = 132(n-2)!$$

$$2)\ A_n^4 = 72\,A_n^2 \qquad 12\,n! + 5(n+1)! = (n+2)!$$

$$3)\ 2A_n^2 + 50 = A_{2n}^2 \qquad \frac{(n+1)!}{(n-2)!} = 30$$

$$4)\ C_n^2 = 15 \qquad C_n^3 = \frac{4}{15}C_{n+2}^4$$

$$5)\ 5C_n^3 = C_{n+2}^4 \qquad C_{n+1}^2 + C_{n+1}^3 = 7$$

Exercice 18 – Simplifier :

$$\frac{C_8^3 \times 6!}{A_7^4} \qquad \frac{6! - 4!}{5!} \qquad \left(\frac{C_{11}^7}{10} - \frac{C_7^2}{5}\right)\frac{5!}{A_6^4}$$

Exercice 19 : Une urne contient 5 boules noires et 15 boules rouges. On suppose que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées. On tire simultanément 3 boules de l'urne.

a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?

Calculer la probabilité $P(A)$ de tirer exactement une boule noire.

Calculer la probabilité $P(B)$ de tirer exactement deux boules noires.

Calculer la probabilité $P(C)$ de tirer exactement trois boules noires.

Corrigé : tirage simultané de 3 boules parmi $5+15=20$:

$$\operatorname{Card}\Omega = C_{20}^3 = 1140$$

Probabilité $P(A)$ de tirer exactement une boule noire. Tirage simultané de {1N parmi 5} et {2R parmi 15} :

$$\operatorname{Card} A = C_5^1 \times C_{15}^2 = 525 \qquad P(A) = \frac{C_5^1 \times C_{15}^2}{C_{20}^3} = \frac{525}{1140} = \frac{35}{76}$$

Probabilité $P(B)$ de tirer exactement deux boules noires. Tirage simultané de 2N parmi 5 et 1R parmi 15 :

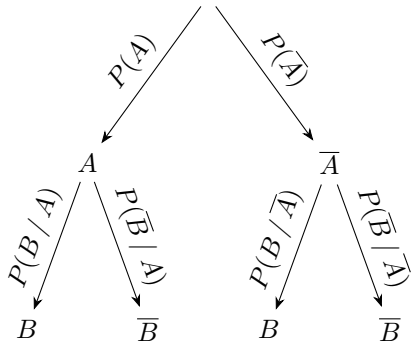
$$\operatorname{Card} B = C_5^2 \times C_{15}^1 \qquad P(B) = \frac{C_5^2 \times C_{15}^1}{C_{20}^3} = \frac{150}{1140} = \frac{5}{38}$$

Probabilité $P(C)$ de tirer exactement trois boules noires. Tirage simultané de 3N parmi 5 :

$$\operatorname{Card} C = C_5^3 \qquad P(C) = \frac{C_5^3}{C_{20}^3} = \frac{10}{1140} = \frac{1}{114}$$

L'arbre de probabilité

L'arbre de probabilité permet de représenter des épreuves successives.



$P(B\,/\,A)$: probabilité de B sachant A, est la probabilité conditionnelle que l'événement B se réalise sachant que l'événement A s'est réalisé.

$$P(B\,/\,A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \qquad \text{avec } P(A)\neq 0.$$

$$P(A\cap B) = P(A)\times P(B\,/\,A) \qquad P(B) = P(A\cap B) + P(\overline{A}\cap B)$$

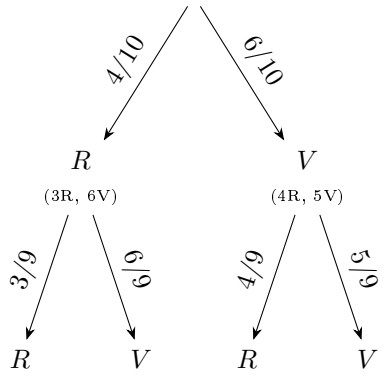
Exercice 20 : Dans une classe de 20 élèves, il y a 10 filles et 10 garçons. 6 filles font du sport et 4 garçons font du sport.

	Sport	Pas de sport	Total
Filles	6	4	10
Garçons	4	6	10
Total	10	10	20

Quelle est la probabilité qu'un élève fasse du sport sachant que c'est un garçon ?

$$P(\text{Sport} \mid \text{Garçon}) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Exercice 21 : Dans un sac, il y a 4 boules rouges et 6 boules vertes. On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne. Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge au deuxième tirage ?



Premier et deuxième tirage :

$$P(R \cap R) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}$$

On peut avoir (R et R) ou (V et R) :

$$P(R) = P(R \cap R) + P(V \cap R) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} + \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{12+24}{90} = \frac{36}{90}$$

$$P(R) = \frac{36}{90} = \frac{2}{5}$$

Exercice 22 : A et B deux événements d'un univers Ω.

1) On donne $P(A) = 0{,}2$; $P(B) = 0{,}4$; $P(A \cap B) = 0{,}01$. Calculer $P_B(A)$; $P_A(B)$.

2) $P(A) = 0{,}2$; $P_A(B) = 0{,}3$ et $P_B(A) = 0{,}1$. Calculer $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$.

3) $P(A) = 0{,}5$; $P(B) = 0{,}3$ et $P(A \cup B) = 0{,}65$. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 23 : A et B deux événements indépendants d'un univers Ω. $P(A) = 0{,}3$; $P(A \cup B) = 0{,}65$. Calculer $P(B)$.

Exercice 24 : A, B et C trois événements indépendants d'un même univers Ω. A et B sont indépendants :

$$P(A) = \frac{2}{5} ; \qquad P(A \cup B) = \frac{3}{4} ; \qquad P(C) = \frac{1}{2} ; \qquad P(A \cap C) = \frac{1}{10}$$

a) Calculer $P(B)$ et $P(\overline{A \cup C})$.

Exercice 25 : Dénombrement et Tirages

Combien de numéros de téléphone de 6 chiffres peut-on former ?

• Tirage successif avec remise de 6 objets parmi 10 :

$$\overline{\mathbf{A}}_{10}^{6} = 10^{6} \text{ numéros de téléphone.}$$

Combien de numéros de téléphone de 6 chiffres peut-on former en utilisant chaque chiffre une fois ?

• Arrangement sans répétition de 6 objets parmi 10 :

$$A_{10}^{6} = 10! / (10 - 6)! = 10! / 4! = 151\,200$$

Nombre de mains de 9 cartes d'un jeu de 32 cartes :

• Tirage simultané de 9 objets choisis parmi 32 :

$$C_{32}^{9} = 32! / [9!(32 - 9)!] = 32! / (9!\,23!) = 28\,048\,800$$

Exercice 26 : Tirages avec remise

Une urne contient 12 boules numérotées : 5 boules noires (N), 3 boules blanches (B) et 4 boules rouges (R). On tire successivement avec remise 5 boules de l'urne.

Urne (12 boules)

5 N (noires)
3 B (blanches)
4 R (rouges)

a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?

• Tirage successif avec remise de 5 boules parmi 12 :

$$\overline{\mathbf{A}}_{12}^{\,5} = 12^5 = 248\,832 \text{ tirages possibles.}$$

b) Combien y a-t-il de tirages possibles comportant 2 noires et 3 blanches ?

(Il peut y avoir des répétitions)

• Tirage successif avec remise, l'ordre est important.

• Il y a 5 places dont 2 pour les noires : coefficient d'ordre $C_5^{\,2}$.

• Il reste 3 places pour 3 blanches : coefficient d'ordre $C_3^{\,3}$.

$$C_5^{\,2} \times C_3^{\,3} \times \overline{\mathbf{A}}_5^{\,2} \times \overline{\mathbf{A}}_3^{\,3} = C_5^{\,2} \times 1 \times 5^2 \times 3^3 = C_5^{\,2} \times 5^2 \times 3^3 = 6\,750 \text{ tirages possibles.}$$

c) Combien y a-t-il de tirages possibles comportant 2 rouges, 1 noire et 2 blanches ?

• Tirage avec remise, l'ordre est important.

• 5 places : 2 pour les rouges, coefficient d'ordre $C_5^{\,2}$.

• Reste 3 places, 1 pour les noires, coefficient d'ordre $C_3^{\,1}$.

• Reste 2 places pour 2 blanches, coefficient d'ordre $C_2^{\,2}$.

$$C_5^{\,2} \times C_3^{\,1} \times C_2^{\,2} \times \overline{\mathbf{A}}_4^{\,2} \times \overline{\mathbf{A}}_5^{\,1} \times \overline{\mathbf{A}}_3^{\,2} = C_5^{\,2} \times 3 \times 1 \times 4^2 \times 5^1 \times 3^2 = C_5^{\,2} \times 3 \times 4^2 \times 5 \times 3^2 = 43\,200$$

Exercice 27 : Tirages sans remise

Une urne contient 12 boules telles que 5 boules sont noires, 3 boules sont blanches et 4 boules sont rouges. On tire successivement et sans remise 5 boules de l'urne.

Composition de l'urne

5 N (noires)
3 B (blanches)
4 R (rouges)

a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?

• Tirage successif sans remise de 5 boules parmi 12 :

$$A_{12}^{5} = 95\,040 \text{ tirages possibles.}$$

b) Combien y a-t-il de tirages possibles comportant 2 noires et 3 blanches ?

• Tirage successif sans remise, l'ordre est important.

• 5 places dont 2 pour les noires : coefficient d'ordre C_5^2.

• Il reste 3 places pour 3 blanches : coefficient d'ordre C_3^3.

• Tirage successif sans remise de 2 N parmi 5 N : A_5^2.

• Tirage successif sans remise de 3 B parmi 3 B : A_3^3.

Nombre de tirages possibles :

$$C_5^2 \times C_3^3 \times A_5^2 \times A_3^3 = C_5^2 \times A_5^2 \times 1 \times A_3^3 = 1\,200$$

c) Combien de tirages possibles comportant 2 rouges, 1 noire, 2 blanches ?

Choix / Ordre	Rouges (2R parmi 4)	Noires (1N parmi 5)	Blanches (2B parmi 3)
$C_5^2 \times C_3^1 \times C_2^2$	A_4^2	A_5^1	A_3^2

Nombre de tirages possibles :

$$C_5^2 \times C_3^1 \times C_2^2 \times A_4^2 \times A_5^1 \times A_3^2 = C_5^2 \times A_4^2 \times 3 \times 5 \times A_3^2$$

$$= C_5^2 \times 3 \times A_4^2 \times 5 \times A_3^2 = 10\,800 \text{ tirages possibles.}$$

Exercice 28 : Probabilités (Tirages simultanés)

Une urne contient 5 boules noires et 15 boules rouges. On suppose que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées. On tire simultanément 3 boules de l'urne.

Composition

5 Boules Noires (N)
15 Boules Rouges (R)
Total = 20 boules

a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?

• Tirage simultané de 3 boules parmi (5 + 15 = 20) : C_{20}^{3}

$$Card(\Omega) = C_{20}^{3} = 1\,140$$

b) Calculer la probabilité P(A) de tirer exactement une boule noire.

• Tirage simultané : 1 N parmi 5 N et 2 R parmi 15 R

$$Card(A) = C_{5}^{1} \times C_{15}^{2} = 5 \times 105 = 525$$
$$P(A) = (C_{5}^{1} \times C_{15}^{2}) / C_{20}^{3} = 525 / 1140 = 35 / 76$$

c) Calculer la probabilité P(B) de tirer exactement deux boules noires.

• Tirage simultané de 2 N parmi 5 N et 1 R parmi 15 R

$$Card(B) = C_{5}^{2} \times C_{15}^{1} = 10 \times 15 = 150$$
$$P(B) = (C_{5}^{2} \times C_{15}^{1}) / C_{20}^{3} = 150 / 1140 = 5 / 38$$

d) Calculer la probabilité P(C) de tirer exactement trois boules noires.

• Tirage simultané de 3 N parmi 5 N

$$Card(C) = C_{5}^{3} = 10$$
$$P(C) = C_{5}^{3} / C_{20}^{3} = 10 / 1140 = 1 / 114$$

Exercice 29

Un sac contient 5 jetons verts (numérotés de 1 à 5) et 4 jetons rouges (numérotés de 1 à 4).

Composition du sac

5 Jetons Verts (V1, V2, V3, V4, V5)
4 Jetons Rouges (R1, R2, R3, R4)
Total = 9 jetons

1) On tire successivement et au hasard 3 jetons du sac, sans remettre le jeton tiré. Calculer les probabilités :

a) De ne tirer que 3 jetons verts :

$$P = A_5^3 / A_9^3 = 60 / 504 = 5 / 42$$

b) De ne tirer aucun jeton vert :

$$P = A_4^3 / A_9^3 = 24 / 504 = 1 / 21$$

c) De tirer au plus 2 jetons verts :

$$P = 1 - P(3 \text{ ext{ verts}}) = 1 - 5/42 = 37 / 42$$

d) De tirer exactement 1 jeton vert :

$$P = (C_3^1 \times A_5^1 \times A_4^2) / A_9^3 = (3 \times 5 \times 12) / 504 = 180 / 504 = 5 / 14$$

2) On tire simultanément et au hasard 3 jetons du sac. Reprendre alors les questions a), b), c) et d).

a) De ne tirer que 3 jetons verts :

$$P = C_5^3 / C_9^3 = 10 / 84 = 5 / 42$$

b) De ne tirer aucun jeton vert :

$$P = C_4^3 / C_9^3 = 4 / 84 = 1 / 21$$

c) De tirer au plus 2 jetons verts :

$$P = 1 - P(3 \text{ ext{ verts}}) = 1 - 5/42 = 37 / 42$$

d) De tirer exactement 1 jeton vert :

$$P = (C_5^1 \times C_4^2) / C_9^3 = (5 \times 6) / 84 = 30 / 84 = 5 / 14$$

Thème 13
Bases et repères

Cours – Géométrie dans l'espace

Orientation, bases, produit vectoriel, plans, droites, sphères

Sommaire

1 Orientation dans l'espace **2**

2 Base de l'espace **3**
- 2.1 Norme dans l'espace . . . 3
- 2.2 Le produit vectoriel $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ . . . 3
- 2.3 Déterminant de trois vecteurs . . . 4

3 Plans, droites et sphères **5**
- 3.1 Plans parallèles, plans perpendiculaires . . . 5
- 3.2 Équation paramétrique d'un plan . . . 6
- 3.3 Distance d'un point à un plan . . . 6
- 3.4 Droites et plans dans l'espace . . . 7
- 3.5 Équation de la sphère . . . 7

4 Repère associé à un pavé droit **8**

5 Points cocycliques **9**
- 5.1 Lignes de niveau . . . 9

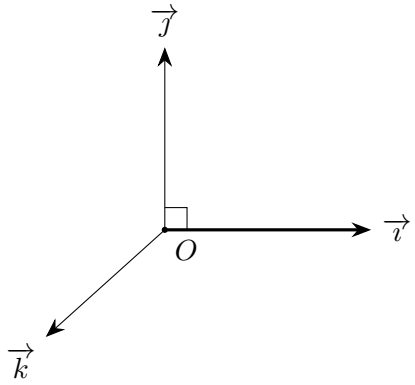
6 Complément – notion de matrice **11**

7 Rappels sur les similitudes planes **11**

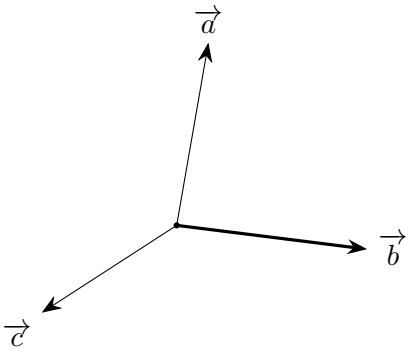
8 Exercices **13**
- 8.1 Problème 1 . . . 13
- 8.2 Problème 2 . . . 15
- 8.3 Problème 3 . . . 17
- 8.4 Problème 4 . . . 19

1. Orientation dans l'espace

Soit $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace. Orienter l'espace, c'est distinguer les repères dits **directs** de ceux qui ne le sont pas et que l'on appelle **indirects**.



Base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$



Trièdre $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ avec $\vec{a} = \vec{b} \wedge \vec{c}$

Règle de la main droite (trièdre direct)

- $\vec{\imath}$: direction du pouce
- $\vec{\jmath}$: direction de l'index
- $\vec{k}$: direction du majeur

Pour un trièdre $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ avec $\vec{a} = \vec{b} \wedge \vec{c}$: $\vec{a}$ suit le pouce, $\vec{b}$ suit l'index, $\vec{c}$ suit le majeur.

- Avec la main droite, le trièdre est **direct**.
- Avec la main gauche, on obtient la relation d'un trièdre **indirect**.

Règle du tire-bouchon

Pour un trièdre $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$: $\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath}$ est colinéaire à $\vec{k}$ de même sens, $\vec{\jmath} \wedge \vec{k}$ est colinéaire à $\vec{\imath}$ de même sens, $\vec{k} \wedge \vec{\imath}$ est colinéaire à $\vec{\jmath}$ de même sens.

△ Remarque

En tournant de $\vec{\imath}$ vers $\vec{\jmath}$, si le tire-bouchon avance dans la direction de $\vec{k}$, le trièdre est direct ; sinon il est indirect.

Exemple – en physique

La force de Lorentz s'écrit $\vec{F} = q\,\vec{v} \wedge \vec{B}$, avec :

- pouce : mouvement de $\vec{v}$;
- index : champ magnétique $\vec{B}$;
- majeur : sens de la force $\vec{F}$.

2. Base de l'espace

Définition

Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base. Tout vecteur de l'espace peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

où x, y et z sont les coordonnées de $\vec{u}$.
Une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est dite **orthonormée** si les vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont orthogonaux deux à deux et si $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \|\vec{k}\|$.

2.1 Norme dans l'espace

Dans un repère orthonormé, pour $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$:

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} \qquad \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

2.2 Le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$

Définition

Soit $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ une base directe. Le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est l'unique vecteur tel que

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\vec{u}, \vec{v})$$

Propriété

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

Exemple

L'aire $\mathcal{A}$ d'un triangle ABC est donnée par

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$$

Soit $A(1; 2; 3)$, $B(-1; 1; -1)$ et $C(0; 2; 4)$.

Corrigé

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} (-1)(1) - (-4)(0) \\ (-4)(-1) - (-2)(1) \\ (-2)(0) - (-1)(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2 + 6^2 + (-1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{38}$$

2.3 Déterminant de trois vecteurs

Dans une base, on écrit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$. Le déterminant $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est

$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix}a & b & c\\x & y & z\\x' & y' & z'\end{vmatrix} = a\begin{vmatrix}y & y'\\z & z'\end{vmatrix} - b\begin{vmatrix}x & z\\x' & z'\end{vmatrix} + c\begin{vmatrix}x & y\\x' & y'\end{vmatrix}$$

$$= a(yz' - y'z) - b(xz' - x'z) + c(xy' - x'y)$$

Exemple – calcul de déterminants

$$\delta = \begin{vmatrix}1 & 4 & 7\\2 & 5 & 8\\3 & 6 & 9\end{vmatrix} \qquad \Delta = \begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\-1 & 1 & 3\\2 & -2 & 1\end{vmatrix} \qquad \lambda = \begin{vmatrix}1 & -3 & 2\\-3 & 1 & -3\\2 & 3 & 1\end{vmatrix}$$

Corrigé

$$\delta = 1\begin{vmatrix}5 & 8\\6 & 9\end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix}2 & 8\\3 & 9\end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix}2 & 5\\3 & 6\end{vmatrix} = 1(45-48) - 4(18-24) + 7(12-15) = -3 + 24 - 21 = 0$$

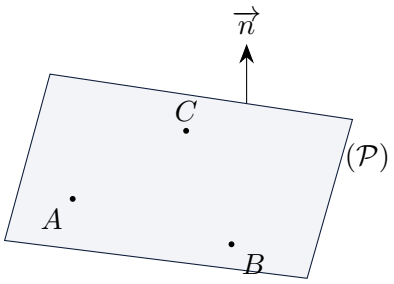
$$\Delta = 1\begin{vmatrix}1 & 3\\-2 & 1\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}-1 & 3\\2 & 1\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}-1 & 1\\2 & -2\end{vmatrix} = 1(1+6) - 2(-1-6) + 1(2-2) = 7 + 14 + 0 = 21$$

3. Plans, droites et sphères

Définition

Tout plan admet une équation de la forme $(\mathcal{P}) : ax + by + cz + d = 0$, où a, b, c, d sont des réels tels que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Le vecteur $\vec{n}(a, b, c)$ est un **vecteur normal** au plan $(\mathcal{P})$.
Un plan est défini par trois points distincts non alignés A, B, C : $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, et l'équation du plan est déterminée par

$$\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AM} = 0$$



3.1 Plans parallèles, plans perpendiculaires

Soit $(\mathcal{P}) : ax + by + cz + d = 0$ de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$ et $(\mathcal{P}') : a'x + b'y + c'z + d' = 0$ de vecteur normal $\vec{n'}(a', b', c')$.

Propriété

- $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont perpendiculaires si, et seulement si, $\vec{n} \perp \vec{n'}$, c'est-à-dire $\vec{n} \cdot \vec{n'} = 0$.
- $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont parallèles si, et seulement si, $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires, c'est-à-dire $\vec{n} = k\,\vec{n'}$ $(k \in \mathbb{R}^*)$, ou encore $\vec{n} \wedge \vec{n'} = \vec{0}$.

Exemple 1

$(\mathcal{P}) : 2x - y + 5z - 5 = 0$ et $(\mathcal{P}') : -4x + 2y - 6z + 4 = 0$. Montrer que $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont parallèles.

Corrigé

$\vec{n}(2; -1; 5)$ et $\vec{n'}(-4; 2; -6)$. On remarque que $\vec{n'} \neq -2\vec{n}$ (car $-2 \times 5 = -10 \neq -6$) : les vecteurs ne sont pas colinéaires, donc $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ ne sont pas parallèles.

Exemple 2

$(\mathcal{P}) : 2x + 4y + 4z - 3 = 0$ et $(\mathcal{P}') : 2x - 5y + 4z - 1 = 0$. Montrer que $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont perpendiculaires.

Corrigé

$\vec{n}(2; 4; 4)$ et $\vec{n'}(2; -5; 4)$. $\vec{n} \cdot \vec{n'} = 2 \times 2 + 4 \times (-5) + 4 \times 4 = 4 - 20 + 16 = 0$. Les vecteurs normaux sont orthogonaux, donc $(\mathcal{P}) \perp (\mathcal{P}')$.

Exercice 1

Soit $(\mathcal{P}) : 2x - y - z + 2 = 0$, $(\mathcal{P}') : -4x + 2y + 2z + 3 = 0$ et $(\mathcal{P}'') : x + 2z - 5 = 0$.
a) $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont-ils parallèles ou orthogonaux ?
b) $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}'')$ sont-ils parallèles ou orthogonaux ?

3.2 Équation paramétrique d'un plan

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, soit $A(x_A; y_A; z_A)$, $\vec{u}(a; b; c)$ et $\vec{v}(a'; b'; c')$ deux vecteurs formant une base d'un plan $(\mathcal{P})$. Si $M \in (\mathcal{P})$, alors $\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, soit

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} x = x_A + \alpha a + \beta a' \\ y = y_A + \alpha b + \beta b' \\ z = z_A + \alpha c + \beta c' \end{cases} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Exercice 2

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, soit $A(2; -1; -3)$, $B(0; 1; 4)$ et $C(-3; 0; 0)$.
1. Déterminer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Soit $M \in (\mathcal{P})$, $M(x; y; z)$, tel que $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$. Déterminer l'équation paramétrique du plan (ABC).

Exercice 3

$\vec{u}(1; 2; 3)$, $\vec{v}(-2; 0; 1)$ deux vecteurs formant une base d'un plan $(\mathcal{P})$. Déterminer l'équation paramétrique de $(\mathcal{P})$.

3.3 Distance d'un point à un plan

Propriété

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, la distance de $A(x_A; y_A; z_A)$ au plan $(\mathcal{P})$: $ax + by + cz + d = 0$ est

$$d(A, (\mathcal{P})) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Exemple

$A(-7; 0; 4)$ et $(\mathcal{P}) : x + 2y - 2z - 3 = 0$.

Corrigé

$$d(A, (\mathcal{P})) = \frac{|1(-7) + 2(0) - 2(4) - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|-7 - 8 - 3|}{\sqrt{9}} = \frac{18}{3} = 6$$

Exercice 4

Soit $A(2; 0; 1)$ et $(\mathcal{P}) : -x + 2y + 3z + 2 = 0$. Calculer la distance $d(A, (\mathcal{P}))$.

Rappel – distance d'un point à une droite (dans le plan)

$P(2;5)$ et la droite $(d) : 3x + y - 1 = 0$:

$$d(P,(d)) = \frac{|3(2)+5-1|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

3.4 Droites et plans dans l'espace

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, deux plans non parallèles de vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ ont pour intersection une droite dirigée par le vecteur $\vec{n} \wedge \vec{n'}$.

Exemple

Intersection de $(\mathcal{P}) : 2x + 3y - z + 2 = 0$ et $(\mathcal{P}') : x + y - 2z + 5 = 0$.

Corrigé

$$\begin{cases} 2x + 3y - z + 2 = 0 \\ x + y - 2z + 5 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 3y = z - 2 \\ x + y = 2z - 5 \end{cases}$$

On pose $z = t$. Le système donne $x = -13 + 5t$ et $y = 8 - 3t$.
Les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ se coupent suivant la droite (d) d'équation paramétrique

$$(d) : \begin{cases} x = -13 + 5t \\ y = 8 - 3t \\ z = t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

$\vec{u}(5;-3;1)$ est un vecteur directeur de (d), et (d) passe par $A(-13;8;0)$.

3.5 Équation de la sphère

Propriété

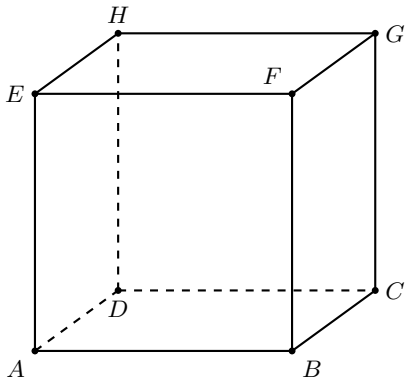
Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé :

- l'équation de la sphère de centre $A(a;b;c)$ et de rayon R est $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2$;
- l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est la sphère de diamètre $[AB]$, de centre le milieu de $[AB]$.

4. Repère associé à un pavé droit

Exemple

$ABCDEFGH$ un pavé droit, $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ un repère de l'espace : $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $D(0;1;0)$, $E(0;0;1)$.



Corrigé

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \Rightarrow C(1;1;0)$$
$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} \Rightarrow H(0;1;1)$$
$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} \Rightarrow G(1;1;1)$$

Règle du parallélogramme : $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$; $AFGD$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{FG}$.

5. Points cocycliques

Définition

Deux points du plan sont dits **cocycliques** s'ils appartiennent à un même cercle. Deux cercles sont dits **concentriques** s'ils ont le même centre.

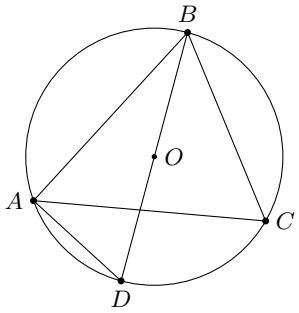
△ Remarque

- Les sommets d'un carré $ABCD$ sont cocycliques : ils sont sur un même cercle de diamètre la diagonale du carré.
- Les trois sommets d'un triangle rectangle sont toujours cocycliques.

Propriété

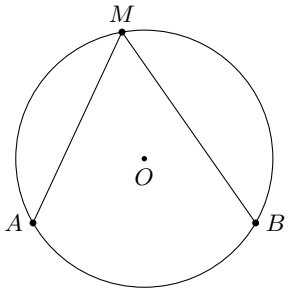
A, B, C et D non alignés sont cocycliques si, et seulement si,

$$\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right) = \left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DB}\right) \ [\pi]$$



Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O, et M, A, B trois points de $(\mathcal{C})$.

- L'angle orienté $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})$ est l'**angle inscrit**.
- L'angle $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$ est l'**angle au centre**.



5.1 Lignes de niveau

Soient A et B deux points du plan. L'ensemble des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) = \alpha \ [\pi]$ est le cercle passant par A et B dont la tangente (AT) en A vérifie $(\overrightarrow{AT};\overrightarrow{AB}) = \alpha \ [\pi]$, privé de A et B. Ce cercle s'appelle **cercle capable** d'angle α.

Soit $(\mathcal{E}_\alpha)$: $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) = \alpha \ [\pi]$, $M(z)$, $A(z_A)$, $B(z_B)$; on a $\arg\left(\dfrac{z-z_B}{z-z_A}\right) = \alpha \ [\pi]$.

- Si $\alpha = 0 \ [\pi]$, $(\mathcal{E}_\alpha)$ est la droite (AB) privée de A et B.
- Si $\alpha \neq 0 \ [\pi]$, $(\mathcal{E}_\alpha)$ est un cercle.

L'ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) = \alpha\ [2\pi]$ est l'arc de cercle ouvert AB du cercle capable d'angle α.

Soit $(\mathcal{E}_\theta)$: $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) = \theta\ [2\pi]$: si $\theta = 0\ [2\pi]$ alors $\mathcal{E}_\theta$ est la droite (AB) privée du segment $[AB]$; si $\theta = \pi\ [2\pi]$ alors $\mathcal{E}_\theta =]AB[$.

Rappel

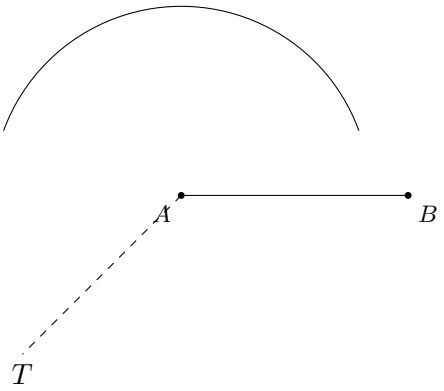
Déterminer l'ensemble des points M tels que $\dfrac{MA}{MB} = 2$.

$$\frac{MA}{MB} = 2 \iff MA = 2MB \iff MA^2 - 4MB^2 = 0 \iff \left(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\right) = 0$$

$G_1 = \text{bar}\{(A,1);(B,2)\}$ (car $1+2=3\neq 0$) et $G_2 = \text{bar}\{(A,1);(B,-2)\}$ (car $1-2=-1\neq 0$).

Exemple

L'ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) = \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$ est l'arc de cercle ouvert AB tel que la tangente au cercle en A est la demi-droite $[AT)$.



6. Complément – notion de matrice

En classe de seconde, on a calculé le déterminant de $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$. On appelle **matrice** un tableau tel que

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 1^{\text{re}} \text{ ligne } (a, b) \\ \leftarrow 2^{\text{e}} \text{ ligne } (c, d) \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ \text{colonne 1} & \text{colonne 2} \end{matrix}$$

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Corrigé

Somme :

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+1 & 9+2 \\ -4-1 & -6+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 11 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \qquad A - B = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$$

Produit :

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1(1)+9(-1) & 1(2)+9(0) \\ -4(1)-6(-1) & -4(2)-6(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 2 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$$

Exercice 5

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer $A \times B$ et $B \times A$.

Résoudre : $\begin{cases} 3x - 2y - z = 0 \\ -5x + 4y + 4z = 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} -x + y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = 2 \end{cases}$

Corrigé

Produit : on multiplie chaque ligne de A par chaque colonne de B.

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1\times1+3\times2+4\times0 & 1\times3+3\times1+4\times1 & 1\times9+3\times4+4\times3 \\ (-2)\times1+1\times2+3\times0 & (-2)\times3+1\times1+3\times1 & (-2)\times9+1\times4+3\times3 \\ 0\times1+2\times2+(-1)\times0 & 0\times3+2\times1+(-1)\times1 & 0\times9+2\times4+(-1)\times3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+6+0 & 3+3+4 & 9+12+12 \\ -2+2+0 & -6+1+3 & -18+4+9 \\ 0+4+0 & 0+2-1 & 0+8-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 & 33 \\ 0 & -2 & -5 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

7. Rappels sur les similitudes planes

Définition

Une **similitude** est une transformation qui conserve le rapport des distances. Pour tous points M, N, P, Q avec $M \neq N$ et $P \neq Q$, d'images M', N', P', Q' :

$$\frac{M'N'}{MN} = \frac{P'Q'}{PQ}$$

Une transformation du plan est une similitude s'il existe un réel $k > 0$ tel que $M'N' = k\,MN$; k est le **rapport** de la similitude.

Propriété

- La composée de deux similitudes de rapports k et k' est une similitude de rapport kk'.
- La réciproque d'une similitude de rapport k est une similitude de rapport $\dfrac{1}{k}$.
- Pour $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, et $M' = S(M)$, on a $z' = az + b$ ou $z' = a\overline{z} + b$.
- Une similitude qui a deux points invariants distincts A et B est l'identité ou la réflexion d'axe (AB).
- Une similitude est dite **directe** si elle conserve les angles orientés. Translations, rotations, homothéties, ainsi que leurs composées, sont des similitudes directes.

Propriété

Soient A, B, A', B' tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$. Il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B'.

Exercice 6

$(A; \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormé direct tel que $\overrightarrow{AB} = \sqrt{2}\,\vec{u}$ et $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$. C un point tel que $ABCD$ soit un rectangle et I le milieu de $[AB]$. Soit S la similitude directe telle que $M' = S(M)$, $M(z)$ et $M'(z')$ avec $z' = az + b$, $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

a) Déterminer a et b tels que $S(D) = C$ et $S(C) = B$.

b) $T : \ z \mapsto z'$ avec $z' = \dfrac{i\sqrt{2}}{2}z + \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i$. Déterminer le rapport et l'angle de T.

c) Démontrer que T est la similitude qui transforme B en I.

d) Démontrer que $(BD) \perp (CI)$.

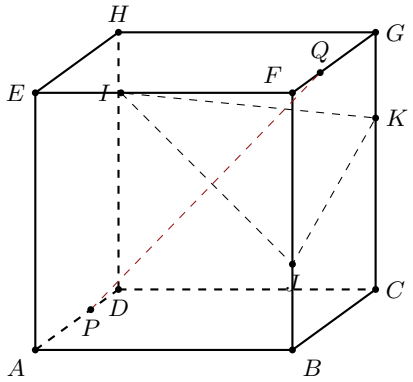
e) Démontrer que le centre Ω de T est le point d'intersection de (BD) et (CI).

8. Exercices

8.1 Problème 1

On considère dans l'espace un cube de 3 cm de côté, noté $ABCDEFGH$. Soit I le barycentre des points pondérés $(E;2)$ et $(F;1)$, J celui de $(F;1)$ et $(B;2)$, et enfin K celui de $(G;2)$ et $(C;1)$. On veut déterminer l'ensemble des points M équidistants de I, J et K ; on note Δ cet ensemble.

1. Placer les points I, J et K.
2. Soit Ω le point de Δ situé dans le plan (IJK). Que représente ce point pour le triangle IJK ?
   On se place dans le repère orthonormal $\left(A; \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}; \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}; \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$.
3. Donner les coordonnées des points I, J et K.
4. Soit $P(2;0;0)$ et $Q(1;3;3)$. Démontrer que la droite (PQ) est orthogonale au plan (IJK).
5. Soit M un point de l'espace de coordonnées $(x;y;z)$.
   a) Démontrer que $M \in \Delta$ si, et seulement si, $(x;y;z)$ est solution d'un système de deux équations linéaires que l'on écrira. Quelle est la nature de Δ ?
   b) Vérifier que P et Q appartiennent à Δ.
6. a) Déterminer un vecteur normal au plan (IJK) et en déduire une équation cartésienne de ce plan.
   b) Déterminer alors les coordonnées exactes de Ω.



Corrigé

1. Par définition, $2\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{IF}=\overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{OI}=\frac{1}{3}(2\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF})$. De même $\overrightarrow{JF}+2\overrightarrow{JB}=\overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{OJ}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OF}+2\overrightarrow{OB})$ et $2\overrightarrow{KG}+\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{OK}=\frac{1}{3}(2\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OC})$.
Le point I (resp. J et K) est au tiers du segment $[EF]$ (resp. $[FB]$ et $[GC]$) à partir de E (resp. F et G).
2. Le point Ω du plan (IJK) équidistant des trois sommets du triangle IJK est le centre du cercle circonscrit à ce triangle, donc le point commun aux trois médiatrices de ce triangle.
3. Dans le repère $\left(A;\frac{1}{3}\overrightarrow{AD};\frac{1}{3}\overrightarrow{AB};\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$: $E(0;0;3)$, $F(0;3;3)$, $B(0;3;0)$, $G(3;3;3)$, $C(3;3;0)$.
On en déduit $I(0;1;3)$, $J(0;3;1)$ et $K(3;3;2)$.
4. $P(2;0;0)$ et $Q(1;3;3)$. On a $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}-1\\3\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$.
$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{IJ}=-1\times0+3\times2+3\times(-2)=6-6=0$ et $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{IK}=-1\times3+3\times2+3\times(-1)=-3+6-3=0$.
Le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ est orthogonal à $\overrightarrow{IJ}$ et à $\overrightarrow{IK}$, donc à tout vecteur du plan (IJK) : la droite (PQ) est orthogonale au plan (IJK) ($\overrightarrow{PQ}$ est un vecteur normal au plan (IJK)).
5.a. $M(x;y;z)\in\Delta \iff MI=MJ=MK \iff MI^2=MJ^2$ et $MI^2=MK^2$, soit

$$\begin{cases}x^2+(y-1)^2+(z-3)^2=x^2+(y-3)^2+(z-1)^2\\x^2+(y-1)^2+(z-3)^2=(x-3)^2+(y-3)^2+(z-2)^2\end{cases} \iff \begin{cases}4y-4z=0\\6x+4y-2z-12=0\end{cases}$$

soit encore $\begin{cases}y-z=0\\3x+2y-z=6\end{cases}$. Ce sont les équations de deux plans de vecteurs normaux respectifs $(0;1;-1)$ et $(3;2;-1)$, manifestement non colinéaires : ces plans sont sécants en une droite. Δ est donc une **droite**.
5.b. $0-0=0$ et $3\times2+2\times0-0=6$: égalités vraies, donc $P\in\Delta$. De même $3-3=0$ et $3\times1+2\times3-3=6$: $Q\in\Delta$.
6.a. $\overrightarrow{PQ}$ est un vecteur normal au plan (IJK), donc une équation de (IJK) est $-x+3y+3z+d=0$. Comme $I\in(IJK)$: $-0+3+9+d=0 \iff d=-12$. Donc (IJK) : $-x+3y+3z=12$.
6.b. Ω est le point commun à Δ et au plan (IJK) :

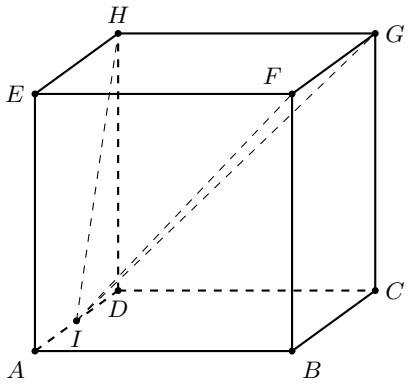
$$\begin{cases}y-z=0\\3x+2y-z=6\\-x+3y+3z=12\end{cases} \iff \begin{cases}y=z\\3x+y=6\\-x+6y=12\end{cases} \iff \begin{cases}y=z=6-3x\\-x+6(6-3x)=12\end{cases} \iff 24=19x$$

d'où $x=\frac{24}{19}$ et $y=z=\frac{42}{19}$. Conclusion : $\Omega\left(\frac{24}{19};\frac{42}{19};\frac{42}{19}\right)$.

8.2 Problème 2

Une unité de longueur étant choisie dans l'espace, on considère un pavé droit $ABCDEFGH$ tel que $AB = 1$, $AD = 2$ et $AE = 1$. On appelle I le milieu de $[AD]$. L'espace est muni du repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AI}; \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Déterminer, dans le repère choisi, les coordonnées des points F, G, H.
2. a) Montrer que le volume V du tétraèdre $GFIH$ est égal à $\dfrac{1}{3}$.
   b) Montrer que le triangle FIH est rectangle en I. En exprimant V d'une autre façon, calculer la distance d du point G au plan (FIH).
2. Soit le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(2; 1; -1)$.
   a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (FIH).
   b) En déduire une équation cartésienne du plan (FIH).
   c) Retrouver par une autre méthode la distance d du point G au plan (FIH).
4. a) La droite (AG) est-elle perpendiculaire au plan (FIH) ? Donner un système d'équations paramétriques de cette droite.
   b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection K de (AG) et de (FIH).
3. Soit Γ la sphère de centre G passant par K. Quelle est la nature de l'intersection de Γ et du plan (FIH) ?



Corrigé

1. $F(1;0;1)$, $G(1;2;1)$, $H(0;2;1)$.

2.a. $V = \dfrac{\mathcal{A}(FGH) \times AE}{3}$. FGH est rectangle en G, donc $\mathcal{A}(FGH) = \dfrac{FG \times GH}{2} = \dfrac{2 \times 1}{2} = 1$, et comme $AE = 1$, $V = \dfrac{1 \times 1}{3} = \dfrac{1}{3}$.

2.b. $I(0;1;0)$, $\overrightarrow{FI}(-1;1;-1)$, $\overrightarrow{IH}(0;1;1)$, $\overrightarrow{FI} \cdot \overrightarrow{IH} = 0+1-1 = 0$: les vecteurs sont orthogonaux, donc $(FI) \perp (IH)$ en I.

En prenant comme base le triangle FIH, $V = \dfrac{\mathcal{A}_{FIH} \times d}{3}$, d étant la distance de G au plan (FIH). Le triangle FIH étant rectangle en I, $\mathcal{A}_{FIH} = \dfrac{FI \times IH}{2}$.

$FI^2 = 1+1+1 = 3 \Rightarrow FI = \sqrt{3}$; $\quad IH^2 = 0+1+1 = 2 \Rightarrow IH = \sqrt{2}$; $\quad \mathcal{A}_{FIH} = \dfrac{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

D'où $\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{\sqrt{6}}{2} \times d \iff d = \dfrac{2}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

3.a. $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{FI} = -2+1+1 = 0$ et $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{IH} = 0+1-1 = 0$: $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (FIH), donc normal à ce plan.

3.b. (FIH) : $2x + y - z + d' = 0$. Comme $F \in (FIH)$: $2 + 0 - 1 + d' = 0 \iff d' = -1$. Donc (FIH) : $2x + y - z - 1 = 0$.

3.c. $d = \dfrac{|2x_G + y_G - z_G - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \dfrac{|2+2-1-1|}{\sqrt{6}} = \dfrac{2}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$. On retrouve la même valeur.

4.a. (AG) est perpendiculaire à (FIH) si, et seulement si, $\overrightarrow{AG}$ est colinéaire à $\overrightarrow{n}$. Or $\overrightarrow{AG}(1;2;1)$, qui n'est manifestement pas colinéaire à $\overrightarrow{n}(2;1;-1)$: (AG) n'est **pas** perpendiculaire à (FIH).

$$(AG) : \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

4.b. $2t + 2t - t - 1 = 0 \iff 3t = 1 \iff t = \dfrac{1}{3}$. Les coordonnées de K sont $\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$.

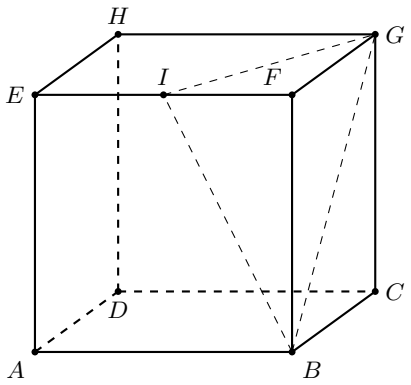
5. Le rayon de la sphère est GK. $GK^2 = \dfrac{4}{9} + \dfrac{16}{9} + \dfrac{4}{9} = \dfrac{24}{9} \Rightarrow GK = \sqrt{\dfrac{24}{9}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$. Or la distance d de G au plan (FIH) vaut $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, donc inférieure au rayon de la sphère : la section de Γ par le plan (FIH) est un **cercle**.

8.3 Problème 3

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur 1. On désigne par I le milieu de $[EF]$ et par J le symétrique de E par rapport à F. Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. a) Déterminer les coordonnées des points I et J.
   b) Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BGI).
   c) En déduire une équation cartésienne du plan (BGI).
   d) Calculer la distance du point F au plan (BGI).

1. On note (Δ) la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI).
   a) Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ).
   b) Montrer que la droite (Δ) passe par le centre K de la face $ADHE$.
   c) Montrer que la droite (Δ) et le plan (BGI) sont sécants en un point, noté L, de coordonnées $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{6}; \frac{5}{6}\right)$.
   d) Le point L est-il l'orthocentre du triangle BGI ?



Corrigé

1.a. $I\left(\frac{1}{2};0;1\right)$, car $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EI}=\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Le point J a pour coordonnées $(2;0;1)$.

1.b. $\overrightarrow{DJ}(2;-1;1)$, $\overrightarrow{BG}(0;1;1)$ et $\overrightarrow{BI}\left(-\frac{1}{2};0;1\right)$; $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BI}$ ne sont manifestement pas colinéaires. On a $\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{BG}=0-1+1=0$ et $\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{BI}=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+0+1=0$. Le vecteur $\overrightarrow{DJ}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BGI), donc normal à ce plan.

1.c. (BGI) : $2x-y+z+d=0$, avec d tel que l'équation soit vérifiée par $B(1;0;0)$: $2-0+0+d=0 \iff d=-2$. Donc (BGI) : $2x-y+z-2=0$.

1.d. $\delta=\dfrac{|2\times1-0+1-2|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

2.a. (Δ) est dirigée par $\overrightarrow{DJ}(2;-1;1)$ et passe par $F(1;0;1)$:

$$(\Delta):\begin{cases}x=1+2t\\y=-t\\z=1+t\end{cases}\qquad t\in\mathbb{R}$$

2.b. Le plan de la face $ADHE$ a pour équation $x=0$; le point de (Δ) d'abscisse 0 correspond à $t=-\frac{1}{2}$, de coordonnées $\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$: c'est bien le centre de la face $ADHE$, milieu de $[AH]$ ($H(0;1;1)$, A origine du repère) : c'est le point K.

2.c. Le point L, de coordonnées $\left(\frac{2}{3};\frac{1}{6};\frac{5}{6}\right)$, est le point de (Δ) de paramètre $t=-\frac{1}{6}$. De plus $2\times\frac{2}{3}-\frac{1}{6}+\frac{5}{6}-2=\frac{4}{3}+\frac{4}{6}-2=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}-2=2-2=0$: les coordonnées de L vérifient l'équation de (BGI), donc L est l'intersection de la droite et du plan.

2.d. $\overrightarrow{LB}\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{6};-\frac{5}{6}\right)$ et $\overrightarrow{GI}\left(-\frac{1}{2};-1;0\right)$. $\overrightarrow{LB}\cdot\overrightarrow{GI}=-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+0=0$: les vecteurs sont orthogonaux, donc $(BL)\perp(GI)$: (BL) est la hauteur issue de B dans BGI.

$\overrightarrow{BG}(0;1;1)$ et $\overrightarrow{IL}\left(\frac{1}{6};\frac{1}{6};-\frac{1}{6}\right)$. $\overrightarrow{IL}\cdot\overrightarrow{BG}=0+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=0$: les vecteurs sont orthogonaux, donc $(IL)\perp(BG)$: (IL) est la hauteur issue de I.

L est donc l'intersection de deux hauteurs du triangle BGI : c'est bien l'**orthocentre** de BGI.

8.4 Problème 4

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur 1, dans le repère orthonormal $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}\right)$. On considère les points $I\left(1; \frac{1}{3}; 0\right)$, $J\left(0; \frac{2}{3}; 1\right)$, $K\left(\frac{3}{4}; 0; 1\right)$ et $L(a; 1; 0)$ avec $a \in [0; 1]$.

Partie A *(les parties A et B sont indépendantes)*

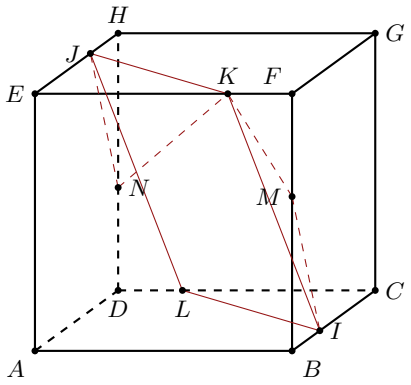
1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ).
2. Démontrer que la droite (KL) a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4} + t'\left(a - \frac{3}{4}\right) \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{cases} \qquad t' \in \mathbb{R}$$

3. Démontrer que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si, et seulement si, $a = \frac{1}{4}$.

Partie B *(on pose $a = \frac{1}{4}$, donc $L\left(\frac{1}{4}; 1; 0\right)$)*

1. Démontrer que le quadrilatère $IKJL$ est un parallélogramme.
2. On note M le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (BF), et N le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (DH).
   a) Prouver que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(8; 9; 5)$ est un vecteur normal au plan (IJK).
   b) En déduire que le plan (IJK) a pour équation $8x + 9y + 5z - 11 = 0$.
   c) En déduire les coordonnées des points M et N.



Corrigé

Partie A – 1. La droite (IJ) passe par $I\left(1;\frac{1}{3};0\right)$ et est dirigée par $\overrightarrow{IJ}\left(-1;\frac{1}{3};1\right)$:

$$(IJ):\begin{cases}x=1-t\\y=\frac{1}{3}+\frac{t}{3}\\z=t\end{cases}\qquad t\in\mathbb{R}$$

2. La droite de représentation paramétrique donnée passe par le point de coordonnées $\left(\frac{3}{4};0;1\right)$, c'est-à-dire K ; le vecteur $\left(a-\frac{3}{4};1;-1\right)$ en est un vecteur directeur. Or $\overrightarrow{KL}\left(a-\frac{3}{4};1;-1\right)$. C'est donc bien une représentation paramétrique de (KL).

3. (IJ) et (KL) sont sécantes si, et seulement si, le système formé par les deux représentations admet une solution unique en (t,t') :

$$\begin{cases}1-t=\frac{3}{4}+t'\left(a-\frac{3}{4}\right)\\\frac{1}{3}+\frac{t}{3}=t'\\t=1-t'\end{cases}$$

En substituant $t=1-t'$ dans la deuxième équation : $\frac{1}{3}+\frac{1-t'}{3}=t' \iff \frac{2}{3}-\frac{t'}{3}=t' \iff t'=\frac{1}{2}$, donc $t=\frac{1}{2}$. La première équation devient $\frac{1}{2}=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\left(a-\frac{3}{4}\right) \iff a=\frac{1}{4}$.

Remarque : on obtient au passage les coordonnées du point d'intersection des deux droites : $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Partie B – 1. D'après la question précédente, les diagonales (IJ) et (KL) du quadrilatère $IKJL$ sont sécantes en un point $\Omega\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, qui est bien le milieu de $[IJ]$ et de $[KL]$: les diagonales se coupent en leur milieu, donc $IKJL$ est un parallélogramme.

2.a. I,J,K définissent le plan (IJK), ils sont non alignés et $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IK}$ ne sont pas colinéaires. $\overrightarrow{IJ}\left(-1;\frac{1}{3};1\right)$, $\vec{n}\cdot\overrightarrow{IJ}=-8+3+5=0$. $\overrightarrow{IK}\left(-\frac{1}{4};-\frac{1}{3};1\right)$, $\vec{n}\cdot\overrightarrow{IK}=-2-3+5=0$. $\vec{n}$ est bien orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (IJK), donc normal à ce plan.

2.b. $(IJK):\ 8x+9y+5z+d=0$. Comme $I\in(IJK):\ 8+3+0+d=0 \iff d=-11$. Donc $(IJK):\ 8x+9y+5z-11=0$.

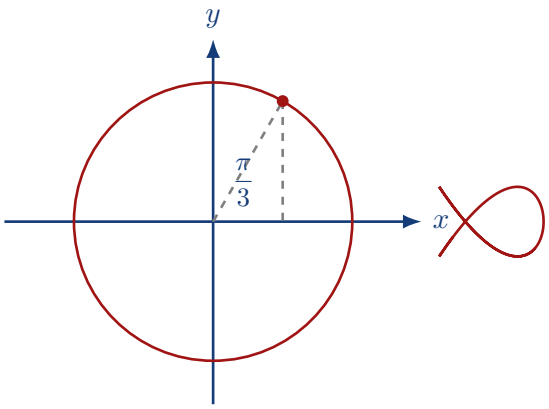
2.c. (BF) passe par $B(1;0;0)$, dirigée par $\overrightarrow{BF}(0;0;1)$: $\begin{cases}x=1\\y=0\\z=t\end{cases}$. En remplaçant dans l'équation du plan : $8+0+5t-11=0 \iff t=\frac{3}{5}$. Donc $M\left(1;0;\frac{3}{5}\right)$.

(DH) passe par $D(0;1;0)$, dirigée par $\overrightarrow{DH}(0;0;1)$: $\begin{cases}x=0\\y=1\\z=t\end{cases}$. En remplaçant : $0+9+5t-11=0 \iff t=\frac{2}{5}$. Donc $N\left(0;1;\frac{2}{5}\right)$.

Thème 14

Trigonométrie – Courbes paramétrées – Coniques

(1)



Cercle trigonométrique, courbes paramétrées et coniques

Cours mis en forme, exemples et exercices corrigés

Sommaire

14.1 — Trigonométrie

- Mesure principale d'un angle orienté
- Équations trigonométriques

14.2 — Courbes paramétrées

- Introduction
- Étude d'une courbe paramétrée : périodicité, symétries
- Étude conjointe des fonctions x et y, représentation graphique
- Vecteur dérivé, interprétation cinématique
- Exemples corrigés

14.3 — Coniques

- Définition, parabole, hyperbole, ellipse
- Exercices corrigés (nature, éléments caractéristiques, tangentes)

Problèmes corrigés

- Problème 1 — mobile complexe et trajectoire paramétrée
- Problème 2 — mobile complexe et trajectoire hyperbolique

14.1 — Trigonométrie

Mesure principale d'un angle orienté

Définition

On appelle mesure principale d'un angle $x = \alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, l'unique mesure de x qui est comprise dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$.
Elle se lit directement sur le cercle trigonométrique.

Exemple 1

Mesure principale de l'angle $\dfrac{11\pi}{4}$.

$$\frac{11\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = 2\pi + \frac{3\pi}{4}$$

Comme $0 < \dfrac{3\pi}{4} < \pi$, la mesure principale de $\dfrac{11\pi}{4}$ est $\dfrac{3\pi}{4}$.

Exemple 2

Mesure principale de $\dfrac{345\pi}{6}$.
On a $\dfrac{345}{6} = 57{,}5$, donc $57 < 57{,}5 < 58$; le multiple pair le plus proche est 58. On écrit

$$\frac{345\pi}{6} = 58\pi + \alpha \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{345\pi - 6 \times 58\pi}{6} = -\frac{3\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}.$$

Comme $-\dfrac{\pi}{2} \in]-\pi\,;\,\pi]$, la mesure principale de $\dfrac{345\pi}{6}$ est $-\dfrac{\pi}{2}$.

Exemple 3

Mesure principale de $\dfrac{47\pi}{3}$.
On a $\dfrac{47}{3} \approx 15{,}66$, donc $15 < 15{,}66 < 16$; le multiple pair le plus proche est 16.

$$\frac{47\pi}{3} = 16\pi + \alpha \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{47\pi - 3 \times 16\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}.$$

Comme $-\dfrac{\pi}{3} \in]-\pi\,;\,\pi]$, la mesure principale de $\dfrac{47\pi}{3}$ est $-\dfrac{\pi}{3}$.

Exemple 4

Mesure principale de $-\dfrac{80\pi}{3}$.
On a $-\dfrac{80}{3} \approx -26{,}66$, donc $-27 < -26{,}66 < -26$; le multiple pair le plus proche est -26.

$$-\frac{80\pi}{3} = -26\pi + \alpha \quad \Longrightarrow \quad \alpha = -\frac{80\pi}{3} + 26\pi = \frac{-80\pi + 78\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}.$$

Comme $-\dfrac{2\pi}{3} \in]-\pi\,;\,\pi]$, la mesure principale de $-\dfrac{80\pi}{3}$ est $-\dfrac{2\pi}{3}$.

Exercice 1

Déterminer la mesure principale des angles :

$$-\frac{115\pi}{4}\ ;\qquad \frac{74\pi}{3}\ ;\qquad \frac{77\pi}{3}\ ;\qquad -\frac{13\pi}{5}\ ;\qquad \frac{121\pi}{6}.$$

Équations trigonométriques

Propriétés

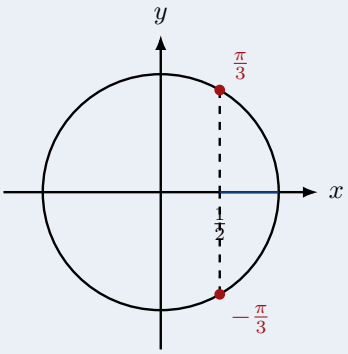
Pour $x, \alpha \in \mathbb{R}$,

$$\cos x = \cos\alpha \iff \begin{cases} x = \alpha\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ x = -\alpha\ [2\pi] \end{cases} \qquad \text{c'est-à-dire } x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = -\alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

$$\sin x = \sin\alpha \iff \begin{cases} x = \alpha\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ x = \pi - \alpha\ [2\pi] \end{cases} \qquad \tan x = \tan\alpha \iff x = \alpha\ [\pi].$$

Exemple — $\cos x = \dfrac{1}{2}$

On cherche α tel que $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$: $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$.



$$\cos x = \cos\frac{\pi}{3} \iff x = \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3}\ [2\pi] \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad x = \pm\frac{\pi}{3}\ [2\pi].$$

Exemple — $\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Comme $\cos\dfrac{5\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$$2x - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{6}\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad 2x - \frac{\pi}{4} = -\frac{5\pi}{6}\ [2\pi].$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{6}\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad 2x = \frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{6}\ [2\pi] \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{\pi}{8} + \frac{5\pi}{12}\ [\pi] \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{8} - \frac{5\pi}{12}\ [\pi].$$

(en divisant par 2, la période 2π devient π).

Exemple — $\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{10}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Comme $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\frac{x}{2}-\frac{\pi}{10}=-\frac{\pi}{4}\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad \frac{x}{2}-\frac{\pi}{10}=\pi+\frac{\pi}{4}\ [2\pi].$$

$$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{10}-\frac{\pi}{4}\ [2\pi]=-\frac{3\pi}{20}\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad \frac{x}{2}=\frac{\pi}{10}+\frac{5\pi}{4}\ [2\pi]=\frac{27\pi}{20}\ [2\pi].$$

En multipliant par 2, la période 2π devient 4π :

$$x=-\frac{3\pi}{10}\ [4\pi] \qquad \text{ou} \qquad x=\frac{27\pi}{10}\ [4\pi].$$

Exemple — $\cos x=\sin 3x$

$$\cos x=\sin 3x \iff \cos x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right) \iff x=\frac{\pi}{2}-3x\ [2\pi] \text{ ou } x=-\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)\ [2\pi].$$

Premier cas : $4x=\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \Longrightarrow x=\frac{\pi}{8}\ \left[\frac{\pi}{2}\right]$.
Second cas : $-2x=-\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \Longrightarrow x=\frac{\pi}{4}\ [\pi]$.

$$\boxed{x=\frac{\pi}{8}\ \left[\frac{\pi}{2}\right] \qquad \text{ou} \qquad x=\frac{\pi}{4}\ [\pi]}$$

Exemple — $2\cos^2 x+\sin x=1,\ x\in\mathbb{R}$

En remplaçant $\cos^2 x=1-\sin^2 x$:

$$2(1-\sin^2 x)+\sin x=1 \iff -2\sin^2 x+\sin x+1=0 \iff 2\sin^2 x-\sin x-1=0.$$

Avec $u=\sin x$: $2u^2-u-1=0=(u-1)(2u+1)$, d'où $u=1$ ou $u=-\frac{1}{2}$.

- $\sin x=1 \Longrightarrow x=\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
- $\sin x=-\frac{1}{2} \Longrightarrow x=-\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ ou $x=-\frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$.

$$\boxed{x=\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad x=-\frac{\pi}{6}\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad x=-\frac{5\pi}{6}\ [2\pi]}$$

Exercice 2 — Résoudre dans $\mathbb{R}$

1) $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$

2) $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=0$

3) $\cos(4x+\pi)=\cos\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$

4) $\sin(3x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$

5) $\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

6) $\cos(2x)=\frac{1}{2}$

14.2 — Courbes paramétrées

Introduction

Définition

Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux fonctions numériques définies sur un même intervalle I. La courbe paramétrée est l'ensemble des points $M(t)$ de coordonnées

$$\begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}, \qquad t \in I.$$

Exemple

Soit t un réel, on donne le système d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x(t) = 1 - 2t \\ y(t) = 6 - 3t \end{cases}$$

a) Exprimer t en fonction de x ;

b) Exprimer y en fonction de x.

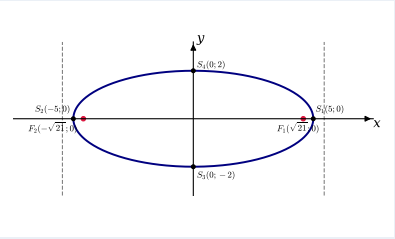
Exemple — équation cartésienne de l'ellipse

Déterminons la courbe représentée par le système paramétrique

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, \qquad a > b > 0,\ t \in [-\pi\,;\,\pi].$$

On a $\dfrac{x}{a} = \cos t$ et $\dfrac{y}{b} = \sin t$, et comme $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.}$$



Cette courbe paramétrée est une **ellipse**.

Exemple — cercle

$$\begin{cases} x = a + R\cos t \\ y = b + R\sin t \end{cases}, \qquad a, b \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}.$$

On a $x - a = R\cos t$ et $y - b = R\sin t$, donc

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = R^2.$$

C'est le **cercle** de centre $A(a\,;\,b)$ et de rayon R.

Exercice 3 — déterminer la courbe paramétrée

1) $\begin{cases} x(t) = 8\cos t \\ y(t) = 8\sin t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

2) $\begin{cases} x = 8\cos t + 3 \\ y = 8\sin t + 6 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

3) $\begin{cases} x = 2\sin t \\ y = 3\sin t + 1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

4) $\begin{cases} x = 2(1+\cos t) \\ y = 3\cos t + 6 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

5) $\begin{cases} x = 2t \\ y = t^2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

6) $\begin{cases} x = 3 - 4\sin t \\ y = 4 + 3\cos t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

Étude d'une courbe paramétrée : périodicité et symétries

Exemple — $x(t) = 2\cos(2t)$, $y(t) = \sin(3t)$

1) Périodicité.

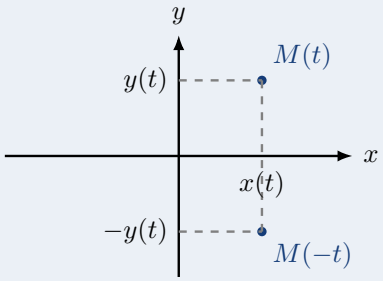
$$M(t+2\pi) = \big(2\cos(2t+4\pi)\,;\,\sin(3t+6\pi)\big) = \big(2\cos(2t)\,;\,\sin(3t)\big) = M(t).$$

La fonction est périodique de période 2π : l'étude peut se faire sur $]-\pi\,;\,\pi]$.

2) Symétrie par rapport à (Ox).

$$M(-t) = \big(2\cos(-2t)\,;\,\sin(-3t)\big) = \big(2\cos(2t)\,;\,-\sin(3t)\big) = \big(x(t)\,;\,-y(t)\big).$$

$M(t)$ et $M(-t)$ sont symétriques par rapport à (Ox) : l'étude se poursuit sur $[0\,;\,\pi]$.



3) Comparaison de $M(\pi - t)$ et $M(t)$.

$$M(\pi - t) = \big(2\cos(2\pi - 2t)\,;\,\sin(3\pi - 3t)\big) = \big(2\cos(2t)\,;\,\sin(3t)\big) = M(t).$$

Donc $M(\pi - t) = M(t)$: l'étude définitive se fait sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

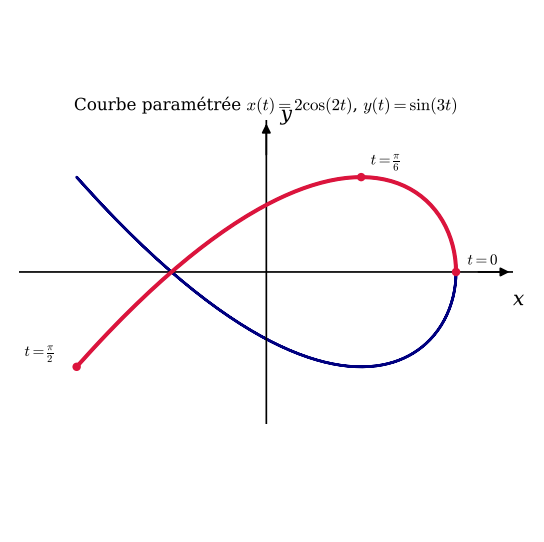
Étude conjointe des fonctions x et y, représentation graphique

Suite — étude conjointe sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$

$$x'(t) = -4\sin(2t), \qquad x'(t) = 0 \iff \sin(2t) = 0 \iff t = 0 \text{ ou } t = \frac{\pi}{2}.$$

$$y(t) = \sin(3t), \qquad y'(t) = 3\cos(3t), \qquad y'(t) = 0 \iff \cos(3t) = 0 \iff t = \frac{\pi}{6} \ \left(\text{sur } \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]\right).$$

t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0	$-$		$-$	0
$x(t)$	2	↘	1	↘	-2
$y'(t)$		$+$	0	$-$	
$y(t)$	0	↗	1	↘	-1



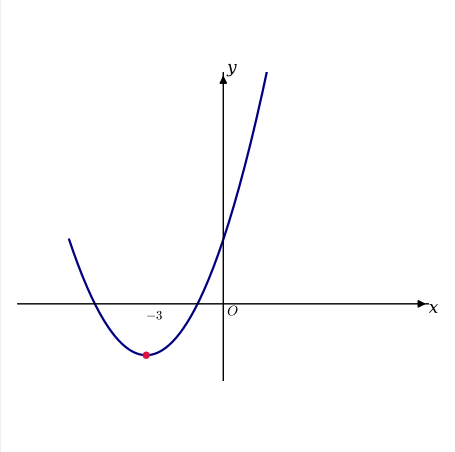
La portion en rouge correspond à $t \in \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$; la courbe complète (en bleu) s'obtient par les symétries précédentes.

Exemple — $x(t) = -t - 3$, $y(t) = \dfrac{1}{2}t^2 - 2$

$$x'(t) = -1 < 0 \quad \text{(toujours décroissante)}, \qquad y'(t) = t, \qquad y'(t) = 0 \iff t = 0,\ y(0) = -2.$$

En exprimant t en fonction de x : $t = -x - 3$, d'où

$$y = \frac{1}{2}(-x-3)^2 - 2 = \frac{x^2 + 6x + 9}{2} - 2 = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{5}{2}.$$

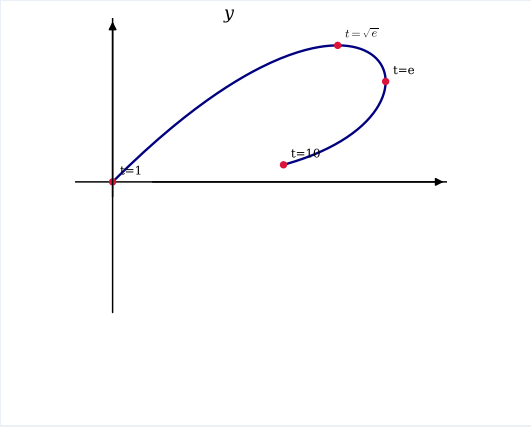


La trajectoire est une **parabole**.

Exemple — représentation graphique à partir d'un tableau de variations conjointes

On donne le tableau des variations conjointes de $x(t)$ et $y(t)$:

t	1		$\sqrt{e}$		e		10
$x'(t)$		$+$		$+$	0	$-$	
$x(t)$	0	↗	$\frac{1}{2\sqrt{e}}$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{\ln 10}{10}$
$y'(t)$		$+$	0	$-$		$-$	
$y(t)$	0	↗	$\frac{1}{2e}$	↘	$\frac{1}{e^2}$	↘	$\frac{\ln 10}{100}$



Lorsque x augmente, y augmente ; lorsque x diminue, y diminue également : le sens de parcours de la courbe suit celui indiqué par les vecteurs vitesse portés sur la figure.

Vecteur dérivé

Définition

Le vecteur dérivé de $\overrightarrow{OM} = x(t)\,\vec{\imath} + y(t)\,\vec{\jmath}$ est

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\,\vec{\imath} + \frac{dy(t)}{dt}\,\vec{\jmath}, \qquad \vec{V}(t) = x'(t)\,\vec{\imath} + y'(t)\,\vec{\jmath}.$$

Pour tout réel t, si $x'(t) \neq 0$ et $y'(t) \neq 0$, le vecteur $\big(x'(t)\,;\,y'(t)\big)$ est un vecteur directeur de la tangente à la courbe en $M(t)$.

Interprétation cinématique

La fonction $\vec{f}\,'(t) = \big(x'(t)\,;\,y'(t)\big) = \vec{V}(t)$ est appelée **vitesse** du mobile $M(t)$.
$\vec{f}\,''(t) = \big(x''(t)\,;\,y''(t)\big) = \vec{a}(t)$ est appelée **accélération** du mobile $M(t)$.

- Si la norme du vecteur vitesse est constante, le mouvement est dit *uniforme*.
- Le mouvement est dit *rectiligne* si la trajectoire de M est contenue dans une droite.

Symétries

Un intervalle I est dit symétrique si, pour tout $t \in I$, on a $-t \in I$.

- Si $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$, la courbe est symétrique par rapport à (Ox).
- Si $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = y(t)$, la courbe est symétrique par rapport à (Oy).
- Si $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$, la courbe est symétrique par rapport à l'origine O.

Périodicité — rappel

- Si $M(t + 2\pi) = M(t)$, l'étude peut être faite sur $]-\pi\,;\,\pi]$.
- Si $M(\pi - t) = M(t)$, l'étude peut être réduite à $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Exemple — parité, $x(t) = t^2 + 1$, $y(t) = t^3$

$$x(-t) = (-t)^2 + 1 = t^2 + 1 = x(t), \qquad y(-t) = (-t)^3 = -t^3 = -y(t).$$

$M(t)$ et $M(-t)$ sont symétriques par rapport à (Ox) : $M(-t) = \mathrm{sym}_{(Ox)}\big(M(t)\big)$.

Exemple — étude conjointe de $x(t) = t^2$, $y(t) = t^3 - 3t$

$$\vec{f}\,(t) = \big(t^2\,;\,t^3 - 3t\big).$$

Parité.

$$x(-t) = t^2 = x(t), \qquad y(-t) = -t^3 + 3t = -\big(t^3 - 3t\big) = -y(t).$$

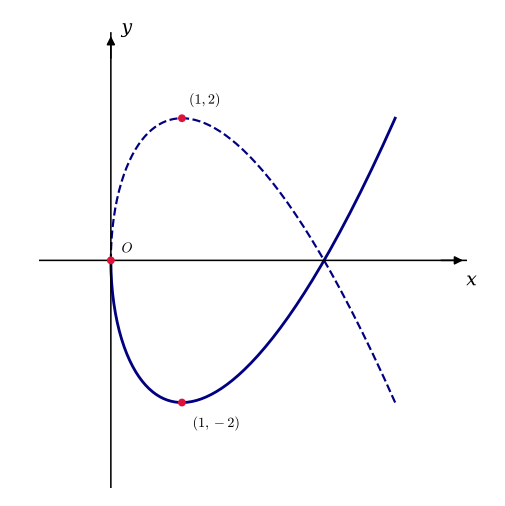
$M(t)$ et $M(-t)$ sont symétriques par rapport à (Ox) : l'étude est faite sur $\mathbb{R}^+$.
Étude sur $\mathbb{R}^+$.

$$x'(t) = 2t, \qquad x'(t) = 0 \iff t = 0.$$

$$y'(t) = 3t^2 - 3 = 3(t^2 - 1), \qquad y'(t) = 0 \iff t = 1 \text{ (sur } \mathbb{R}^+).$$

$$M(0) = (0\,;\,0), \qquad M(1) = (1\,;\,-2).$$

t	0		1		$+\infty$
$x'(t)$	0	$+$		$+$	
$x(t)$	0	↗		↗	$+\infty$
$y'(t)$		$-$	0	$+$	
$y(t)$	0	↘	-2	↗	$+\infty$



La branche en tirets ($t \leqslant 0$) s'obtient par la symétrie par rapport à (Ox) : la courbe présente un point double (un nœud) sur l'axe (Ox).

14.3 — Coniques

Définition

Une conique est une courbe plane définie comme l'intersection d'un cône de révolution avec un plan.

Paramétrage de la parabole

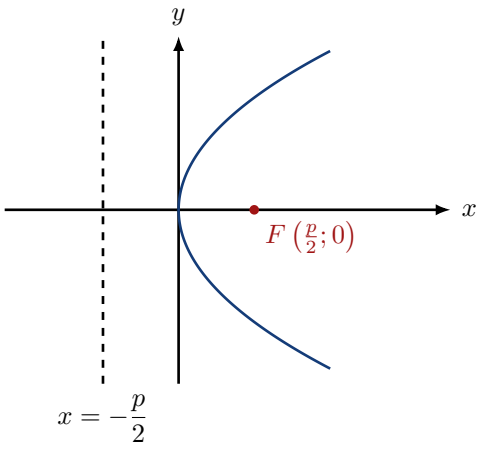
Soit la courbe définie par $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2}{2p} \\ y(t) = t \end{cases}$.

Comme $y(t) = t$, on a $x(t) = \dfrac{y^2}{2p}$, c'est-à-dire

$$\boxed{y^2 = 2px} \qquad \text{(équation réduite de la parabole).}$$

Éléments caractéristiques

- Le foyer F a pour coordonnées $F\left(\dfrac{p}{2}\,;\,0\right)$.
- La directrice a pour équation $x = -\dfrac{p}{2}$.
- Le sommet de la parabole est le centre du repère.
- La tangente à la parabole en $A(x_0\,;\,y_0)$ a pour équation $yy_0 = p(x - x_0)$.



Hyperbole

Exemple — $x(t) = \dfrac{1}{\cos t}$, $y(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \tan t$

On utilise l'identité $\dfrac{1}{\cos^2 t} - \tan^2 t = 1$, valable pour $t \neq \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.

On a $x = \dfrac{1}{\cos t}$ et $\sqrt{2}\, y = \tan t$, donc

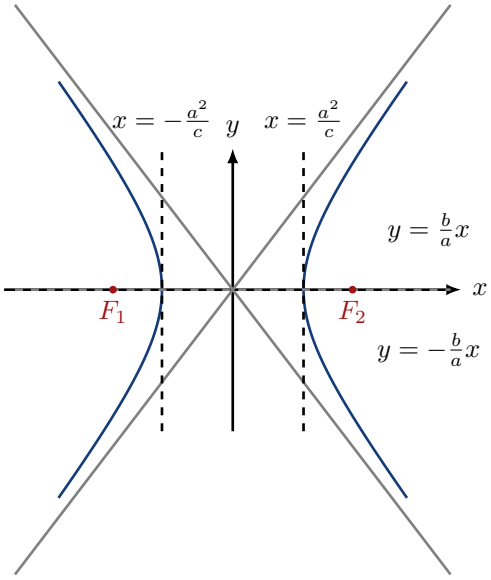
$$x^2 - 2y^2 = \frac{1}{\cos^2 t} - \tan^2 t = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{x^2 - \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1.}$$

La trajectoire est une **hyperbole**.

Équation réduite d'une hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \text{avec } c^2 = a^2 + b^2, \qquad e = \frac{c}{a} > 1, \qquad b^2 = c^2 - a^2.$$

- Les foyers ont pour coordonnées $F(c\,;\,0)$ et $F'(-c\,;\,0)$.
- Les directrices ont pour équations $x = \dfrac{a^2}{c} = \dfrac{a}{e}$ et $x = -\dfrac{a^2}{c} = -\dfrac{a}{e}$.
- Les sommets sont les points $(a\,;\,0)$ et $(-a\,;\,0)$.
- Les asymptotes ont pour équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$, soit $y = \dfrac{b}{a}x$ ou $y = -\dfrac{b}{a}x$.
- La tangente à l'hyperbole en $(x_0\,;\,y_0)$ a pour équation $\dfrac{xx_0}{a^2} - \dfrac{yy_0}{b^2} = 1$.

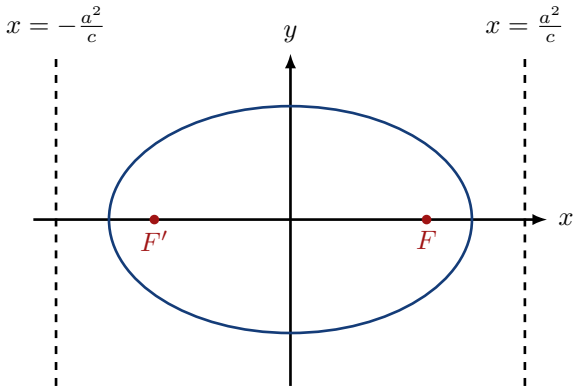


Ellipse

Paramétrage et équation réduite

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad c^2 = a^2 - b^2, \qquad e = \frac{c}{a}.$$

- Les foyers ont pour coordonnées $F(c\,;\,0)$ et $F'(-c\,;\,0)$.
- Les directrices ont pour équations $x = \dfrac{a^2}{c}$ et $x = -\dfrac{a^2}{c}$.
- Les sommets sont les points $(\pm a\,;\,0)$ et $(0\,;\,\pm b)$.
- La tangente à l'ellipse en $(x_0\,;\,y_0)$ a pour équation $\dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{b^2} = 1$.



Définition d'une conique par foyer, directrice, excentricité

(D) une droite du plan, F un point tel que $F \notin (D)$ et $e \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle conique de foyer F, de directrice (D) et d'excentricité e la courbe $(\mathscr{C})$ formée des points M du plan tels que

$$d(M,F) = e \cdot d\big(M,(D)\big).$$

- Si $0 < e < 1$, $(\mathscr{C})$ est une **ellipse**.
- Si $e = 1$, $(\mathscr{C})$ est une **parabole**.
- Si $e > 1$, $(\mathscr{C})$ est une **hyperbole**.

La droite (Δ) passant par F et orthogonale à (D) est appelée *axe focal* : c'est un axe de symétrie de la conique. Le réel $p = e \cdot d\big(F,(D)\big)$ est appelé *paramètre* de la conique $(\mathscr{C})$.

Exemple 1 — $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$

$$(x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 - 20 = 0 \iff (x-1)^2 + (y+2)^2 = 25.$$

C'est le cercle de centre $A(1\,;\,-2)$ et de rayon $R = \sqrt{25} = 5$.

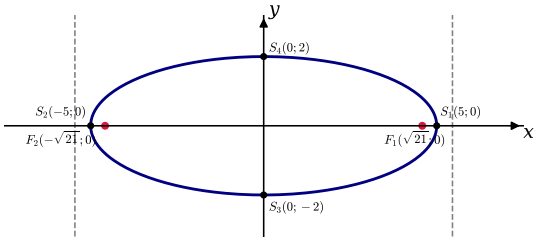
Exemple 2 — $4x^2 + 25y^2 - 100 = 0$

$$\frac{4x^2}{100} + \frac{25y^2}{100} = 1 \iff \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1 \iff \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1.$$

C'est une **ellipse** : $a = 5$, $b = 2$, sommets $S_1(5\,;\,0)$, $S_2(-5\,;\,0)$, $S_3(0\,;\,-2)$, $S_4(0\,;\,2)$.

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{21} \approx 4{,}58, \qquad F_1(\sqrt{21}\,;\,0),\ F_2(-\sqrt{21}\,;\,0),$$

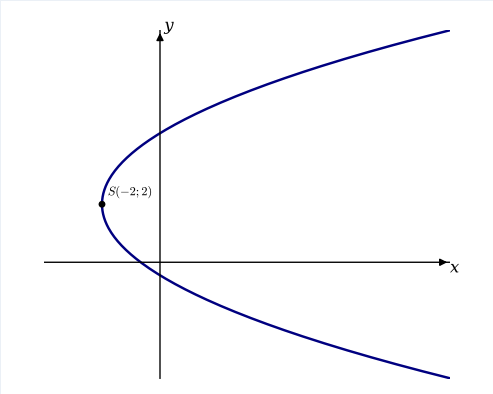
$$e = \frac{\sqrt{21}}{5}, \qquad x = \frac{25}{\sqrt{21}} \text{ et } x = -\frac{25}{\sqrt{21}} \quad \text{(directrices)}.$$



Exemple 3 — nature et éléments caractéristiques de $y^2 - 3x - 4y - 2 = 0$

$$y^2 - 4y - 3x - 2 = 0 \iff (y-2)^2 - 4 - 3x - 2 = 0 \iff (y-2)^2 = 3(x+2).$$

En posant $X = x + 2$ et $Y = y - 2$, on obtient $Y^2 = 3X$: $2p = 3$, donc $p = \dfrac{3}{2}$.
$(\mathscr{C})$ est une **parabole** de sommet $S(-2\,;\,2)$.

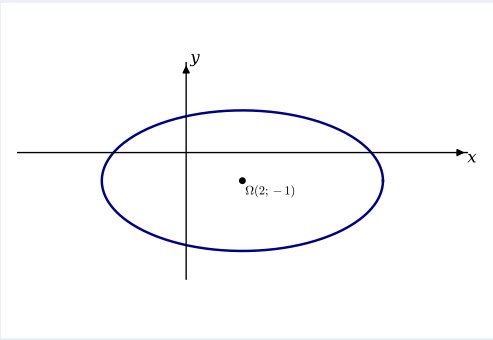


Exemple 4 — $(x-2)^2 + 4(y+1)^2 - 25 = 0$

$$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{25/4} = 1 \iff \frac{(x-2)^2}{5^2} + \frac{(y+1)^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2} = 1.$$

C'est une **ellipse** de centre $\Omega(2\,;\,-1)$, avec $a = 5$, $b = \dfrac{5}{2}$.

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - \frac{25}{4}} = \frac{5\sqrt{3}}{2}, \qquad e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad p = \frac{b^2}{c} = \frac{5\sqrt{3}}{6}.$$

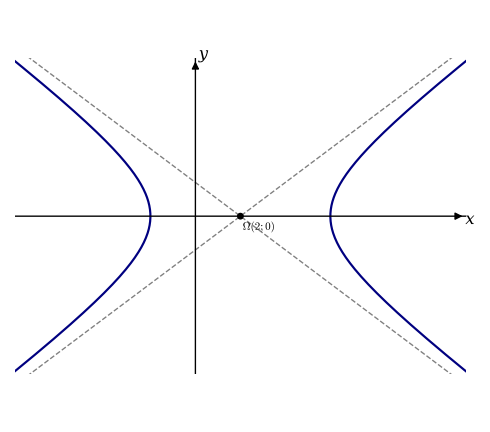


Exemple 5 — éléments caractéristiques de $(x-2)^2/16 - y^2/9 = 1$

C'est une **hyperbole** de centre $\Omega(2\,;\,0)$, avec $a = 4$, $b = 3$.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{25} = 5, \qquad e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}, \qquad p = \frac{b^2}{c} = \frac{9}{5}.$$

Asymptotes obliques : $y = \dfrac{3}{4}(x-2)$ et $y = -\dfrac{3}{4}(x-2)$.

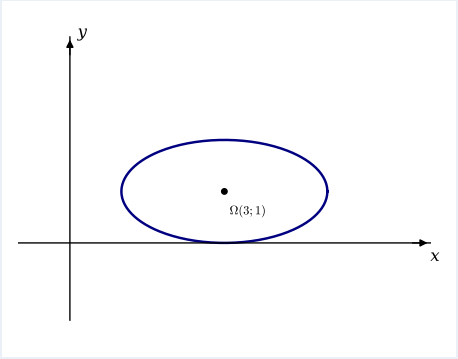


Exemple 6 — $x^2+4y^2-6x-8y+9=0$

$$x^2-6x+4y^2-8y+9=0 \iff (x-3)^2-9+4\big[(y-1)^2-1\big]+9=0 \iff (x-3)^2+4(y-1)^2=4.$$

$$\frac{(x-3)^2}{4}+(y-1)^2=1, \qquad a=2,\ b=1.$$

C'est une **ellipse** de centre $\Omega(3\,;\,1)$.



Exemple 7 — **nature de** $|z+1-i|=2\,\mathrm{Re}(z)$

Avec $z=x+iy$:

$$|x+1+i(y-1)|=2x \iff (x+1)^2+(y-1)^2=4x^2 \iff -3x^2+2x+(y-1)^2+2=0.$$

$$-3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}+(y-1)^2+2=0 \iff -3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+(y-1)^2=-\frac{7}{3}.$$

En simplifiant (division par $-\frac{7}{3}$ puis réduction) :

$$\frac{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2}{\frac{4}{9}}-\frac{(y-1)^2}{\frac{4}{3}}=1.$$

La courbe $(\mathscr{H})$ a pour équation

$$\begin{cases} x\geqslant 0 \\ \dfrac{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2}{\frac{4}{9}}-\dfrac{(y-1)^2}{\frac{4}{3}}=1 \end{cases}$$

C'est une **hyperbole** restreinte au demi-plan $x \geqslant 0$, de centre $\Omega\left(\frac{1}{3}\,;\,1\right)$, avec

$$a=\frac{2}{3},\ b^2=\frac{4}{3},\qquad c^2=a^2+b^2=\frac{4}{9}+\frac{12}{9}=\frac{16}{9}\Longrightarrow c=\frac{4}{3},$$

$$e=\frac{c}{a}=\frac{4}{3}\times\frac{3}{2}=2,\qquad \text{foyers } F\left(\frac{4}{3}\,;\,0\right),\ F'\left(-\frac{4}{3}\,;\,0\right) \text{ dans le repère } (\Omega,\vec{\imath},\vec{\jmath}),$$

$$\text{directrices } x=\frac{1}{3} \text{ et } x=-\frac{1}{3},\qquad \text{asymptotes } y=\sqrt{3}\,x \text{ et } y=-\sqrt{3}\,x.$$

Exercices C1 à C4

C1. $(\mathscr{F})$: $y^2-6y+2x+10=0$.
1) Donner la nature de la courbe $(\mathscr{F})$. 2) Préciser le foyer, la directrice, l'excentricité, le sommet et le centre. 3) Tangente à $(\mathscr{F})$ en $A(-1\,;\,2)$. 4) Tangente à $(\mathscr{F})$ en $B(-1\,;\,4)$.

C2. $(\mathscr{E})$: $3x^2+4y^2-39=0$.
1) Nature de la courbe, centre. 2) Éléments caractéristiques, excentricité, foyers et directrices. 3) Tangentes à $(\mathscr{E})$ en $A\left(3\,;\,\frac{3}{2}\right)$ et $B\left(3\,;\,-\frac{3}{2}\right)$.

C3. $(\mathscr{E}')$: $-3x^2+y^2-3x-4=0$.
1) Nature et centre. 2) Éléments caractéristiques et directrices de $(\mathscr{H})$. 3) Tangente en $A(0\,;\,-2)$. 4) Tangente en $B(0\,;\,2)$.

C4. Nature de la courbe d'équation $|z+2-i|=2\,\mathrm{Re}(z)$; déterminer les éléments caractéristiques de la courbe $(\mathscr{H})$ obtenue.

Problèmes corrigés

Problème 1

Énoncé

Un mobile du plan P a son affixe $z(t)$ donnée, en fonction du temps t, par

$$z(t) = f(ti) + 10 - 6i, \qquad f(z) = z^3 + 4(1-i)z^2 - 2(2+7i)z - 16 + 8i.$$

Quand t décrit l'intervalle $[0\,;\,2]$ de $\mathbb{R}$, on note $M(t)$ le point correspondant à l'instant t, $z(t) = x(t) + iy(t)$.

1) Déterminer les coordonnées $\big(x(t)\,;\,y(t)\big)$ de $M(t)$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, ainsi que les coordonnées dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ des vecteurs vitesse et accélération du mobile à l'instant t.

2) Faire un tableau indiquant les variations de x et de y en fonction de t.

3) Construire les points de la trajectoire du mobile correspondant aux valeurs $0\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{2}{3}\,;\,1\,;\,\dfrac{7}{4}\,;\,2$ du réel t, et un vecteur directeur des tangentes à la trajectoire pour les valeurs $0\,;\,\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{7}{4}\,;\,2$ de t.

4) Déduire de ce qui précède le tracé de la trajectoire du mobile, en indiquant le sens du parcours quand t décrit $[0\,;\,2]$.

Corrigé

1) Coordonnées de $M(t)$. Avec $z = ti$:

$$f(ti) = (ti)^3 + 4(1-i)(ti)^2 - 2(2+7i)(ti) - 16 + 8i.$$

$$= -t^3 i - 4(1-i)t^2 - 2(2+7i)ti - 16 + 8i = -4t^2 + 14t - 16 + i\big(-t^3 + 4t^2 - 4t + 8\big).$$

D'où

$$z(t) = \big(-4t^2 + 14t - 16 + 10\big) + i\big(-t^3 + 4t^2 - 4t + 8 - 6\big) \Longrightarrow \begin{cases} x(t) = -4t^2 + 14t - 6 \\ y(t) = -t^3 + 4t^2 - 4t + 2 \end{cases}$$

Vecteur vitesse $\vec{V}(t)$ et vecteur accélération $\vec{a}(t)$:

$$\vec{V}(t) : \begin{cases} x'(t) = -8t + 14 \\ y'(t) = -3t^2 + 8t - 4 \end{cases} \qquad \vec{a}(t) : \begin{cases} x''(t) = -8 \\ y''(t) = -6t + 8 \end{cases}$$

2) Variations de x et y sur $[0\,;\,2]$.

$x'(t) = -8t + 14 = 0 \iff t = \dfrac{7}{4}$. $\qquad y'(t) = -3t^2 + 8t - 4 = -(3t-2)(t-2) = 0 \iff t = \dfrac{2}{3}$ ou $t = 2$.

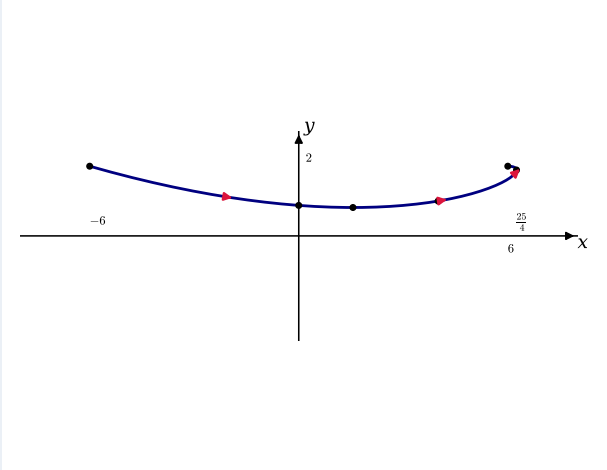
t	0		$\frac{2}{3}$		$\frac{7}{4}$		2
$x'(t)$		$+$		$+$	0	$-$	
$x(t)$	-6	↗	$\frac{14}{9}$	↗	$\frac{25}{4}$	↘	6
$y'(t)$		$-$	0	$+$		$+$	
$y(t)$	2	↘	$\frac{22}{27}$	↗	$\frac{121}{64}$	↗	2

On calcule également $x(0) = -6$, $x\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{7}{8}$, $x(1) = 4$, $y(1) = 1$.

3) Points et tangentes. Les vecteurs vitesse aux instants demandés :

$$\overrightarrow{V}(0) = \begin{pmatrix} 14 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{V}\left(\frac{2}{3}\right) = \begin{pmatrix} \frac{26}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{V}\left(\frac{7}{4}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{13}{16} \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{V}(2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4) Trajectoire.



Le mobile part de $(-6\,;\,2)$, descend vers le minimum $\left(\frac{14}{9}\,;\,\frac{22}{27}\right)$, remonte jusqu'au point le plus à droite $\left(\frac{25}{4}\,;\,\frac{121}{64}\right)$, puis revient légèrement en arrière jusqu'au point d'arrivée $(6\,;\,2)$.

Problème 2

Énoncé

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - \dfrac{4}{\sin t}z + \dfrac{13}{\sin^2 t} - 9 = 0$, t paramètre de l'intervalle $]0\,;\,\pi[$.

2) Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère le point M mobile d'affixe

$$z = \frac{2}{\sin t} + 3i\cot(t), \qquad t \in]0\,;\,\pi[,$$

soit $\mathscr{H}$ la trajectoire du mobile, décrite par un point $M(t)$ de coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ avec $x(t) = \dfrac{2}{\sin t}$, $y(t) = 3\cot(t)$.

a) Déterminer l'équation cartésienne de la courbe décrite par $M(t)$.

b) Nommer la courbe $(\mathscr{H})$ décrite par $M(t)$, donner son centre et les équations de ses asymptotes obliques.

c) Déterminer les éléments caractéristiques de $(\mathscr{H})$.

d) Construire la courbe $(\mathscr{H})$.

e) Déterminer les coordonnées du vecteur vitesse $\overrightarrow{V}(t)$.

f) Montrer que $\|\overrightarrow{V}(t)\| = 3$ équivaut à $4\cos^2 t + 9 = 9\sin^4 t$ (E), montrer que (E) équivaut à $9\sin^4 t + 4\sin^2 t - 13 = 0$ (E'). Déterminer la racine acceptable de (E') et en déduire la date à laquelle le point M se trouve au sommet de la trajectoire.

Corrigé

1) Résolution dans $\mathbb{C}$.

$$\Delta = \left(\frac{4}{\sin t}\right)^2 - 4\left(\frac{13}{\sin^2 t} - 9\right) = \frac{16-52}{\sin^2 t} + 36 = -\frac{36}{\sin^2 t} + 36 = -\frac{36\cos^2 t}{\sin^2 t} = \left(\frac{6i\cos t}{\sin t}\right)^2.$$

D'où

$$z' = \frac{2}{\sin t} - 3i\cot(t) \qquad \text{ou} \qquad z'' = \frac{2}{\sin t} + 3i\cot(t).$$

2a) Équation cartésienne. $x(t) = \dfrac{2}{\sin t}$ donc $x^2 = \dfrac{4}{\sin^2 t}$; $y(t) = 3\cot t$ donc

$$y^2 = 9\cot^2 t = 9\cdot\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} = 9\left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1\right) = 9\cdot\frac{x^2}{4} - 9.$$

D'où

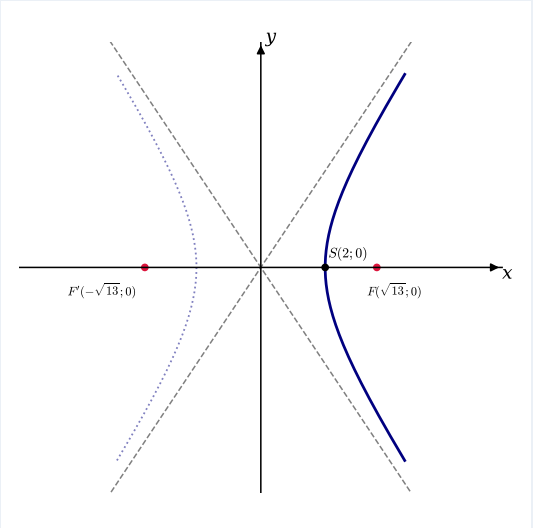
$$\boxed{\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1.}$$

2b) Nature. $(\mathscr{H})$ est l'hyperbole de centre O, d'axe transverse porté par (Ox), de demi-longueur $a = 2$. Comme $\sin t \in]0\,;\,1]$ pour $t \in]0\,;\,\pi[$, on a $x(t) = \dfrac{2}{\sin t} \geqslant 2$: seule la branche droite $(x \geqslant 2)$ est décrite. Asymptotes : $y = \dfrac{3}{2}x$ et $y = -\dfrac{3}{2}x$.

2c) Éléments caractéristiques.

$$b = 3, \qquad c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13}, \qquad e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

2d) Construction.



2e) Vecteur vitesse.

$$x(t) = \frac{2}{\sin t} \Longrightarrow x'(t) = -\frac{2\cos t}{\sin^2 t}, \qquad y(t) = 3\cot t \Longrightarrow y'(t) = -\frac{3}{\sin^2 t}.$$

2f) Étude de $\|\overrightarrow{V}(t)\|$.

$$\|\overrightarrow{V}(t)\|^2 = x'(t)^2 + y'(t)^2 = \frac{4\cos^2 t}{\sin^4 t} + \frac{9}{\sin^4 t} = \frac{4\cos^2 t + 9}{\sin^4 t}.$$

$$\|\overrightarrow{V}(t)\| = 3 \iff \|\overrightarrow{V}(t)\|^2 = 9 \iff 4\cos^2 t + 9 = 9\sin^4 t. \qquad (E)$$

En remplaçant $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$:

$$4(1-\sin^2 t) + 9 = 9\sin^4 t \iff 13 - 4\sin^2 t = 9\sin^4 t \iff 9\sin^4 t + 4\sin^2 t - 13 = 0. \qquad (E')$$

En posant $u = \sin^2 t$: $9u^2 + 4u - 13 = 0$, $\Delta = 16 + 468 = 484 = 22^2$,

$$u = \frac{-4+22}{18} = 1 \qquad \text{ou} \qquad u = \frac{-4-22}{18} = -\frac{13}{9} \text{ (rejetée, négative).}$$

La racine acceptable est $u = \sin^2 t = 1$, donc $\sin t = 1$ (car $\sin t > 0$ sur $]0\,;\,\pi[$), soit $t = \dfrac{\pi}{2}$.
À cet instant, $M\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = (2\,;\,0) = S$: le mobile se trouve alors exactement au **sommet** de la trajectoire, avec une vitesse de norme 3.

Thème 15 : Arithmétique (2)

(Codage affine)

Sommaire

I. Numération : écriture d'un entier en base b
1. Écriture en base b
2. Quelques bases classiques
3. Passage d'un système à un autre

II. Le chiffrement affine
1. Principe
2. Exemple : clé $(15\,;\,7)$

III. Déchiffrement affine
1. Inverse d'un entier modulo n
2. Fonction de déchiffrement
3. Exemples de déchiffrement
4. Décryptage affine
5. Congruences $ax \equiv b\ [n]$

IV. Problèmes corrigés
Problème 1 Problème 2 Problème 3 Problème 4 Problème 5 Problème 6

I. Numération : écriture d'un entier en base b

1. Écriture en base b

Soit b un entier tel que $b \geqslant 2$. Tout entier naturel non nul x s'écrit de manière unique sous la forme

$$x = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \cdots + a_1 b + a_0,$$

où a_0, a_1, ... , a_n sont des entiers appartenant à $[0\,;\,b-1]$ et $a_n \neq 0$.
Ainsi $x = \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0}^{\,b}$ est l'écriture de x en base b.

Exemples.

- Écriture $\overline{243}^{\,b}$ (en base b) : passage à la base 10 :

$$\overline{243}^{\,b} = 2 \times b^2 + 4 \times b^1 + 3 \times b^0 \quad \text{(donne le nombre en base 10).}$$

- $\overline{0{,}73}^{\,b} = 7 \times b^{-1} + 3 \times b^{-2}$ (donne le nombre en base 10).
- Passage de la base 5 à la base 10 :

$$\overline{0{,}231}^{\,5} = 2 \times 5^{-1} + 3 \times 5^{-2} + 1 \times 5^{-3} = \frac{66}{125} = 0{,}528.$$

Attention : un nombre décimal est le quotient d'un entier par une puissance de 10.

2. Quelques bases classiques

Système	Base	Chiffres
binaire	2	$\{0\,;\,1\}$
quinaire	5	$\{0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\}$
octal	8	$\{0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\,;\,7\}$
décimal	10	$\{0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\,;\,7\,;\,8\,;\,9\}$
duodécimal	12	$\{0\,;\,1\,;\,\ldots\,;\,9\,;\,\mathrm{A}\,;\,\mathrm{B}\}$ avec $\mathrm{A}=10$ et $\mathrm{B}=11$
hexadécimal	16	$\{0\,;\,1\,;\,\ldots\,;\,9\,;\,\mathrm{A}\,;\,\mathrm{B}\,;\,\mathrm{C}\,;\,\mathrm{D}\,;\,\mathrm{E}\,;\,\mathrm{F}\}$
sexagésimal	60	$\{0\,;\,1\,;\,2\,;\,\ldots\,;\,58\,;\,59\}$

Dans le système hexadécimal : $\mathrm{A}=10$, $\mathrm{B}=11$, $\mathrm{C}=12$, $\mathrm{D}=13$, $\mathrm{E}=14$, $\mathrm{F}=15$.

Exemples.

$$126 = 1\times 10^2 + 2\times 10^1 + 6\times 10^0 \qquad \overline{1011}^{\,2} = 1\times 2^3 + 0\times 2^2 + 1\times 2^1 + 1\times 2^0 = 11$$

En base 16 : $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0}^{\,16} = a_n\times 16^n + a_{n-1}\times 16^{n-1} + \cdots + a_1\times 16 + a_0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, 16^k$.

3. Passage d'un système à un autre (à l'aide de l'algorithme d'Euclide)

Pour écrire un entier en base b, on effectue des divisions euclidiennes successives par b jusqu'à obtenir un quotient nul ; les restes, lus de bas en haut, donnent l'écriture cherchée.

Exemple. Écrire 234 en base 2.

$$\begin{aligned}
234 &= 117\times 2 + 0\\
117 &= 58\times 2 + 1\\
58 &= 29\times 2 + 0\\
29 &= 14\times 2 + 1\\
14 &= 7\times 2 + 0\\
7 &= 3\times 2 + 1\\
3 &= 1\times 2 + 1\\
1 &= 0\times 2 + 1
\end{aligned}
\qquad \uparrow$$

$$234 = \overline{11101010}^{\,2}$$

$$\overline{1101}^{\,2} = 1\times 2^3 + 1\times 2^2 + 0\times 2^1 + 1\times 2^0 = 13 \quad \text{(en base 10)}$$

$$\overline{1302}^{\,5} = 1\times 5^3 + 3\times 5^2 + 0\times 5^1 + 2\times 5^0 = 202 \quad \text{(en base 10)}$$

Exercice 1

1) Écrire en base 10 : $\overline{231}^{\,5}$; $\overline{110111}^{\,2}$.
2) Écrire en base 2 : 149 ; 83 ; 22.

Exemples.

$$\overline{1\mathrm{A}6}^{\,12} = 1\times 12^2 + \mathrm{A}\times 12^1 + 6\times 12^0 = 144 + 120 + 6 = 270 \qquad (\mathrm{A}=10)$$

Écrire 496 en base 7.

$$\begin{aligned} 496 &= 70 \times 7 + 6 \\ 70 &= 10 \times 7 + 0 \\ 10 &= 1 \times 7 + 3 \\ 1 &= 0 \times 7 + 1 \end{aligned} \uparrow$$

$$496 = \overline{1306}^{7}$$

Écrire 2278 en base 12.

$$\begin{aligned} 2278 &= 189 \times 12 + \mathrm{A} \\ 189 &= 15 \times 12 + 9 \\ 15 &= 1 \times 12 + 3 \\ 1 &= 0 \times 12 + 1 \end{aligned} \uparrow$$

$$2278 = \overline{139\mathrm{A}}^{12}$$

Écrire en base 10 :

$$\overline{3\mathrm{D}4\mathrm{F}}^{16} = 3\times16^3+\mathrm{D}\times16^2+4\times16^1+\mathrm{F}\times16^0 = 12\,288+3\,328+64+15 = 15\,695 \qquad (\mathrm{D}=13,\ \mathrm{F}=15)$$

Exercice 2

1) Écrire en base 16 les nombres suivants : 64 206 ; 61 205.
2) Convertir en base 10 : $\overline{1\mathrm{AE}}^{16}$; $\overline{134}^{5}$; $\overline{314}^{5}$; $\overline{\mathrm{A5E}}^{16}$; $\overline{10}^{2}$.
3) Convertir en base 10 : $\overline{\mathrm{BAC}}^{16}$; $\overline{3\mathrm{F}9}^{16}$.
4) Écrire 77 en base 16.

II. Le chiffrement affine (cryptographie élémentaire)

1. Principe

L'idée est d'utiliser comme fonction de chiffrement une fonction affine du type $y = ax + b$, où x et y sont des entiers.
Le couple $(a\,;\,b)$ est la clé ; la clé est satisfaisante si $\mathrm{PGCD}(a\,;\,26) = 1$.
La lettre chiffrée correspond à un entier compris entre 0 et 25, et l'on travaille modulo 26 :

$$y \equiv ax + b\ [26].$$

Le chiffrement affine se réduit à des calculs sur des entiers.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

1) On remplace chaque lettre par son rang dans l'alphabet auquel on retire 1, d'où la correspondance du tableau.
2) On choisit deux nombres a et b qui sont la clé de chiffrement.
3) Le nombre x est alors codé par $y = ax + b$, où $(a\,;\,b)$ est un couple d'entiers compris entre 0 et 25.
4) On prend le reste r de la division de y par 26 ; ce nombre r est à son tour remplacé par la lettre qui lui correspond dans l'alphabet.

2. Exemple : clé $(15\,;\,7)$

On associe à x l'entier r qui est le reste de la division euclidienne de $15x+7$ par 26 : c'est le chiffrement affine de clé $(15\,;\,7)$.

Coder D. D correspond à 3 dans le tableau. On cherche la lettre qui lui correspond dans le codage $y = 15x + 7$: pour $x = 3$, $y = 15 \times 3 + 7 = 52$ et $52 = 2 \times 26 + 0$. Le reste est $r = 0$, donc D est codé par A.

Coder le mot MATHS.

Lettre	x	$15x+7$	Reste r	Lettre codée
M	12	187	5	F
A	0	7	7	H
T	19	292	6	G
H	7	112	8	I
S	18	277	17	R

M correspond à 12 (voir tableau) : $x = 12$; fonction $15x + 7$.

1) $15 \times 12 + 7 = 187$
2) $187 = 7 \times 26 + 5$, donc $r = 5$ (correspond à F, voir tableau).

A correspond à 0 : $15 \times 0 + 7 = 7$ et $7 = 26 \times 0 + 7$, donc $r = 7$ ($7 \mapsto$ H).

MATHS est codé par FHGIR dans cette fonction de codage.

Exercice 3

1) Avec $y \equiv 3x + 7$ [26], coder le mot SECRET.
   Indication : S $\mapsto$ J ; E $\mapsto$ T ; C $\mapsto$ N ; R $\mapsto$ G ; T $\mapsto$ M.
2) Avec $y \equiv 5x + 3$ [26], coder le mot AFFINE.
   Indication :

Lettre	x	$5x+3$	Reste r	Lettre codée
A	0	3	3	D
F	5	28	2	C
F	5	28	2	C
I	8	43	17	R
N	13	68	16	Q
E	4	23	23	X

AFFINE est codé par DCCRQX.

III. Déchiffrement affine (décodage)

1. Inverse d'un entier modulo n

Chercher l'inverse de a modulo n, c'est chercher a^{-1} tel que

$$a^{-1} \cdot a \equiv 1 \ [n].$$

Remarque : a^{-1} est l'inverse de a (modulo n). Chercher l'inverse de a modulo n revient à résoudre l'équation $au+nv = 1$; u est alors l'inverse de a modulo n (ce qui fait penser à l'algorithme d'Euclide).

Exemples.

Inverse de 5 modulo 26 :
$5 = 26 - 21$
$1 = 26 - 5 \times 5$
$= 26 - 5(26 - 21)$
$= 26 \times (-4) + 5 \times 21$
On a $5 \times 21 = 4 \times 26 + 1$, donc $5 \times 21 \equiv 1$ [26].
Donc 5^{-1} [26] $= 21$.

Inverse de 17 modulo 59 :
$59 = 17 \times 3 + 8$
$17 = 8 \times 2 + 1$
$1 = 17 - 2 \times 8$
$= 17 - 2(59 - 17 \times 3)$
$= 17 \times 7 - 2 \times 59$
On a $17 \times 7 = 2 \times 59 + 1$, donc $17 \times 7 \equiv 1$ [59].
Donc 17^{-1} [59] $= 7$.

Inverse de 7 modulo 31 : $31 = 4 \times 7 + 3$; $7 = 2 \times 3 + 1$, d'où

$$1 = 7 - 2 \times 3 = 7 - 2(31 - 4 \times 7) = 9 \times 7 - 2 \times 31.$$

Donc $7 \times 9 \equiv 1\ [31]$: l'inverse de 7 modulo 31 est 9.

2. Fonction de déchiffrement

Le déchiffrement nécessite de connaître les deux coefficients a et b et de vérifier que $\text{PGCD}(a\,;\,26) = 1$. Si $\text{PGCD}(a\,;\,26) \neq 1$, le message est indéchiffrable.

Pour déchiffrer le message, on cherche la fonction inverse de la fonction $y \equiv ax + b\ [n]$:

$$ax \equiv y - b\ [n].$$

On cherche à isoler x ; pour cela, on détermine a^{-1}, l'inverse de a modulo n : $a \cdot a^{-1} \equiv 1\ [n]$, d'où

$$a^{-1} \cdot a\, x \equiv a^{-1}(y - b)\ [n].$$

On obtient la fonction inverse permettant le déchiffrement :

$$x \equiv a^{-1}(y - b)\ [n]$$

Attention : si l'on sait qu'un code affine a été utilisé, on peut « casser le code » en essayant toutes les clés.

Méthode. Pour déterminer la fonction inverse de $y \equiv ax + b\ [26]$, on doit exprimer x en fonction de y : on multiplie, de gauche à droite, par l'inverse de a modulo 26. L'entier a doit être premier avec 26.

$$ax + b \equiv y\ [26]\ ; \quad \text{PGCD}(a\,;\,26) = 1 \text{ donc } a^{-1}\ [26] \text{ existe}\ ; \quad x \equiv a^{-1}(y - b)\ [26].$$

3. Exemples de déchiffrement

Exemple 1. Soit y le reste de la division euclidienne de $15x + 7$ par 26.

$$15x + 7 \equiv y\ [26], \quad \text{soit} \quad 15x + 7 = y + 26k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

On cherche x en fonction de y : $15x = y - 7 + 26k$. On doit déterminer l'inverse de 15, c'est-à-dire p tel que $p \times 15 \equiv 1\ [26]$, puis multiplier par p.

Cherchons l'inverse de 15 modulo 26 (algorithme d'Euclide) :

$$26 = 15 \times 1 + 11\,; \quad 15 = 11 \times 1 + 4\,; \quad 11 = 4 \times 2 + 3\,; \quad 4 = 3 \times 1 + 1.$$

On exprime 1 en fonction de 26 et 15 :

$$\begin{aligned} 1 &= 4 - 3 \times 1 \\ &= 4 - (11 - 4 \times 2) = 4 \times 3 - 11 \\ &= (15 - 11) \times 3 - 11 = 15 \times 3 - 11 \times 4 \\ &= 15 \times 3 - (26 - 15) \times 4 = 15 \times 7 - 26 \times 4. \end{aligned}$$

Donc $15 \times 7 = 1 + 4 \times 26$, soit $15 \times 7 \equiv 1\ [26]$: 7 est l'inverse de 15 modulo 26.

Multiplions par 7 : $7 \times 15x = 7(y - 7) + 26 \times 7k$, donc

$$7 \times 15\, x \equiv 7y - 49\ [26].$$

Comme $7 \times 15 \equiv 1\ [26]$, on obtient $x \equiv 7y - 49\ [26]$. Or $-49 = -2 \times 26 + 3$, donc $-49 \equiv 3\ [26]$, et

$$x \equiv 7y + 3\ [26] \qquad (x \in \{0\,;\,\ldots\,;\,25\}).$$

On obtient ainsi la fonction de décodage.

Décodage de WHL.

Lettre	y	$7y+3$	Reste r	Lettre
W	22	157	1	B
H	7	52	0	A
L	11	80	2	C

W correspond à 22 (voir tableau) : $7\times 22+3=157$ et $157=26\times 6+1$, donc $r=1$. Dans le tableau, 1 correspond à B. Le décodage de WHL donne le mot BAC.

Exemple 2. $y\equiv 7x+3\ [26]$ est une fonction de chiffrement, et $7^{-1}\,[26]=15$ (car $7\times 15=105=4\times 26+1$). Ainsi

$$x\equiv 15(y-3)=15y-45.$$

Comme $-45=7-2\times 26$, on a $-45\equiv 7\ [26]$ et

$$x\equiv 15y+7\ [26]\qquad \text{(fonction de déchiffrement)}.$$

Exercice 4

Notation : $a^{-1}\,[n]$ désigne l'inverse de a modulo n. Déterminer :

a) $7^{-1}\,[26]$; $3^{-1}\,[26]$; $5^{-1}\,[7]$; $11^{-1}\,[26]$; $20^{-1}\,[57]$.
b) $13^{-1}\,[27]$; $10^{-1}\,[27]$; $8^{-1}\,[27]$; $17^{-1}\,[50]$; $14^{-1}\,[45]$.

Exercice 5

Soit la fonction de chiffrement affine :
$y\equiv 3x+1\ [26]$; coder le mot MATHS.
$y\equiv 5x+8\ [26]$; coder le mot AFFINE.

4. Décryptage affine

On considère la fonction de chiffrement affine $y\equiv 7x+2\ [26]$. Décrypter le mot ZEBBW.

De $y\equiv 7x+2\ [26]$, on obtient $x\equiv 7^{-1}(y-2)\ [26]$, et comme $7^{-1}\,[26]=15$, $x\equiv 15(y-2)\ [26]$.

Lettre	y	$15(y-2)$	x (modulo 26)	Lettre
Z	25	345	7	H
E	4	30	4	E
B	1	-15	11	L
B	1	-15	11	L
W	22	300	14	O

- Z : $x\equiv 15(25-2)=345$; $345=7+13\times 26$, donc $345\equiv 7\ [26]$.
- E : $x\equiv 15(4-2)=30$; $30=4+26$, donc $30\equiv 4\ [26]$.
- B : $x\equiv 15(1-2)=-15$; $-15=11-26$, donc $-15\equiv 11\ [26]$.
- W : $x\equiv 15(22-2)=300$; $300=14+26\times 11$, donc $300\equiv 14\ [26]$.

Le mot décodé est HELLO.

Exercice 6

1) Montrer que si la fonction de chiffrement affine est $y\equiv 3x+7\ [26]$, alors la fonction de déchiffrement est $x\equiv 9y+15\ [26]$.
2) Décrypter le mot : KGHSX.

Exercice 7

a) On donne $y \equiv 3x+1\ [26]$, une fonction de chiffrement affine. Déterminer la fonction de décodage correspondant à y modulo 26, puis décoder LBGWD.
b) Idem pour $y \equiv 5x + 8\ [26]$.

Exercice 8

Déterminer : $27^{-1}\ [392]$; $17^{-1}\ [41]$; $89^{-1}\ [232]$.

Exercice 9

a) On donne $x = \overline{4444}^{5}$; déterminer l'écriture de x en base 10.
b) Donner l'écriture en base 10 des nombres $a = \overline{210210}^{3}$; $b = \overline{10642}^{7}$; $c = \overline{111111111}^{2}$; $d = \overline{1040\mathrm{B}}^{12}$.

Exercice 10

Chiffrement affine : $y \equiv 17x + 40\ [26]$; chiffrer le mot NUAGE.
Déterminer la fonction de déchiffrage de y modulo 26.
Décoder le mot : SQRDMDB.
Indication : $x \equiv 23y + 16\ [26]$.

5. Congruences $ax \equiv b\ [n]$

Exemple. Résoudre dans $\mathbb{Z}$: $4x \equiv 8\ [5]$.

On a $4 \times 4 = 16 \equiv 1\ [5]$, donc $4^{-1}\ [5] = 4$. En multipliant par 4 :

$$4^{-1} \times 4x \equiv 4^{-1} \times 8\ [5], \qquad x \equiv 4 \times 8 = 32\ [5].$$

Comme $32 = 5 \times 6 + 2$, on a $32 \equiv 2\ [5]$, donc $x \equiv 2\ [5]$, c'est-à-dire $x = 2 + 5k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 11

Résoudre dans $\mathbb{Z}$: $4x \equiv 3\ [5]$; $4x \equiv 2\ [5]$; $3x \equiv 5\ [7]$; $5x \equiv 1\ [9]$.

IV. Problèmes corrigés

Problème 1

1. Déterminer PGCD(2 688 ; 3 024).
2. Dans cette question, x et y sont deux entiers relatifs.
   a) Montrer que les équations (1) et (2) sont équivalentes :
      (1) $2\,688\,x + 3\,024\,y = -3\,360$;
      (2) $8x + 9y = -10$.
   b) Vérifier que $(1\,;\,-2)$ est une solution particulière de l'équation (2).
   c) Déduire de ce qui précède les solutions de (2).
3. Soit $(\mathrm{O}\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k}\,)$ un repère orthonormal de l'espace. On considère les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ d'équations respectives $x + 2y - z = -2$ et $3x - y + 5z = 0$.
   a) Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ se coupent suivant une droite $\mathcal{D}$.
   b) Montrer que les coordonnées des points de $\mathcal{D}$ vérifient l'équation (2).
   c) En déduire l'ensemble $\mathcal{E}$ des points de $\mathcal{D}$ dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

Corrigé

1. Pour déterminer le PGCD de 2 688 et 3 024, on les décompose en produits de nombres premiers :

$$2\,688 = 2^7 \times 3 \times 7 \quad \text{et} \quad 3\,024 = 2^4 \times 3^3 \times 7,$$

donc PGCD(2 688 ; 3 024) $= 2^4 \times 3 \times 7 = 336$.

2. a) On a immédiatement :

$$(1) \iff \frac{2\,688}{336}x + \frac{3\,024}{336}y = -\frac{3\,360}{336} \iff 8x + 9y = -10 \quad (2).$$

b) On a $8(1) + 9(-2) = 8 - 18 = -10$, donc $(1\,;\,-2)$ est une solution particulière de (2).

c) Puisque $(1\,;\,-2)$ est solution de (2) :

$$8x + 9y = -10 \iff 8x + 9y = 8(1) + 9(-2) \iff 8(x-1) = 9(-y-2).$$

Donc 9 divise $8(x-1)$; or 9 est premier avec 8, donc (théorème de Gauss) 9 divise $x - 1$: il existe $K \in \mathbb{Z}$ tel que $x - 1 = 9K$. Alors $8 \times 9K = 9(-y-2)$, soit $-y - 2 = 8K$. Les solutions de (2) sont donc tous les couples

$$(1 + 9K\,;\,-2 - 8K), \quad K \in \mathbb{Z}.$$

3. a) Le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + 2y - z = -2$ admet pour vecteur normal $\vec{n_{\mathcal{P}}}(1\,;\,2\,;\,-1)$; le plan $\mathcal{Q}$ d'équation $3x - y + 5z = 0$ admet pour vecteur normal $\vec{n_{\mathcal{Q}}}(3\,;\,-1\,;\,5)$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires (par exemple $\frac{1}{3} \neq \frac{2}{-1}$), donc les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ne sont pas parallèles et ils se coupent suivant une droite $\mathcal{D}$.

b) Les coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ des points de $\mathcal{D}$ sont les solutions du système

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} x + 2y - z = -2 \\ 3x - y + 5z = 0 \end{cases}$$

donc elles vérifient $5(x + 2y - z) + (3x - y + 5z) = 5 \times (-2) + 0$, soit $8x + 9y = -10 \quad (2)$.

c) Les coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ entières des points de $\mathcal{D}$ sont nécessairement (d'après 3. b) et 2. c)) de la forme $x = 1 + 9K$, $y = -2 - 8K$ $(K \in \mathbb{Z})$. Or $(1 + 9K\,;\,-2 - 8K\,;\,z)$ est un point de $\mathcal{D}$ si, et seulement si

$$\begin{cases} (1 + 9K) + 2(-2 - 8K) - z = -2 \\ 3(1 + 9K) - (-2 - 8K) + 5z = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire si, et seulement si, $z = -1 - 7K$. Finalement, l'ensemble $\mathcal{E}$ des points de $\mathcal{D}$ dont les coordonnées sont des entiers relatifs est l'ensemble des points de coordonnées

$$(1 + 9K\,;\, -2 - 8K\,;\, -1 - 7K), \quad K \in \mathbb{Z}.$$

Problème 2

1. On considère l'équation (E) : $8x + 5y = 1$, où $(x\,;\,y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.
   a) Donner une solution particulière de l'équation (E).
   b) Résoudre l'équation (E).
2. Soit N un nombre naturel tel qu'il existe un couple $(a\,;\,b)$ de nombres entiers vérifiant : $\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$
   a) Montrer que le couple $(a\,;\,-b)$ est solution de (E).
   b) Quel est le reste, dans la division de N par 40 ?
3. a) Résoudre l'équation $8x + 5y = 100$, où $(x\,;\,y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.
   b) Au VIIIe siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge. Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune. Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?

Corrigé

1. a) $(x_0\,;\,y_0) = (2\,;\,-3)$, car $8 \times 2 + 5 \times (-3) = 1$.

b) (E) $\iff 8x + 5y = 8 \times 2 + 5 \times (-3) \iff 8(x-2) = -5(y+3)$. Comme 8 et 5 sont premiers entre eux, les solutions de (E) sont

$$x = 2 - 5k, \quad y = -3 + 8k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

2. a) $8a + 5(-b) = (N-1) - (N-2) = 1$.

b) $(a\,;\,-b)$ est solution de (E), donc $a = 2 - 5k$ et $b = 3 - 8k$; par suite

$$N = 8a + 1 = 8(2 - 5k) + 1 = -40k + 17.$$

De plus $N \geqslant 0$, donc $k \leqslant 0$; ainsi le reste de la division euclidienne de N par 40 est 17.

3. a) $8x + 5y = 100 \iff 8x + 5y = 8 \times 200 + 5 \times (-300) \iff 8(x - 200) = -5(y + 300)$, donc les solutions sont

$$x = 200 - 5k, \quad y = -300 + 8k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Soit x le nombre d'hommes et y le nombre de femmes ; alors $x > 0$, $y > 0$, avec $x = 200 - 5k$ et $y = -300 + 8k$ $(k \in \mathbb{Z})$. On a $x > 0 \iff k < 40$ et $y > 0 \iff k > 37{,}5$, donc $k = 38$ ou $k = 39$, d'où

$$(x\,;\,y) = (10\,;\,4) \quad \text{ou} \quad (5\,;\,12).$$

Problème 3

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v})$ (unité graphique : 1 cm). On fera une figure que l'on complétera tout au long de cet exercice.
Soient A, B et C les points d'affixes respectives $a = 3 + 5\text{i}$, $b = -4 + 2\text{i}$ et $c = 1 + 4\text{i}$.
Soit f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M$'$ d'affixe z' définie par $z' = (2 - 2\text{i})z + 1$.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.
2. a) Déterminer l'affixe du point B$'$, image du point B par f.
   b) Montrer que les droites (CB$'$) et (CA) sont orthogonales.

3. Soit M le point d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$, où l'on suppose que x et y sont des entiers relatifs. Soit M′ l'image de M par f.
   Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{CM}'}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ sont orthogonaux si et seulement si $x + 3y = 2$.
4. On considère l'équation (E) : $x + 3y = 2$, où x et y sont des entiers relatifs.
   a) Vérifier que le couple $(-4\,;\,2)$ est une solution de (E).
   b) Résoudre l'équation (E).
   c) En déduire l'ensemble des points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle $[-5\,;\,5]$ et tels que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{CM}'}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ soient orthogonaux.
   Placer ces points sur la figure.

Corrigé

1. f admet une écriture complexe de la forme $z' = \alpha z + \beta$ où $(\alpha\,;\,\beta) \in \mathbb{C}^2$, avec $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$, donc f est une similitude directe.

Le centre est le point invariant : $z = (2 - 2\mathrm{i})z + 1$ équivaut à

$$z(1 - 2 + 2\mathrm{i}) = 1 \iff z(-1 + 2\mathrm{i}) = 1 \iff z = \frac{1}{-1 + 2\mathrm{i}} = \frac{-1 - 2\mathrm{i}}{(-1)^2 + 2^2} = \frac{-1 - 2\mathrm{i}}{5}.$$

Le centre Ω de f admet pour affixe $\omega = -\dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5}\mathrm{i}$.

Nous avons :

$$2 - 2\mathrm{i} = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}.$$

f est la similitude directe de centre Ω, de rapport $2\sqrt{2}$ et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{4}$.

2. a) Soit b' l'affixe du point B′ :

$$b' = (2 - 2\mathrm{i})(-4 + 2\mathrm{i}) + 1 = -8 + 4\mathrm{i} + 8\mathrm{i} + 4 + 1 = -3 + 12\mathrm{i}.$$

B′ admet pour affixe $-3 + 12\mathrm{i}$.

b) Nous avons :

$$\frac{b' - c}{a - c} = \frac{-3 + 12\mathrm{i} - 1 - 4\mathrm{i}}{3 + 5\mathrm{i} - 1 - 4\mathrm{i}} = \frac{-4 + 8\mathrm{i}}{2 + \mathrm{i}} = \frac{4\mathrm{i}(2 + \mathrm{i})}{2 + \mathrm{i}} = 4\mathrm{i}.$$

Donc $\arg\left(\dfrac{b' - c}{a - c}\right) = \arg(4\mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$, c'est-à-dire $\left(\overrightarrow{\mathrm{CA}}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{CB}'}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Les droites (CA) et (CB′) sont donc perpendiculaires.

3. Soit M le point d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ où $(x\,;\,y) \in \mathbb{Z}^2$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\frac{z' - c}{a - c} &= \frac{(2 - 2\mathrm{i})(x + \mathrm{i}y) + 1 - 1 - 4\mathrm{i}}{3 + 5\mathrm{i} - 1 - 4\mathrm{i}} = \frac{2x + 2y + \mathrm{i}(2y - 2x) - 4\mathrm{i}}{2 + \mathrm{i}} \\
&= \frac{(2x + 2y + \mathrm{i}(2y - 2x - 4))(2 - \mathrm{i})}{5} \\
&= \frac{(4x + 4y - 2x + 2y - 4) + \mathrm{i}(4y - 4x - 8 - 2x - 2y)}{5} \\
&= \frac{1}{5}\Big((2x + 6y - 4) + \mathrm{i}(-6x + 2y - 8)\Big).
\end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{CM}'}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ sont orthogonaux si et seulement si $\dfrac{z' - c}{a - c}$ est imaginaire pur, c'est-à-dire si et seulement si

$$\frac{1}{5}(2x + 6y - 4) = 0 \iff 2x + 6y - 4 = 0 \iff x + 3y - 2 = 0 \iff x + 3y = 2.$$

4. a) Nous avons $-4+3\times 2=2$, donc le couple $(-4\,;\,2)$ est solution de (E).

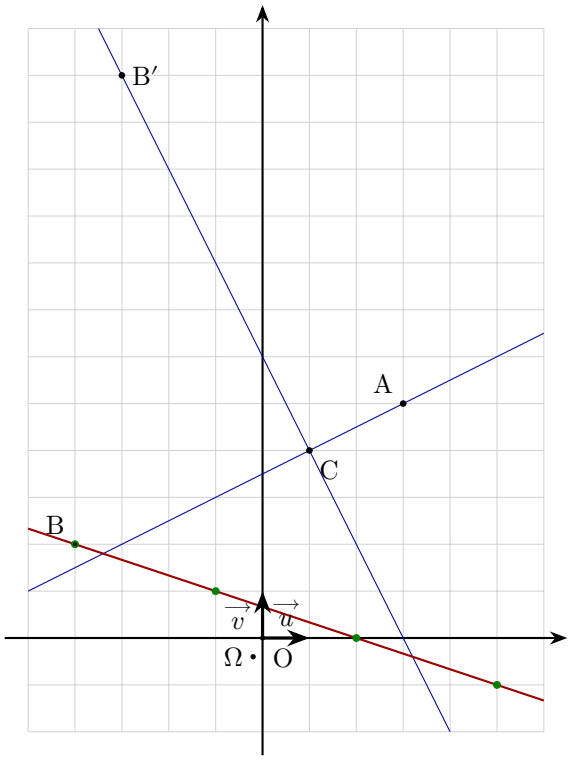
b) (E) équivaut à $x+3y=-4+3\times 2$, soit $x+4=3(2-y)$. Donc 3 divise $x+4$: il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $x+4=3k$. On en déduit que $x=3k-4$ et $3k=3(2-y)$, soit $2-y=k$, c'est-à-dire $y=2-k$.

L'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des couples $(3k-4\,;\,2-k)$ où k décrit $\mathbb{Z}$.

c) $x\in[-5\,;\,5]$, $y\in[-5\,;\,5]$, et $\overrightarrow{\mathrm{CM'}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ sont orthogonaux si et seulement si

$$\begin{aligned}-5\leqslant 3k-4\leqslant 5 \quad\text{et}\quad -5\leqslant 2-k\leqslant 5\\ -1\leqslant 3k\leqslant 9 \quad\text{et}\quad -7\leqslant -k\leqslant 3\\ -\tfrac{1}{3}\leqslant k\leqslant 3 \quad\text{et}\quad -3\leqslant k\leqslant 7\\ k\in\mathbb{Z} \quad\text{et}\quad k\in[0\,;\,3].\end{aligned}$$

L'ensemble des points dont les coordonnées appartiennent à $[-5\,;\,5]$ est donc l'ensemble des points de coordonnées $(-4\,;\,2)$, $(-1\,;\,1)$, $(2\,;\,0)$ et $(5\,;\,-1)$, obtenus respectivement lorsque $k=0$, $k=1$, $k=2$ ou $k=3$.



Problème 4

1. On considère l'équation $(\mathcal{E})$: $17x-24y=9$, où $(x\,;\,y)$ est un couple d'entiers relatifs.
   a) Vérifier que le couple $(9\,;\,6)$ est une solution de l'équation $(\mathcal{E})$.
   b) Résoudre l'équation $(\mathcal{E})$.
2. Dans une fête foraine, Jean s'installe dans un manège circulaire représenté par le schéma en annexe. Il peut s'installer sur l'un des huit points indiqués sur le cercle.
   Le manège comporte un jeu qui consiste à attraper un pompon qui se déplace sur un câble formant un carré dans lequel est inscrit le cercle.
   Le manège tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, à vitesse constante. Il fait un tour en 24 secondes. Le pompon se déplace dans le même sens à vitesse constante. Il fait un tour en 17 secondes.
   Pour gagner, Jean doit attraper le pompon, et il ne peut le faire qu'aux points de contact qui sont notés A, B, C et D sur le dessin.
   À l'instant $t=0$, Jean part du point H, en même temps que le pompon part du point A.

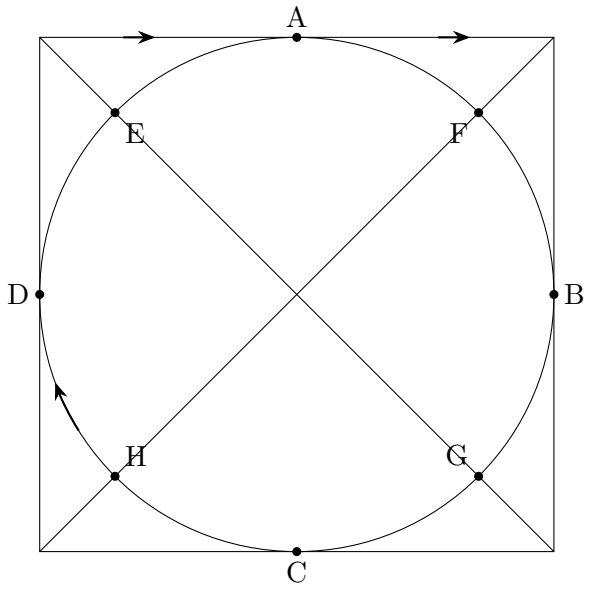
a) On suppose qu'à un certain instant t, Jean attrape le pompon en A. Jean a déjà pu passer un certain nombre de fois en A sans y trouver le pompon. À l'instant t, on note y le nombre de tours effectués par Jean depuis son premier passage en A et x le nombre de tours effectués par le pompon. Montrer que $(x\,;\,y)$ est solution de l'équation $(\mathcal{E})$ de la question 1.

b) Jean a payé pour 2 minutes ; aura-t-il le temps d'attraper le pompon ?

c) Montrer qu'en fait, il n'est possible d'attraper le pompon qu'au point A.

d) Jean part maintenant du point E. Aura-t-il le temps d'attraper le pompon en A avant les deux minutes ?

Annexe



Corrigé

1. a) Nous avons $17 \times 9 - 24 \times 6 = 153 - 144 = 9$, donc le couple $(9\,;\,6)$ est solution de $(\mathcal{E})$.

b) $(\mathcal{E})$ équivaut à $17x - 24y = 17 \times 9 - 24 \times 6$, soit $17(x-9) = 24(y-6)$.
24 divise $17(x-9)$ et 24 et 17 sont premiers entre eux, donc 24 divise $x-9$: il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - 9 = 24k$. Alors $(\mathcal{E})$ équivaut à

$$\begin{cases} 17 \times 24k = 24(y-6) \\ x - 9 = 24k \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \iff \begin{cases} y = 6 + 17k \\ x = 9 + 24k \\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ est l'ensemble des couples $(9 + 24k\,;\,6 + 17k)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

2. a) Soit t le temps, en secondes, au bout duquel Jean attrape le pompon en A, x le nombre de tours effectués à l'instant t par le pompon, y le nombre de tours effectués à l'instant t par Jean depuis son premier passage en A ; x et y sont deux entiers naturels.
Pour le pompon : $t = 17x$.
Pour Jean : il met 9 secondes pour aller de H à A, puis 24 secondes par tour, donc $t = 9 + 24y$.
On en déduit $17x = 9 + 24y$, c'est-à-dire $17x - 24y = 9$: $(x\,;\,y)$ est donc bien solution de l'équation $(\mathcal{E})$.

b) D'après la question 1., la plus petite valeur entière positive de y telle que $(x\,;\,y)$ soit solution de $(\mathcal{E})$ (avec x et y entiers naturels) est $y = 6$ (pour $k = 0$). On a alors $x = 9$.
Jean se trouve donc pour la première fois en A en même temps que le pompon après avoir fait 6 tours depuis son premier passage en A ; le pompon a alors fait 9 tours complets. Le temps t (en secondes) écoulé depuis le départ est $t = 9 + 24 \times 6$, soit $t = 153$ (on a aussi $17 \times 9 = 153$).

Jean et le pompon se trouvent pour la première fois ensemble au point A 153 secondes après le départ. Donc, si Jean ne reste que 2 minutes, soit 120 secondes, sur le manège, il n'aura pas le temps d'attraper le pompon.

c) On suppose toujours qu'à l'instant $t = 0$, Jean part de H et le pompon part de A.

- Supposons qu'au bout d'un temps t (en secondes), Jean et le pompon soient ensemble au point B. Comme précédemment, on note x le nombre de tours effectués à l'instant t par le pompon depuis son premier passage en B et y le nombre de tours effectués à l'instant t par Jean depuis son premier passage en B, avec x et y entiers naturels.
  Le pompon met $\frac{17}{4}$ secondes pour aller de A à B, puis 17 secondes par tour, donc $t = \frac{17}{4} + 17x$.
  Jean met $\frac{5}{8} \times 24 = 15$ secondes pour aller de H à B, puis 24 secondes par tour, donc $t = 15 + 24y$.
  On a donc $\frac{17}{4} + 17x = 15 + 24y$, qui équivaut à $17x - 24y = 15 - \frac{17}{4} = \frac{43}{4}$, ou encore $68x - 96y = 43$.
  Le PGCD de 68 et 96 est 4, et 43 n'est pas divisible par 4, donc cette équation n'admet aucune solution $(x\,;\,y)$ avec x et y entiers. Donc Jean et le pompon ne peuvent pas se trouver au même instant au point B.
- De même, supposons qu'au bout d'un temps t (en secondes), Jean et le pompon soient ensemble au point C. On note x le nombre de tours effectués à l'instant t par le pompon depuis son premier passage en C et y le nombre de tours effectués à l'instant t par Jean depuis son premier passage en C, avec x et y entiers naturels.
  Le pompon met $\frac{17}{2}$ secondes pour aller de A à C, puis 17 secondes par tour, donc $t = \frac{17}{2} + 17x$.
  Jean met $\frac{7}{8} \times 24 = 21$ secondes pour aller de H à C, puis 24 secondes par tour, donc $t = 21 + 24y$.
  On a donc $\frac{17}{2} + 17x = 21 + 24y$, qui équivaut à $17x - 24y = 21 - \frac{17}{2} = \frac{25}{2}$, ou encore $34x - 48y = 25$.
  Cette équation n'admet aucune solution $(x\,;\,y)$ avec x et y entiers (le premier membre est pair, le second impair). Donc Jean et le pompon ne peuvent pas se trouver au même instant au point C.
- Enfin, supposons qu'au bout d'un temps t (en secondes), Jean et le pompon soient ensemble au point D. On note de la même manière x le nombre de tours effectués à l'instant t par le pompon depuis son premier passage en D et y le nombre de tours effectués à l'instant t par Jean depuis son premier passage en D, avec x et y entiers naturels.
  Le pompon met $\frac{3}{4} \times 17 = \frac{51}{4}$ secondes pour aller de A à D, puis 17 secondes par tour, donc $t = \frac{51}{4} + 17x$.
  Jean met 3 secondes pour aller de H à D, puis 24 secondes par tour, donc $t = 3 + 24y$.
  On a donc $\frac{51}{4} + 17x = 3 + 24y$, qui équivaut à $17x - 24y = 3 - \frac{51}{4} = -\frac{39}{4}$, ou encore $68x - 96y = -39$.
  Cette équation n'admet aucune solution $(x\,;\,y)$ avec x et y entiers (le PGCD de 68 et 96 est 4, qui ne divise pas 39). Donc Jean et le pompon ne peuvent pas se trouver au même instant au point D.

En fait, Jean ne peut attraper le pompon qu'au point A.

d) On suppose qu'à l'instant $t = 0$, Jean part du point E, que le pompon part toujours du point A et qu'au bout d'un temps t (en secondes), Jean et le pompon sont ensemble au point A. On note x le nombre de tours effectués à l'instant t par le pompon et y le nombre de tours effectués à l'instant t par Jean depuis son premier passage en A, avec x et y entiers naturels.
Pour le pompon : $t = 17x$. Pour Jean : il met 3 secondes pour aller de E à A, puis 24 secondes par tour, d'où $t = 3 + 24y$.
On a donc l'équation $17x = 3 + 24y$, qui équivaut à $17x - 24y = 3$. Le couple $(3\,;\,2)$ est une solution de cette équation : $17 \times 3 = 51$ et $3 + 24 \times 2 = 51$.
Au bout de 51 secondes, le pompon aura fait 3 tours complets, et Jean aura fait le déplacement du

point E au point A, puis 2 tours complets. 51 secondes après le départ, Jean et le pompon seront tous les deux au point A, donc Jean a le temps d'attraper le pompon en A avant les deux minutes pour lesquelles il a payé !

Problème 5

Partie A — Question de cours

1. Énoncer le théorème de Bézout et le théorème de Gauss.
2. Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

Partie B

Il s'agit de résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $(\mathcal{S})$: $\begin{cases} n \equiv 13 \pmod{19} \\ n \equiv 6 \pmod{12} \end{cases}$

1. Démontrer qu'il existe un couple $(u\,;\,v)$ d'entiers relatifs tel que $19u+12v=1$. (On ne demande pas dans cette question de donner un exemple d'un tel couple.)
   Vérifier que, pour un tel couple, le nombre $N = 13\times 12v + 6\times 19u$ est une solution de $(\mathcal{S})$.
2. a) Soit n_0 une solution de $(\mathcal{S})$; vérifier que le système $(\mathcal{S})$ équivaut à $\begin{cases} n \equiv n_0 \pmod{19} \\ n \equiv n_0 \pmod{12} \end{cases}$
   b) Démontrer que le système $\begin{cases} n \equiv n_0 \pmod{19} \\ n \equiv n_0 \pmod{12} \end{cases}$ équivaut à $n \equiv n_0 \pmod{12\times 19}$.
3. a) Trouver un couple $(u\,;\,v)$ solution de l'équation $19u+12v=1$ et calculer la valeur de N correspondante.
   b) Déterminer l'ensemble des solutions de $(\mathcal{S})$ (on pourra utiliser la question 2. b)).
4. Un entier naturel n est tel que, lorsqu'on le divise par 12, le reste est 6 et, lorsqu'on le divise par 19, le reste est 13.
   On divise n par $228 = 12\times 19$. Quel est le reste r de cette division ?

Corrigé

Partie A.

1. *Théorème de Bézout :* deux entiers naturels non nuls a et b sont premiers entre eux si et seulement s'il existe un couple $(u\,;\,v)$ d'entiers relatifs tels que $au+bv=1$.
Théorème de Gauss : soient a, b, c trois entiers naturels non nuls. Si a et b sont premiers entre eux et si a divise le produit bc, alors a divise c.

2. Soient a, b, c trois entiers naturels non nuls tels que a divise le produit bc. Si a et b sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout il existe un couple $(u\,;\,v)$ d'entiers relatifs tels que $au+bv=1$; alors $acu+bcv=c$.
Or a divise le produit ac, donc il divise acu, et a divise le produit bc, donc il divise bcv. Donc a divise la somme de ces deux nombres, c'est-à-dire a divise c.

Partie B.

1. Les deux nombres entiers 19 et 12 sont premiers entre eux, car 19 est un nombre premier et 19 ne divise pas 12 ; d'après le théorème de Bézout, il existe donc un couple $(u\,;\,v)$ d'entiers relatifs tel que $19u+12v=1$.
En écrivant cette relation sous la forme $19u = 1-12v$, on peut affirmer que $19u \equiv 1 \pmod{12}$. De même, en écrivant la relation de Bézout sous la forme $12v = 1-19u$, on en déduit que $12v \equiv 1 \pmod{19}$.
Considérons alors le nombre $N = 13\times 12v + 6\times 19u$. Puisque $19u \equiv 1 \pmod{12}$, il en résulte que $6\times 19u \equiv 6 \pmod{12}$ et, d'autre part, $13\times 12v \equiv 0 \pmod{12}$, car $13\times 12v$ est un multiple de 12. Par conséquent, $N \equiv 6 \pmod{12}$, d'après la compatibilité de la relation de congruence avec l'addition.
De même, puisque $12v \equiv 1 \pmod{19}$, il en résulte que $13\times 12v \equiv 13 \pmod{19}$ et, d'autre part, $6\times 19u \equiv 0 \pmod{19}$, car $6\times 19u$ est un multiple de 19. Par conséquent, $N \equiv 13 \pmod{19}$.
Ces deux congruences prouvent que N est une solution de $(\mathcal{S})$.

2. a) Soit n_0 une solution de $(\mathcal{S})$: $n_0 \equiv 13 \pmod{19}$ et $n_0 \equiv 6 \pmod{12}$. Alors $(\mathcal{S})$ est équivalent à

$$\begin{cases} n \equiv 13 \pmod{19} \text{ et } n_0 \equiv 13 \pmod{19} \\ n \equiv 6 \pmod{12} \text{ et } n_0 \equiv 6 \pmod{12} \end{cases}$$

ce qui équivaut à $\begin{cases} n \equiv n_0 \pmod{19} \\ n \equiv n_0 \pmod{12}. \end{cases}$

b) Considérons le système $(\mathcal{S}')$: $\begin{cases} n \equiv n_0 \pmod{19} \\ n \equiv n_0 \pmod{12}. \end{cases}$
Si n est une solution de $(\mathcal{S}')$, cela signifie qu'il existe deux entiers relatifs k et k' tels que $n - n_0 = 19k$ et $n - n_0 = 12k'$. On a alors $19k = 12k'$; par conséquent le nombre 12 divise le produit $19k$. Or 12 et 19 sont premiers entre eux ; d'après le théorème de Gauss, 12 divise k ; donc $k = 12k''$, ainsi $n - n_0 = 19 \times 12k''$. Cela se traduit par : $n \equiv n_0 \pmod{12 \times 19}$.
Réciproquement : si n vérifie la congruence $n \equiv n_0 \pmod{12 \times 19}$, cela signifie que $n - n_0 = p \times 12 \times 19$ où $p \in \mathbb{Z}$; donc $n - n_0$ est un multiple de 12 et de 19, donc $\begin{cases} n \equiv n_0 \pmod{19} \\ n \equiv n_0 \pmod{12} \end{cases}$, donc n est solution de $(\mathcal{S}')$.
Ainsi le système $(\mathcal{S}')$ est équivalent à $n \equiv n_0 \pmod{12 \times 19}$.

3. a) Écrivons l'algorithme d'Euclide pour la recherche du PGCD des nombres 19 et 12.

$$\begin{aligned} 19 &= 12 \times 1 + 7 && \text{donc } 7 = 19 \times 1 - 12 \times 1. \\ 12 &= 7 \times 1 + 5 && \text{donc } 5 = 12 \times 1 - 7 \times 1 = 12 \times 1 - (19 \times 1 - 12 \times 1) = 12 \times 2 - 19 \times 1. \\ 7 &= 5 \times 1 + 2 && \text{donc } 2 = 7 - 5 \times 1 = (19 - 12) - (12 \times 2 - 19) = 19 \times 2 - 12 \times 3. \\ 5 &= 2 \times 2 + 1 && \text{donc } 1 = 5 - 2 \times 2 = (12 \times 2 - 19) - 2(19 \times 2 - 12 \times 3) = 19 \times (-5) + 12 \times 8. \end{aligned}$$

Nous avons donc trouvé un couple $(u\,;\,v)$ solution de l'équation $19u + 12v = 1$: $(u\,;\,v) = (-5\,;\,8)$. Ainsi la valeur de N qui lui correspond est

$$N = 13 \times 12v + 6 \times 19u = 13 \times 96 - 6 \times 95 = 1\,248 - 570, \quad \text{soit} \quad N = 678.$$

b) On a prouvé à la question 2. que le système $(\mathcal{S})$ est équivalent à la seule équation $n \equiv n_0 \pmod{12 \times 19}$, et ici $n_0 = N = 678$. Par conséquent, l'ensemble des solutions de $(\mathcal{S})$ est l'ensemble des entiers relatifs n tels que $n \equiv 678 \pmod{228}$, c'est-à-dire l'ensemble des entiers relatifs

$$n = 678 + 228k \quad \text{où } k \in \mathbb{Z}.$$

4. $n \in \mathbb{N}$; les hypothèses de cette question se traduisent par $\begin{cases} n \equiv 13 \pmod{19} \\ n \equiv 6 \pmod{12} \end{cases}$ donc, d'après ce qui précède, $n = 678 + 228k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.
Déterminons le reste r de la division de n par 228 ; autrement dit, déterminons l'entier r tel que $\begin{cases} 0 \leqslant r < 228 \\ n \equiv r \pmod{228}. \end{cases}$
Il suffit pour cela de calculer le reste de la division euclidienne de 678 par 228. Or $678 = 228 \times 2 + 222$ avec $0 \leqslant 222 < 228$. Donc $n \equiv 222 \pmod{228}$ et $r = 222$.

Problème 6

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.

1. **Proposition 1 :** « Pour tout entier naturel n, 3 divise le nombre $2^{2n}-1$ ».
2. **Proposition 2 :** « Si un entier relatif x est solution de l'équation $x^2+x\equiv 0 \pmod 6$, alors $x\equiv 0 \pmod 3$ ».
3. **Proposition 3 :** « L'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x\,;\,y)$ solutions de l'équation $12x-5y=3$ est l'ensemble des couples $(4+10k\,;\,9+24k)$ où $k\in\mathbb{Z}$ ».
4. **Proposition 4 :** « Il existe un seul couple $(a\,;\,b)$ de nombres entiers naturels tel que $a<b$ et $\text{PPCM}(a\,;\,b)-\text{PGCD}(a\,;\,b)=1$ ».
5. Deux entiers naturels M et N sont tels que M a pour écriture $\overline{abc}$ en base dix et N a pour écriture $\overline{bca}$ en base dix.
   Proposition 5 : « Si l'entier M est divisible par 27, alors l'entier $M-N$ est aussi divisible par 27 ».

Corrigé

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $2^{2n}-1=(2^2)^n-1=4^n-1$. Or, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{n-1}4^i=\frac{1-4^n}{1-4}=\frac{1}{3}\left(4^n-1\right),$$

donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $4^n-1=3\sum_{i=0}^{n-1}4^i$ et $\sum_{i=0}^{n-1}4^i\in\mathbb{N}$, donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, 3 divise $2^{2n}-1$.

La proposition 1 est vraie.

2. Pour $x=2$: $2^2+2=6$ et $6\equiv 0 \pmod 6$, donc $x=2$ est solution de l'équation ; pourtant $2\not\equiv 0 \pmod 3$.

La proposition 2 est fausse.

3. Nous avons $12\times 4-5\times 9=3$, donc $(4\,;\,9)$ est solution de l'équation (E) : $12x-5y=3$. Il s'ensuit que (E) équivaut à

$$12x-5y=12\times 4-5\times 9 \iff 12(x-4)=5(y-9).$$

12 divise $5(y-9)$ et 12 et 5 sont premiers entre eux, donc 12 divise $y-9$. On en déduit qu'il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $y-9=12k$, soit $y=9+12k$. Alors $12(x-4)=5(y-9)$ et $y-9=12k$ équivaut à $x-4=5k$ et $y-9=12k$, soit

$$x=4+5k \quad \text{et} \quad y=9+12k.$$

Pour $k=1$, on a $x=9$ et $y=21$ (on vérifie : $12\times 9-5\times 21=108-105=3$). Or il n'existe pas d'entier relatif k tel que $\begin{cases}4+10k=9\\9+24k=21\end{cases}$ donc **la proposition 3 est fausse.**

4. Cherchons s'il existe au moins un couple $(a\,;\,b)$ d'entiers naturels non nuls tel que $a<b$ et $\text{PPCM}(a\,;\,b)-\text{PGCD}(a\,;\,b)=1$.
Il existe $k\in\mathbb{N}^*$ tel que $\text{PPCM}(a\,;\,b)=k\,\text{PGCD}(a\,;\,b)$. Il s'ensuit que $\text{PPCM}(a\,;\,b)-\text{PGCD}(a\,;\,b)=1$ équivaut à $\text{PGCD}(a\,;\,b)\,(k-1)=1$, soit à $\begin{cases}\text{PGCD}(a\,;\,b)=1\\k-1=1\end{cases}$; autrement dit, a et b sont premiers entre eux, $k=2$ et $\text{PPCM}(a\,;\,b)=2$.
Comme $ab=\text{PPCM}(a\,;\,b)\times\text{PGCD}(a\,;\,b)=2$ et $a<b$, on en déduit que $a=1$ et $b=2$, et il existe bien un unique couple solution.

La proposition 4 est vraie.

5. Soit M un entier naturel d'écriture $\overline{abc}$ en base 10 et N un entier naturel d'écriture $\overline{bca}$ dans cette même base. Nous avons $M=100a+10b+c$ et $N=100b+10c+a$.
Si M est divisible par 27, alors il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $100a+10b+c=27k$, d'où $c=27k-100a-10b$,

et on a alors :

$$\begin{aligned} M - N &= 99a - 90b - 9c \\ &= 99a - 90b - 9(27k - 100a - 10b) \\ &= 999a - 243k \\ &= 27(37a - 9k). \end{aligned}$$

Or $37a - 9k \in \mathbb{Z}$, donc $M - N$ est divisible par 27.
La proposition 5 est vraie.

Thème 16 : Calcul intégral – Courbes paramétrées

Sommaire

16.1 Définition et interprétation géométrique
Aire sous une courbe
Primitive
Cas d'une fonction négative
Aire comprise entre deux courbes

16.2 Calcul d'une intégrale
Rappel des primitives
Exemples de calcul
Propriétés de l'intégrale
Valeur moyenne

16.3 Intégration par parties

16.4 Intégration par changement de variable

16.5 Volume engendré par la rotation d'une courbe autour de l'axe (Ox)

16.6 Intégrales avec paramètre
Exemple-méthode

16.7 Courbes paramétrées
Définition
Étude d'une courbe paramétrée
Exemples d'étude

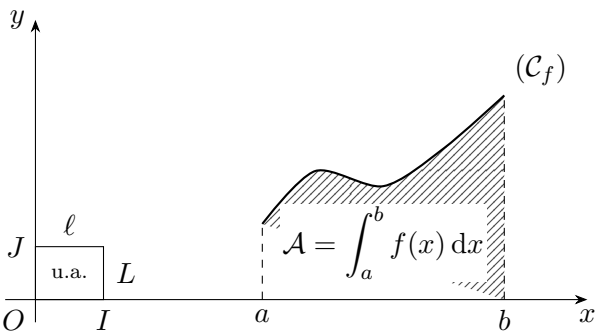
16.1 Définition et interprétation géométrique

Aire sous une courbe

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative. La mesure de l'aire, en unités d'aire (u.a.), du domaine situé sous la courbe $(\mathcal{C}_f)$ entre les abscisses a et b est donnée par :

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$\displaystyle\int_a^b$ se lit « intégrale de a à b ». L'unité d'aire est u.a. $= L \times \ell$, où $OI = \ell$ et $OJ = L$.



Primitive

Une fonction F dérivable sur un intervalle I est une primitive de f sur I si $F' = f$.

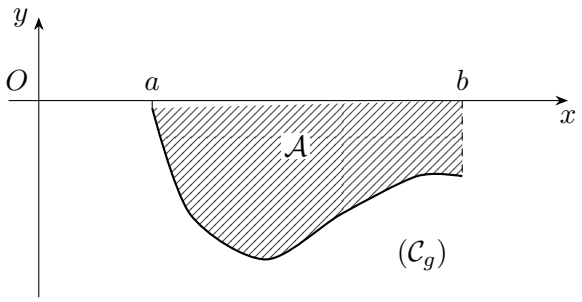
Si F est une primitive quelconque de f, fonction continue sur un intervalle I, alors pour tous $a, b \in I$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Cas d'une fonction négative

⚠ Si g est continue et négative sur $[a\,;b]$, l'aire du domaine compris entre la courbe $(\mathcal{C}_g)$, l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est donnée par :

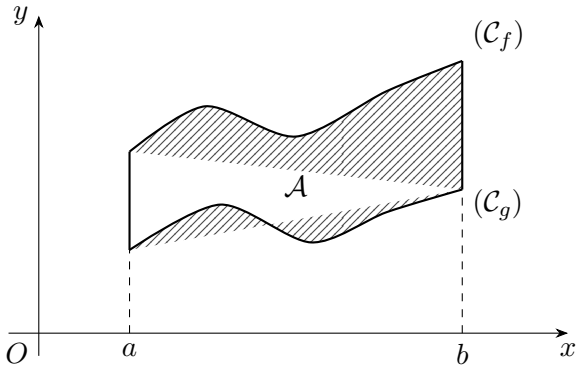
$$\mathcal{A} = -\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \times \text{u.a.}$$



Aire comprise entre deux courbes

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a\,;b]$ telles que $f(x) \geqslant g(x)$ pour tout $x \in [a\,;b]$. L'aire $\mathcal{A}$ comprise entre les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ est donnée par :

$$\mathcal{A} = \int_a^b \big[f(x) - g(x)\big]\,\mathrm{d}x \times \text{u.a.}$$



16.2 Calcul d'une intégrale

Rappel des primitives

Fonction	Primitive	Intervalle
$k,\ k \in \mathbb{R}$	$kx + c$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2 + c$	$\mathbb{R}$
$x^n,\ n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + c$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$	$]0\,;+\infty[$
$\sin x$	$-\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x + c$	$\mathbb{R}$
e^x	$e^x + c$	$\mathbb{R}$

où c est un réel.

Fonction	Primitive
$u'u^n\ (n \neq -1)$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1} + c$
$\frac{u'}{u}$ (u ne s'annule pas)	$\ln\lvert u\rvert + c$
$u'e^u$	$e^u + c$
$u(ax+b)\ (a \neq 0)$	$\frac{1}{a}U(ax+b) + c$, où U est une primitive de u

Exemples de calcul

$$\int_1^2 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2 = \frac{1}{2}\times 2^2 - \frac{1}{2}\times 1^2 = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^e = \frac{1}{2}(\ln e)^2 - \frac{1}{2}(\ln 1)^2 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

Propriétés de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et $a, b, c \in I$.

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

Relation de Chasles :

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

Linéarité : pour tous réels α et β,

$$\int_a^b \big[\alpha f(x) + \beta g(x)\big]\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Positivité et ordre : sur un intervalle $[a\,;b]$ avec $a \leqslant b$,

- si $f(x) \geqslant 0$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$;
- si $f(x) \geqslant g(x)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Inégalité de la moyenne : si $m \leqslant f(x) \leqslant M$ sur $[a\,;b]$, alors

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$$

Preuve. Soit f une fonction bornée entre deux valeurs réelles m et M sur l'intervalle $[a\,;b]$: on a $m \leqslant f(x) \leqslant M$. L'intégrale conserve l'ordre des inégalités, d'où

$$\int_a^b m\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b M\,\mathrm{d}x$$

$$[mx]_a^b \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant [Mx]_a^b$$

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$$

Valeur moyenne

En divisant l'inégalité par $b-a>0$, on obtient

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M$$

Le nombre $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est la valeur moyenne de f entre a et b ; il est noté μ :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Exemple

Déterminer la valeur moyenne de la fonction $f(x) = x^2$ sur $[0\,;2]$.

$$\mu = \frac{1}{2-0}\int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\times 2^3 - \frac{1}{3}\times 0^3\right) = \frac{1}{2}\times\frac{8}{3}$$

$$\boxed{\mu = \frac{4}{3}}$$

Exercice 1

Déterminer la valeur moyenne de la fonction $f(x) = 3x^2$ sur $[1\,;3]$.

Exemple (relation de Chasles)

Calculer $\displaystyle\int_{-2}^{3} |x|\,\mathrm{d}x$.

On a $|x| = -x$ si $x < 0$ et $|x| = x$ si $x \geqslant 0$.

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{3} |x|\,\mathrm{d}x &= \int_{-2}^{0} (-x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{3} x\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{3} \\ &= \left[-\frac{1}{2}\times 0^2 + \frac{1}{2}\times(-2)^2\right] + \left[\frac{1}{2}\times 3^2 - \frac{1}{2}\times 0^2\right] \\ &= \frac{4}{2} + \frac{9}{2} = \frac{13}{2}\end{aligned}$$

$$\int_{-2}^{3} |x|\,\mathrm{d}x = \frac{13}{2}$$

Exercice 2

a) Soit la fonction $f(x) = \sin x$. Calculer la valeur moyenne de f sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

b) Soit la fonction $f(x) = e^{-x}$. Montrer que la valeur moyenne de f sur $[0\,;2]$ est $\mu = \dfrac{e^2-1}{2e^2}$.

Exercice 3

Calculer :

1) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{3+x^2}\,\mathrm{d}x$

2) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$

3) $\displaystyle\int_0^1 \left(2-3e^{3x}\right)\mathrm{d}x$

Exercice 4

On considère $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x+1}{e^x+2}\,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^x+2}\,\mathrm{d}x$.

1) Montrer que $I + J = 1$.

2) Montrer que $I - J = \ln\left(\dfrac{e+2}{3}\right)$.

3) Déterminer I et J.

16.3 Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables sur $[a\,;b]$, avec u' et v' continues sur $[a\,;b]$. Alors :

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)\,v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x$$

Exemple

Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 (2x-1)e^{2x}\,\mathrm{d}x$.

Posons $u(x) = 2x-1$ et $v'(x) = e^{2x}$. Alors $u'(x) = 2$ et $v(x) = \dfrac{1}{2}e^{2x}$.

$$\begin{aligned}
I &= \left[\frac{1}{2}(2x-1)e^{2x}\right]_0^1 - \int_0^1 2\times\frac{1}{2}e^{2x}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{2}(2x-1)e^{2x}\right]_0^1 - \int_0^1 e^{2x}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{2}(2x-1)e^{2x}\right]_0^1 - \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 \\
&= \left[\frac{1}{2}(2-1)e^2 - \frac{1}{2}(0-1)e^0\right] - \left[\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}e^0\right] \\
&= \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2} - \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$I = 1$$

Exercice 5

Calculer $\displaystyle\int_1^e \ln x\,\mathrm{d}x$.

Exercice 6

On pose $J = \displaystyle\int_0^\pi e^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x$. Montrer que $J = \dfrac{e^{-\pi}+1}{2}$.

Exercice 7

Calculer $T = \displaystyle\int_0^\pi x\sin x\,\mathrm{d}x$.

Exercice 8

Soient $I = \displaystyle\int_0^\pi x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^\pi x\sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

a) Calculer $I + J$.

b) Calculer $I - J$.

c) En déduire I et J.

16.4 Intégration par changement de variable

Calculons $I = \displaystyle\int_1^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

On pose $t = 1+\sqrt{x}$. On a $\sqrt{x} = t-1$ et

$$\mathrm{d}t = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\,\mathrm{d}t = 2(t-1)\,\mathrm{d}t$$

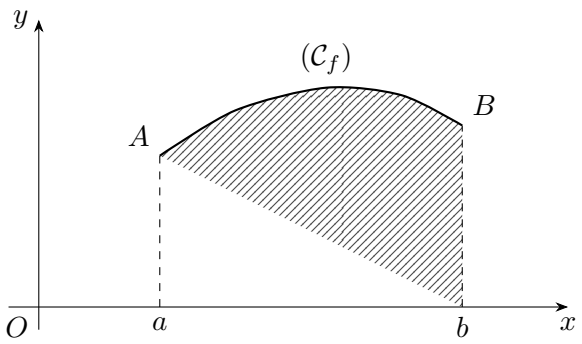
Si $x=1$, $t = 1+\sqrt{1} = 2$; si $x=4$, $t = 1+\sqrt{4} = 3$. Ainsi :

$$\begin{aligned} I &= \int_2^3 \frac{1}{t}\times 2(t-1)\,\mathrm{d}t = 2\int_2^3 \frac{t-1}{t}\,\mathrm{d}t = 2\int_2^3 \left(1-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t \\ &= 2\left[t - \ln|t|\right]_2^3 = 2\big[3-\ln 3 - 2 + \ln 2\big] \\ I &= 2\left(1+\ln\frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

16.5 Volume engendré par la rotation d'une courbe autour de l'axe (Ox)

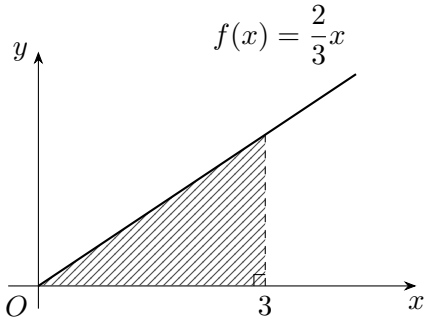
Soit f une fonction continue et positive sur $[a\,;b]$. Le volume engendré par l'aire hachurée lors de la rotation de $(\mathcal{C}_f)$ autour de l'axe (Ox) est le volume engendré par l'aire délimitée par l'arc $\overset{\frown}{AB}$, l'axe (Ox) et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$. Il est donné par :

$$V = \int_a^b \pi\big[f(x)\big]^2\,\mathrm{d}x \times \text{u.v.}$$



Exemple

Volume du cône engendré en faisant tourner la droite d'équation $f(x) = \dfrac{2}{3}x$ autour de l'axe des abscisses entre $x=0$ et $x=3$.



$$V = \int_0^3 \pi\big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x \times \text{u.v.} = \int_0^3 \pi\left(\frac{2}{3}x\right)^2\,\mathrm{d}x \times \text{u.v.} = \int_0^3 \pi \times \frac{4}{9}x^2\,\mathrm{d}x \times \text{u.v.}$$
$$= \frac{4\pi}{9}\int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x \times \text{u.v.} = \frac{4\pi}{9}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^3 \times \text{u.v.}$$
$$= \frac{4\pi}{9}\left(\frac{1}{3}\times 3^3 - \frac{1}{3}\times 0^3\right) \times \text{u.v.} = \frac{4\pi}{9} \times 9 \times \text{u.v.}$$
$$V = 4\pi \text{ u.v.}$$

où u.v. désigne l'unité de volume.

Le volume engendré par l'aire comprise entre deux courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ telles que $f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$ sur $[a\,;b]$ est :

$$V = \pi\int_a^b \Big[\big(f(x)\big)^2 - \big(g(x)\big)^2\Big]\,\mathrm{d}x \times \text{u.v.}$$

Exercice 9

Soit la fonction $f(x) = 1 - x^2$. Calculer le volume engendré par $(\mathcal{C}_f)$ autour de l'axe (Ox) sur $[0\,;1]$.

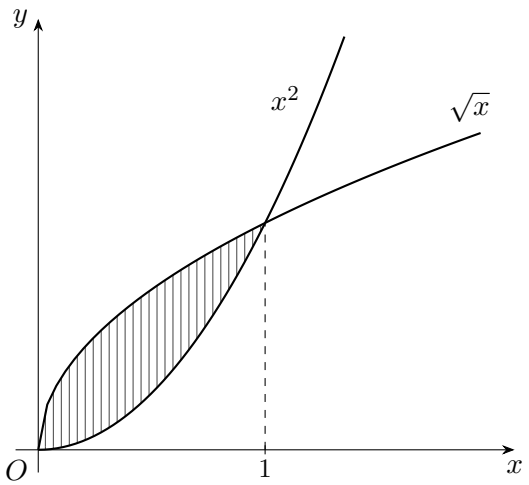
Exercice 10

L'unité de longueur est le centimètre. Soient $f(x) = -x^2 + 4$ et $g(x) = x + 2$ sur $[-2\,;1]$.

1) Tracer $(\mathcal{C}_f)$, la courbe de f.
2) Tracer $(\mathcal{C}_g)$, la courbe de g.
3) Calculer l'aire comprise entre $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$.
4) Calculer le volume V engendré par l'aire comprise entre $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ lors de la rotation autour de l'axe (Ox) sur $[-2\,;1]$.

Exercice 11

Reprendre l'exercice 10 avec $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x^2$ sur $[0\,;1]$, autour de l'axe des abscisses.



16.6 Intégrales avec paramètre

Exemple-méthode

1) Calculer $I(\lambda) = \displaystyle\int_0^{\lambda} e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

2) En déduire $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} I(\lambda)$.

1) On a

$$I(\lambda) = \int_0^{\lambda} e^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-e^{-x}\right]_0^{\lambda} = -e^{-\lambda} - \left(-e^{0}\right) = 1 - e^{-\lambda}$$

$$I(\lambda) = 1 - \frac{1}{e^{\lambda}}$$

2)

$$\lim_{\lambda\to+\infty} I(\lambda) = \lim_{\lambda\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{e^{\lambda}}\right) = 1$$

Exercice 12

Soit $L(\lambda) = \displaystyle\int_{\lambda}^{-1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$, avec $\lambda < -1$.

a) Calculer $L(\lambda)$ en fonction du paramètre λ.

b) Calculer $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} L(\lambda)$.

Exercice 13

On pose $I(\lambda) = \displaystyle\int_{\lambda}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$, avec $0 < \lambda < 1$.

1) Calculer $I(\lambda)$.

2) Calculer $\lim\limits_{\lambda\to0} I(\lambda)$.

Exercice 14

On pose $T(\lambda) = \displaystyle\int_{1}^{\lambda} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$, avec $\lambda > 1$.

1) Calculer $T(\lambda)$.

2) Calculer $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} T(\lambda)$.

16.7 Courbes paramétrées

Définition

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ et I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Comme en physique, à tout réel t de I on associe le point $M(t)$ défini par le vecteur

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\,\vec{\imath} + y(t)\,\vec{\jmath}$$

L'ensemble des points $M(x\,;y)$ du plan tels que

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in I$$

est appelé **courbe paramétrée** de paramètre t.

Exemple

Soit $M(t) : \begin{cases} x(t) = -2 + 3t \\ y(t) = -4 + t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. Déterminons l'équation cartésienne de la courbe :

$$\begin{cases} x = -2 + 3t & (1) \\ y = -4 + t & (2) \end{cases}$$

De (2) : $t = y + 4$. En remplaçant dans (1) :

$$x = -2 + 3(y + 4) = -2 + 3y + 12 = 10 + 3y$$

On a la droite d'équation $x - 3y - 10 = 0$.

Exemple

Soit $M(t) : \begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = 2 - \cos t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. Déterminons l'équation cartésienne de la courbe :

$$x = \sin t \quad \text{et} \quad y - 2 = -\cos t$$

Élevons au carré :

$$x^2 = \sin^2 t \quad \text{et} \quad (y-2)^2 = \cos^2 t$$

d'où

$$x^2 + (y-2)^2 = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

On obtient l'équation du cercle de rayon $\sqrt{1} = 1$ et de centre $A(0\,;2)$.

Étude d'une courbe paramétrée

Périodicité. Si les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont périodiques, on étudie la courbe sur une seule période.

Parité et symétrie.

- Si $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$, la courbe possède une symétrie par rapport à l'axe (Ox).
- Si $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = y(t)$, la courbe possède une symétrie par rapport à l'axe (Oy).
- Si $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$, la courbe est symétrique par rapport à l'origine O du repère.

Variations. On calcule les dérivées $x'(t)$ et $y'(t)$ pour dresser un tableau de variations commun à $x(t)$ et $y(t)$.

Tangentes.

- Tangente verticale : $x'(t) = 0$ et $y'(t) \neq 0$.
- Tangente horizontale : $y'(t) = 0$ et $x'(t) \neq 0$.

Branches infinies.

- Si $x(t) \to a$ (a fini) et $y(t) \to \infty$: la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale.
- Si $x(t) \to \infty$ et $y(t) \to b$ (b fini) : la droite d'équation $y = b$ est asymptote horizontale.
- Si $x(t) \to \infty$ et $y(t) \to \infty$:
  - si $\dfrac{y(t)}{x(t)} \to 0$, la courbe a une branche parabolique de direction (Ox) ;

– si $\dfrac{y(t)}{x(t)} \to \infty$, la courbe a une branche parabolique de direction (Oy) ;
– si $\dfrac{y(t)}{x(t)} \to a$ (a fini, $a \neq 0$) et $y(t) - ax(t) \to b$ (b fini), la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique ;
– si $\dfrac{y(t)}{x(t)} \to a$ (a fini, $a \neq 0$) et $y(t) - ax(t) \to \infty$, la courbe a une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$.

Exemples d'étude

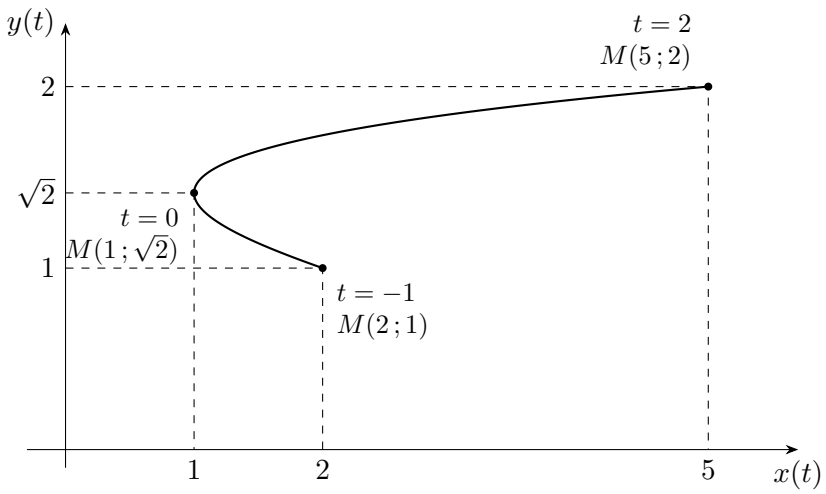
Exemple

Étude du système $\begin{cases} x(t) = t^2 + 1 \\ y(t) = \sqrt{t+2} \end{cases}$, $t \in [-1\,;2]$.

On a $x'(t) = 2t$, et $x'(t) = 0$ pour $t = 0$. De plus $y'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t+2}} > 0$ sur $[-1\,;2]$.

t	-1		0		2
$x'(t)$		$-$	0	$+$	
$x(t)$	2	↘	1	↗	5
$y'(t)$			$+$		
$y(t)$	1	↗	$\sqrt{2}$	↗	2

Points remarquables : pour $t = -1$, $M(2\,;1)$; pour $t = 0$, $M(1\,;\sqrt{2})$, avec une tangente verticale ; pour $t = 2$, $M(5\,;2)$.



Exemple

Étude du système $\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

Parité.

$$x(-t) = \sin(-t) = -\sin t = -x(t)$$
$$y(-t) = 1 - \cos(-t) = 1 - \cos t = y(t)$$

Les points $M(t)$ et $M(-t)$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. On peut donc étudier la courbe sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, puis effectuer une symétrie axiale.

Dérivées et variations sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

$$x'(t) = \cos t \qquad \text{et} \qquad y'(t) = -(-\sin t) = \sin t$$

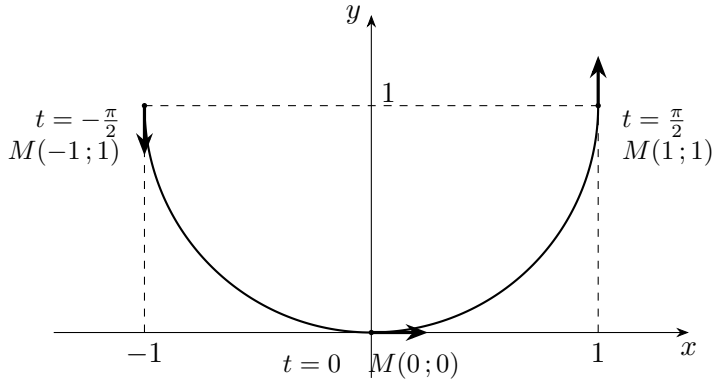
Sur cet intervalle, $\cos t \geqslant 0$ et $\sin t \geqslant 0$.

t	0 $\qquad\qquad$ $\frac{\pi}{2}$
$x'(t) = \cos t$	$+$
$x(t)$	0 ↗ 1
$y'(t) = \sin t$	$+$
$y(t)$	0 ↗ 1

Points remarquables.

Pour $t = 0$: $M(0)$ a pour coordonnées $(0\,;0)$. On a $x'(0) = \cos 0 = 1$ et $y'(0) = \sin 0 = 0$: le vecteur $\vec{V}(0)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ dirige la tangente, qui est horizontale.

Pour $t = \frac{\pi}{2}$: $x = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ et $y = 1 - \cos\frac{\pi}{2} = 1$, donc $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ a pour coordonnées $(1\,;1)$. On a $x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$: le vecteur $\vec{V}\left(\frac{\pi}{2}\right)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ dirige la tangente, qui est verticale.



Thème 17 : Équations différentielles - Fonction puissance

Sommaire

- Équations différentielles
  - Définition
  - Équations différentielles du premier ordre
  - Équations différentielles du second ordre sans second membre
  - Exemples
  - Exercices
  - Problèmes corrigés
- Fonction logarithme décimal
  - Définition. Propriétés
  - Étude de la fonction logarithme décimal
- Puissances d'exposant réel
- Fonction puissance $x \mapsto x^\alpha$
- Croissance comparée de $\ln x$, x^α et e^x
- Étude de la fonction $f\ : x \mapsto x^x$

Équations différentielles

Définition

Une **équation différentielle** est une relation entre une fonction inconnue f et ses dérivées successives.
$y' - 2y = 0$ est une équation différentielle d'ordre 1.
$y'' + y' - 2y = 0$ est une équation différentielle d'ordre 2.

Équations différentielles du premier ordre

Ce sont les équations de la forme $y' = ay + b$, ou encore $y' - ay = b$, où a et b sont des réels ($a \neq 0$).
Résolution de l'équation (E) : $y' - ay = b$.

1) Les solutions de l'équation homogène $y' = ay$ sont les fonctions y telles que

$$y(x) = C\,\mathrm{e}^{ax}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

2) Les solutions de $y' = ay + b$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$y(x) = C\,\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Équations différentielles du second ordre sans second membre

Ce sont les équations du type $ay'' + by' + cy = 0$, où a, b et c sont des réels et $a \neq 0$.
L'**équation caractéristique** s'écrit : $ar^2 + br + c = 0$, de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.
Les solutions de (E) sont les suivantes, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

- Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique a deux racines réelles r_1 et r_2 et
$$y(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{r_1 x} + \mu\,\mathrm{e}^{r_2 x}.$$
- Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique a une racine double $r_0 = \dfrac{-b}{2a}$ et
$$y(x) = (\lambda x + \mu)\,\mathrm{e}^{r_0 x}.$$
- Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique a deux racines complexes conjuguées $z_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$ et $z_2 = \overline{z_1} = \alpha - \mathrm{i}\beta$ et
$$y(x) = \big(\lambda\cos(\beta x) + \mu\sin(\beta x)\big)\,\mathrm{e}^{\alpha x}.$$

Exemples

Exemple 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $y' + 2y = 3$.

Résolution de l'équation homogène $y' + 2y = 0$**.** On a $y' = -2y$, donc $\dfrac{y'}{y} = -2$. En primitivant à gauche et à droite, $\ln|y| = -2x + k$ avec k constante, d'où $|y| = \mathrm{e}^k\,\mathrm{e}^{-2x}$, et donc

$$y(x) = C\,\mathrm{e}^{-2x}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Solution particulière de (E)**.** Soit m une constante solution de (E). On a $m' = 0$, donc $0 + 2m = 3$

et $m = \dfrac{3}{2}$.

La solution générale de l'équation avec second membre (E) est la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière :

$$y(x) = C\,\mathrm{e}^{-2x} + \frac{3}{2}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Déterminons l'unique fonction f solution de (E) telle que $f(0) = 2$.

On a $f(x) = C\,\mathrm{e}^{-2x} + \dfrac{3}{2}$, donc $f(0) = C + \dfrac{3}{2} = 2$, d'où $C = 2 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{4-3}{2} = \dfrac{1}{2}$.

D'où

$$f(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2x} + \frac{3}{2}.$$

Exemple 2

Résoudre les équations différentielles suivantes.

(E_1) : $y'' - 3y' + 2y = 0$. Équation caractéristique : $r^2 - 3r + 2 = 0$. $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 8 = 1 > 0$, donc

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-1}{2} = 1, \qquad r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+1}{2} = 2.$$

$$y(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{x} + \mu\,\mathrm{e}^{2x}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

(E_2) : $y'' - 6y' + 9y = 0$. Équation caractéristique : $r^2 - 6r + 9 = 0$. $\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 36 = 0$, donc $r_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{6}{2} = 3$.

$$y(x) = (\lambda x + \mu)\,\mathrm{e}^{3x}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

(E_3) : $y'' - 2y' + 5y = 0$. Équation caractéristique : $r^2 - 2r + 5 = 0$. $\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 20 = -16 = (4\mathrm{i})^2$, donc

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 + 4\mathrm{i}}{2} = 1 + 2\mathrm{i}, \qquad z_2 = \overline{z_1} = 1 - 2\mathrm{i}.$$

Ainsi $\alpha = 1$ et $\beta = 2$, d'où

$$y(x) = \big(\lambda\cos(2x) + \mu\sin(2x)\big)\,\mathrm{e}^{x}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exercices

1. Résoudre les équations différentielles :

   1) $3y' - 2y = 0$;
   2) $-5y' + 2y = 0$;
   3) $y'' + 2y = 0$.

2. Déterminer la fonction f solution de chacune des équations différentielles suivantes et vérifiant la condition donnée :

   a) $y' - \dfrac{1}{2}y = 0$ et $f(1) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$;
   b) $y' + y = 0$ et $f(-1) = \mathrm{e}$;
   c) $4y' + y = 0$ et $f(0) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

3. a) Résoudre l'équation (E) : $y'' + 4y = 0$.

   b) Déterminer la solution f vérifiant $f(0) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $f'(0) = \dfrac{1}{4}$.

4. a) Résoudre l'équation (E) : $9y'' + y = 0$.
   b) Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 3$.

5. a) Résoudre l'équation (E) : $4y'' + \pi^2 y = 0$.
   b) Déterminer la solution f de (E) telle que $f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$ et $f'(1) = \frac{\pi}{2}$.

6. Résoudre les équations différentielles :
   a) $y'' - 3y' + 2y = 0$; b) $y'' - 2y' + 2y = 0$; c) $y'' - 4y' + 4y = 0$;
   d) $y'' - 9y = 0$; e) $y'' - 3y' - 4y = 0$; f) $y'' - y' + y = 0$; g) $y'' + 2y' - 8y = 0$.

Problèmes corrigés

Problème 1

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y'' - 4y = 0$.
2. Démontrer que l'équation différentielle (E') : $y'' - 4y = 4(x-1)^2 - 2$ admet sur $\mathbb{R}$ une et une seule solution qui soit une fonction polynôme P de degré 2.
3. a) Démontrer qu'une fonction f est solution de (E') si et seulement si la fonction $f - P$ est solution de (E).
   b) En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E'), puis celle qui vérifie $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

Correction.

1. L'équation caractéristique est $r^2 - 4 = 0$, de racines $r_1 = -2$ et $r_2 = 2$. Les solutions de (E) sont les fonctions

$$y(x) = \lambda\, \mathrm{e}^{2x} + \mu\, \mathrm{e}^{-2x}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

2. Cherchons $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. On a $P''(x) = 2a$, donc

$$P'' - 4P = -4a\, x^2 - 4b\, x + 2a - 4c.$$

Or $4(x-1)^2 - 2 = 4x^2 - 8x + 2$. Par identification des coefficients :

$$-4a = 4, \qquad -4b = -8, \qquad 2a - 4c = 2,$$

d'où $a = -1$, $b = 2$ et $c = -1$. Il existe donc une unique fonction polynôme de degré 2 solution de (E') :

$$P(x) = -x^2 + 2x - 1 = -(x-1)^2.$$

3.a) P est solution de (E'), donc $P'' - 4P = 4(x-1)^2 - 2$. Ainsi

$$f \text{ solution de } (E') \iff f'' - 4f = P'' - 4P \iff (f-P)'' - 4(f-P) = 0 \iff f - P \text{ solution de } (E).$$

b) D'après ce qui précède, $f - P$ est de la forme $\lambda\, \mathrm{e}^{2x} + \mu\, \mathrm{e}^{-2x}$, donc les solutions de (E') sont

$$f(x) = \lambda\, \mathrm{e}^{2x} + \mu\, \mathrm{e}^{-2x} - (x-1)^2, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

On a $f'(x) = 2\lambda\, \mathrm{e}^{2x} - 2\mu\, \mathrm{e}^{-2x} - 2(x-1)$. Alors

$$\begin{cases} f(0) = \lambda + \mu - 1 = 0 \\ f'(0) = 2\lambda - 2\mu + 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda - \mu = -1 \end{cases} \iff \lambda = 0,\ \mu = 1.$$

La solution cherchée est

$$f(x) = \mathrm{e}^{-2x} - (x-1)^2.$$

Problème 2

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y'' + 4y' + 4y = 0$.
2. Déterminer les nombres réels a et b pour que la fonction $g : x \mapsto ax + b$ soit solution de l'équation différentielle (E') : $y'' + 4y' + 4y = -4x$.
3. Démontrer qu'une fonction f est solution de (E') si et seulement si $f - g$ est solution de (E). En déduire la solution f sur $\mathbb{R}$ de (E') telle que $f(0) = 2$ et $f'(0) = -2$.

Correction.

1. L'équation caractéristique $r^2 + 4r + 4 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 0$ et pour racine double $r_0 = -2$. Les solutions de (E) sont

$$y(x) = (\lambda x + \mu)\,\mathrm{e}^{-2x}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

2. On a $g'(x) = a$ et $g''(x) = 0$, donc

$$g'' + 4g' + 4g = 4a + 4(ax + b) = 4a\,x + 4a + 4b.$$

g est solution de (E') si et seulement si $4a\,x + 4a + 4b = -4x$ pour tout réel x, c'est-à-dire $a = -1$ et $4a + 4b = 0$, soit $b = 1$. Ainsi

$$g(x) = -x + 1.$$

3. g est solution de (E'), donc

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E') &\iff f'' + 4f' + 4f = g'' + 4g' + 4g \\ &\iff (f-g)'' + 4(f-g)' + 4(f-g) = 0 \\ &\iff f - g \text{ solution de } (E). \end{aligned}$$

Les solutions de (E') sont donc les fonctions $f(x) = (\lambda x + \mu)\,\mathrm{e}^{-2x} - x + 1$. On a

$$f'(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{-2x} - 2(\lambda x + \mu)\,\mathrm{e}^{-2x} - 1.$$

$$\begin{cases} f(0) = \mu + 1 = 2 \\ f'(0) = \lambda - 2\mu - 1 = -2 \end{cases} \iff \mu = 1,\ \lambda = 1.$$

La solution cherchée est

$$f(x) = (x + 1)\,\mathrm{e}^{-2x} - x + 1.$$

Problème 3

1. (E_0) désigne l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 0$. Déterminer les solutions générales de (E_0).
2. (E) est l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 2\mathrm{e}^{-x}$.
   a) Vérifier que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}$ est une solution particulière de (E).
   b) Démontrer que φ est une solution de (E) si et seulement si $g = \varphi - h$ est solution de (E_0).
   c) Déterminer toutes les solutions de (E).
   d) Déterminer la solution f_0 de (E) satisfaisant aux conditions initiales : $f_0(0) = 4$ et $f_0'(0) = 0$.

Correction.

1. L'équation caractéristique $r^2 + 2r + 1 = 0$ a pour racine double $r_0 = -1$. Les solutions générales de (E_0) sont

$$y(x) = (\lambda x + \mu)\,\mathrm{e}^{-x}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

2.a) On a $h'(x) = (2x - x^2)\,\mathrm{e}^{-x}$ et $h''(x) = (2 - 2x)\,\mathrm{e}^{-x} - (2x - x^2)\,\mathrm{e}^{-x} = (x^2 - 4x + 2)\,\mathrm{e}^{-x}$. Donc

$$h'' + 2h' + h = \big(x^2 - 4x + 2 + 4x - 2x^2 + x^2\big)\mathrm{e}^{-x} = 2\,\mathrm{e}^{-x}.$$

h est bien une solution particulière de (E).

b) Comme h est solution de (E) :

$$\begin{aligned}\varphi \text{ solution de } (E) &\iff \varphi'' + 2\varphi' + \varphi = h'' + 2h' + h\\ &\iff (\varphi - h)'' + 2(\varphi - h)' + (\varphi - h) = 0\\ &\iff g \text{ solution de } (E_0).\end{aligned}$$

c) Les solutions de (E) sont les fonctions $\varphi = g + h$:

$$\varphi(x) = (x^2 + \lambda x + \mu)\,\mathrm{e}^{-x}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

d) On a $f_0(x) = (x^2 + \lambda x + \mu)\,\mathrm{e}^{-x}$ et $f_0'(x) = \big(-x^2 + (2-\lambda)x + \lambda - \mu\big)\mathrm{e}^{-x}$. Alors

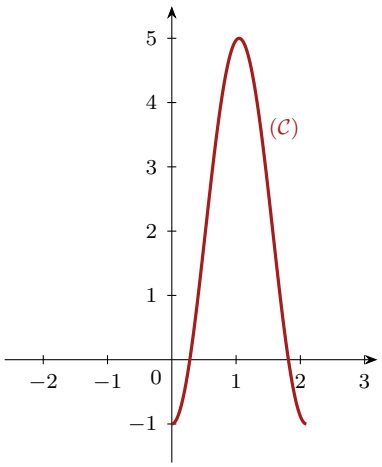
$$\begin{cases} f_0(0) = \mu = 4 \\ f_0'(0) = \lambda - \mu = 0 \end{cases} \iff \lambda = \mu = 4.$$

$$f_0(x) = (x^2 + 4x + 4)\,\mathrm{e}^{-x} = (x+2)^2\,\mathrm{e}^{-x}.$$

Problème 4

Soit (E) l'équation différentielle $y'' + 9y = 18$, où y est une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y'' étant la dérivée seconde de y.

1. Déterminer la fonction constante h solution de (E).
2. a. Montrer que toute autre solution g de (E) vérifie : $(g-h)'' + 9(g-h) = 0$.
   b. Résoudre l'équation $y'' + 9y = 0$.
3. a. Déduire de 1 et 2 l'expression générale des solutions de (E).
   b. Déterminer la solution particulière f de (E) qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.
4. On considère la fonction ϕ définie sur $\left[0\,;\dfrac{2\pi}{3}\right]$ par $\phi(x) = 2 - 3\cos 3x$. Voici la représentation graphique $(\mathcal{C})$ de ϕ dans un repère orthonormal.



Calculer le volume engendré par la révolution de la courbe $(\mathcal{C})$ autour de l'axe des abscisses.

Correction.

1. Si h est constante, $h'' = 0$ et $9h = 18$, donc $h = 2$.

2.a) g et h sont solutions de (E) : $g''+9g=18$ et $h''+9h=18$. Par différence,

$$(g-h)''+9(g-h)=18-18=0.$$

b) L'équation caractéristique $r^2+9=0$ a pour racines $\pm 3\mathrm{i}$ ($\alpha=0$, $\beta=3$). Les solutions de $y''+9y=0$ sont

$$y(x)=\lambda\cos 3x+\mu\sin 3x, \qquad \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

3.a) Les solutions de (E) sont les fonctions $g=(g-h)+h$:

$$y(x)=\lambda\cos 3x+\mu\sin 3x+2, \qquad \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

b) On a $f'(x)=-3\lambda\sin 3x+3\mu\cos 3x$, donc

$$\begin{cases} f(0)=\lambda+2=1\\ f'(0)=3\mu=0\end{cases} \iff \lambda=-1,\ \mu=0.$$

$$f(x)=2-\cos 3x.$$

4. Le volume engendré par la révolution de $(\mathcal{C})$ autour de l'axe des abscisses est

$$V=\pi\int_0^{2\pi/3}\phi(x)^2\,\mathrm{d}x.$$

On a $\phi(x)^2=4-12\cos 3x+9\cos^2 3x=\dfrac{17}{2}-12\cos 3x+\dfrac{9}{2}\cos 6x$. Donc

$$\int_0^{2\pi/3}\phi(x)^2\,\mathrm{d}x=\left[\frac{17}{2}\,x-4\sin 3x+\frac{3}{4}\sin 6x\right]_0^{2\pi/3}=\frac{17}{2}\times\frac{2\pi}{3}=\frac{17\pi}{3},$$

puisque $\sin 2\pi=\sin 4\pi=0$. Ainsi

$$V=\frac{17\pi^2}{3}\text{ unités de volume }(\approx 55{,}9).$$

Problème 5

Partie A : résolution d'une équation différentielle.

On se propose de résoudre l'équation différentielle (E) : $y'-2y=\dfrac{-2}{1+\mathrm{e}^{-2x}}$.

1. Déterminer la solution de l'équation $y'-2y=0$ qui prend la valeur 1 en 0.
2. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ et telles que $f(0)=\ln 2$ et, pour tout réel x, $f(x)=\mathrm{e}^{2x}g(x)$.
   a. Calculer $g(0)$.
   b. Calculer $f'(x)$ en fonction de $g'(x)$ et de $g(x)$.
   c. Démontrer que f est une solution de l'équation (E) si et seulement si $g'(x)=\dfrac{-2\,\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}}$.
   d. En déduire l'expression de $g(x)$ puis celle de $f(x)$, sachant que f est une solution de l'équation (E).

Correction.

1. Les solutions de $y'-2y=0$ sont $y(x)=C\,\mathrm{e}^{2x}$. Comme $y(0)=C=1$, la solution cherchée est $y(x)=\mathrm{e}^{2x}$.

2.a) $f(0) = \mathrm{e}^0 g(0) = g(0)$, donc $g(0) = \ln 2$.

b) $f'(x) = 2\,\mathrm{e}^{2x} g(x) + \mathrm{e}^{2x} g'(x) = \mathrm{e}^{2x}\big(g'(x) + 2g(x)\big)$.

c) On a $f'(x) - 2f(x) = \mathrm{e}^{2x} g'(x) + 2\,\mathrm{e}^{2x} g(x) - 2\,\mathrm{e}^{2x} g(x) = \mathrm{e}^{2x} g'(x)$. Donc

$$f \text{ solution de } (E) \iff \mathrm{e}^{2x} g'(x) = \frac{-2}{1+\mathrm{e}^{-2x}} \iff g'(x) = \frac{-2\,\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}}.$$

d) On remarque que $g'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = 1 + \mathrm{e}^{-2x} > 0$. Donc $g(x) = \ln\big(1+\mathrm{e}^{-2x}\big) + k$. Comme $g(0) = \ln 2 + k = \ln 2$, on a $k = 0$:

$$g(x) = \ln\big(1+\mathrm{e}^{-2x}\big), \qquad f(x) = \mathrm{e}^{2x} \ln\big(1+\mathrm{e}^{-2x}\big).$$

Fonction logarithme décimal

Définition. Propriétés

Pour tout entier relatif n, on a $\ln 10^n = n \ln 10$.

Il est commode de trouver une fonction telle que l'image de 10^n par cette fonction soit n. Pour cela, il suffit d'écrire

$$\frac{\ln 10^n}{\ln 10} = n,$$

et la fonction cherchée est $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{\ln 10}$.

Définition.

On appelle **fonction logarithme décimal** la fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{\ln 10}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

On la note log. Donc :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \qquad \log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

Considérons les formules démontrées pour le logarithme népérien. Si nous divisons les deux membres par $\ln 10$, nous déduisons que, quels que soient les réels $a > 0$ et $b > 0$ et quel que soit le rationnel α :

$$\log ab = \log a + \log b$$
$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$
$$\log \frac{1}{b} = -\log b$$
$$\log a^\alpha = \alpha \log a$$

Étude de la fonction logarithme décimal

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et sa dérivée est

$$x \longmapsto \frac{(\ln)'(x)}{\ln 10} = \frac{1}{x \ln 10}.$$

Puisque $10 > 1$, on a $\ln 10 > 0$, donc $\dfrac{1}{x \ln 10} > 0$ pour $x > 0$ et la fonction log est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. On a

$$\lim_{x \to +\infty} \log x = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\ln 10} = +\infty, \qquad \lim_{x \to 0} \log x = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\ln 10} = -\infty.$$

D'où le tableau de variations :

x	0		1		10		$+\infty$
$(\log)'(x)$		$+$		$+$		$+$	
$\log x$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

La représentation graphique Γ' de la fonction log se déduit de celle Γ de la fonction ln de la façon suivante. Supposons le repère orthonormé : pour une même valeur de x, l'ordonnée du point de Γ' se déduit de l'ordonnée du point de Γ en la multipliant par $\dfrac{1}{\ln 10}$.

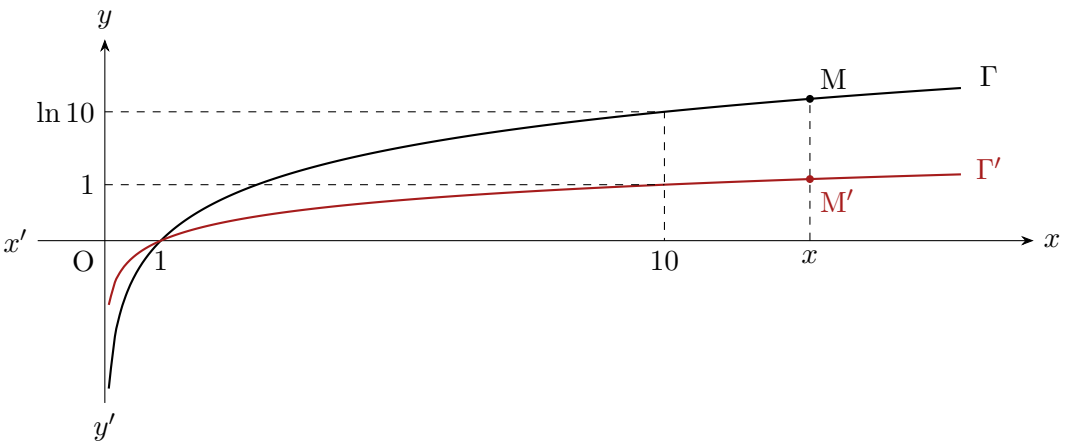


Figure : représentations graphiques de ln (Γ) et de log (Γ').

Remarque. On a vu que $\log 10 = \dfrac{\ln 10}{\ln 10} = 1$. On dit que 10 est la **base** des logarithmes décimaux.
La base des logarithmes népériens est le nombre e tel que $\ln \mathrm{e} = 1$. Une calculatrice donne $\mathrm{e} \approx 2{,}718\,281\,828$.

On peut fabriquer d'autres fonctions logarithmes : si $a > 0$ et $a \neq 1$, la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{\ln a}$ se note $\log_a x$. Nous avons encore $\log_a a = 1$. Le nombre a est la base de ces nouveaux logarithmes.

Puissances d'exposant réel

Si $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \notin \mathbb{Q}$, par extension, nous poserons $\ln a^\alpha = \alpha \ln a$, ce qui signifie encore que :

$$a^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln a}$$

On démontre que les formules sur les puissances sont les mêmes que celles à exposants entiers relatifs. Quels que soient $a > 0$, $b > 0$, α et β réels :

$$a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}$$
$$\frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$$
$$(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$$
$$(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$$

Ces formules se démontrent en prenant les logarithmes népériens. Par exemple, démontrons l'égalité $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$ (les autres se démontrent de la même façon) :

$$\ln(a^\alpha)^\beta = \beta \ln a^\alpha = \alpha\beta \ln a = \ln a^{\alpha\beta},$$

donc $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$.

Exercice résolu

1. Le taux de croissance t d'une population est de 8 % par an. À la fin de la 1re année, la population p devient donc $p+0{,}08p = 1{,}08p$. À la fin de la 2e année, la population est $1{,}08\,(1{,}08p) = (1{,}08)^2 p$, …, à la fin de la n^{e} année elle est $(1{,}08)^n p$ (par récurrence).

   Au bout de combien d'années n la population a-t-elle doublé ? triplé ?

2. Déterminer t pour que la population double seulement au bout de 20 ans.

Correction.

1. On a :

$$(1{,}08)^n p = 2p \iff (1{,}08)^n = 2 \iff n\ln(1{,}08) = \ln 2 \iff n = \frac{\ln 2}{\ln(1{,}08)} \approx 9{,}006.$$

La population double donc en un peu plus de 9 ans, soit au bout de 10 ans en années entières.

De même :

$$(1{,}08)^n p = 3p \iff n = \frac{\ln 3}{\ln(1{,}08)} = 14{,}27\ldots$$

La population triple en un peu plus de 14 ans, soit au bout de 15 ans en années entières.

2. La population double au bout de 20 ans, lorsque le taux de croissance est t, si et seulement si :

$$\begin{aligned}(1+t)^{20} &= 2\\ 20\ln(1+t) &= \ln 2\\ \ln(1+t) &= \frac{\ln 2}{20}\\ 1+t &= \mathrm{e}^{\frac{\ln 2}{20}} = 1{,}035\ldots\\ t &\approx 3{,}5\,\%.\end{aligned}$$

Fonction puissance $x \longmapsto x^\alpha$ $(x>0,\ \alpha\in\mathbb{R})$

Quels que soient $x>0$ et α réel, on sait que $x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha\ln x}$. Considérons les applications

$$f:\ \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R},\ x\longmapsto X=\alpha\ln x \qquad \text{et} \qquad g:\ \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ X\longmapsto \mathrm{e}^X.$$

On peut dire que $x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha\ln x} = g\circ f(x)$. Nous pouvons alors étudier les variations de $x\longmapsto x^\alpha$ sans l'aide de la dérivée.

• **Si** $\alpha>0$, f et g sont strictement croissantes, donc $g\circ f$ également :

x	0		$+\infty$
$\ln x$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$
$\alpha\ln x$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$
$x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha\ln x}$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha = \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{\alpha\ln x} = 0.$$

Nous pouvons prolonger par continuité en 0 la fonction puissance en définissant la fonction h par :

$$\text{si } x>0,\ h(x)=x^\alpha; \qquad \text{si } x=0,\ h(0)=0.$$

Soit $\mathrm{M}\big(x,h(x)\big)$ où l'on suppose $x>0$. Le coefficient directeur de la demi-droite [OM) est

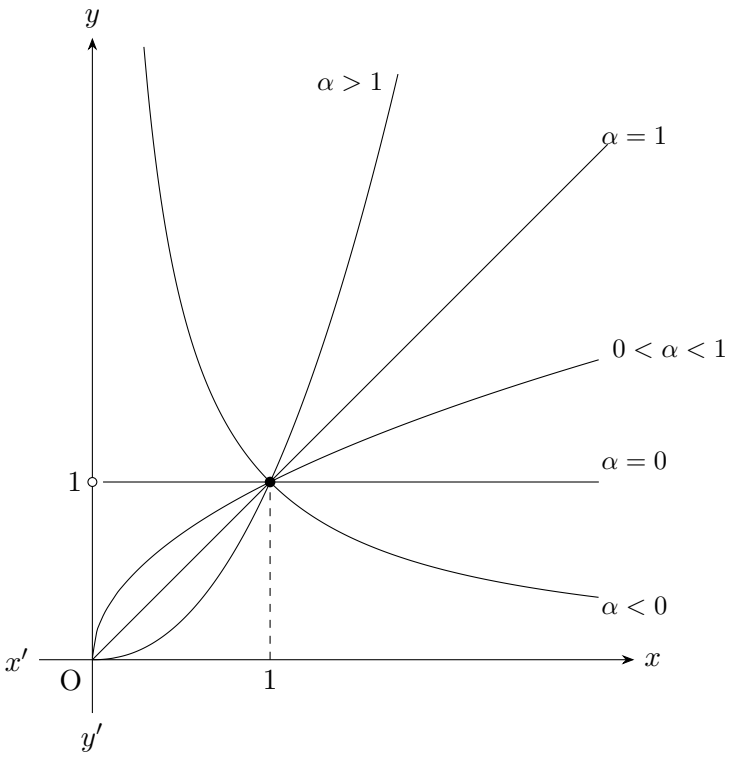
$$\frac{h(x)}{x} = \frac{x^\alpha}{x} = x^{\alpha-1} = \mathrm{e}^{(\alpha-1)\ln x}.$$

- Si $\alpha > 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{(\alpha-1)\ln x} = 0$ et la courbe représentant h admet une demi-tangente portée par $x'\mathrm{O}x$ (voir la figure ci-dessous).
- Si $\alpha = 1$, $h(x) = x$ et la courbe représentant h est la demi-droite définie par $y = x$ et $x \geqslant 0$.
- Si $0 < \alpha < 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{(\alpha-1)\ln x} = +\infty$: on exprime cette propriété en disant que la courbe représentant h admet une demi-tangente portée par $y'\mathrm{O}y$.

• **Si** $\alpha < 0$, f est strictement décroissante tandis que g est strictement croissante, donc $g \circ f$ est strictement décroissante :

x	0		$+\infty$
$\ln x$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$
$\alpha \ln x$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$
$x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}$	$+\infty$	$\searrow$	0

• **Si** $\alpha = 0$, la fonction $x \longmapsto x^0 = 1$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ est représentée par une demi-droite ouverte parallèle à $\mathrm{O}x$.



Croissance comparée de $x \longmapsto \ln x$, $x \longmapsto x^\alpha$, $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ $(x > 0,\ \alpha > 0)$

Introduction

Supposons $x > 0$ et $\alpha > 0$. On sait que les fonctions $x \longmapsto \ln x$, $x \longmapsto x^\alpha$, $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}_+^*$. Une calculatrice nous donne (pour $\alpha = 3$) :

x	10	40	70	100
$\ln x$	2,30	3,69	4,25	4,61
x^3	1 000	64 000	343 000	10^6
e^x	22 026,47	$2{,}35 \cdot 10^{17}$	$2{,}52 \cdot 10^{30}$	$2{,}69 \cdot 10^{43}$

Il apparaît que $x \longmapsto \ln x$ croît beaucoup moins vite que $x \longmapsto x^3$, qui croît elle-même beaucoup moins vite que $x \longmapsto \mathrm{e}^x$. On peut penser que :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{\mathrm{e}^x} = 0.$$

Étude de quelques limites

Nous supposons $x > 0$ et $\alpha > 0$.

■ **Étude de** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$**.**

Nous avons $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$: on ne peut conclure directement pour la limite du quotient $\dfrac{\ln x}{x}$.

Cherchons un encadrement $0 \leqslant \dfrac{\ln x}{x} \leqslant \varphi(x)$ avec $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$. Il en résultera que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Montrons pour cela que, si $x \geqslant 1$, nous avons $\ln x \leqslant 2\sqrt{x}$. On prendra alors $\varphi(x) = \dfrac{2\sqrt{x}}{x} = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

Étudions la fonction $g : x \longmapsto \ln x - 2\sqrt{x}$ sur $[1\,;+\infty[$. Pour $x \geqslant 1$, on a les équivalences :

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \leqslant 0 \iff \frac{1-\sqrt{x}}{x} \leqslant 0 \iff 1 \leqslant \sqrt{x}.$$

Cette dernière inégalité est vraie pour $x \geqslant 1$. D'où le tableau de variations de g :

x	1		$+\infty$
$g'(x)$	0	$-$	
$g(x)$	-2	$\searrow$	

Ce qui montre que $g(x) < 0$ sur $[1\,;+\infty[$, donc $\ln x < 2\sqrt{x}$ sur $[1\,;+\infty[$, et on aura sur cet intervalle :

$$0 \leqslant \frac{\ln x}{x} < \frac{2\sqrt{x}}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0, \qquad \text{donc} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

■ **Étude de** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}$**.**

Nous avons $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$: on ne peut conclure directement pour la limite du quotient $\dfrac{\ln x}{x^\alpha}$. On peut se ramener au cas précédent en posant $X = x^\alpha$, d'où $\ln X = \alpha \ln x$ et :

$$\frac{\ln x}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha}\,\frac{\ln X}{X}.$$

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} X = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \frac{1}{\alpha}\,\frac{\ln X}{X} = 0$, on a :

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*) \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$$

On peut dire que, lorsque x tend vers $+\infty$, le comportement de $\dfrac{\ln x}{x^\alpha}$ est celui de $\dfrac{1}{x^\alpha}$.

■ **Étude de $\lim\limits_{x\to0} x^\alpha \ln x$.**

Nous avons $\lim\limits_{x\to0} x^\alpha = 0$ et $\lim\limits_{x\to0} \ln x = -\infty$: on ne peut conclure directement pour la limite du produit. On peut se ramener à la limite précédente par un changement de variable. Posons $X = \dfrac{1}{x}$, d'où $x^\alpha \ln x = -\dfrac{\ln X}{X^\alpha}$.

Comme $\lim\limits_{x\to0^+} X = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \left(-\dfrac{\ln X}{X^\alpha}\right) = 0$, on a :

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*) \qquad \lim_{x\to0} x^\alpha \ln x = 0$$

On peut dire que, lorsque x tend vers 0, le comportement de $x^\alpha \ln x$ est celui de x^α.

■ **Étude de $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^\alpha}$.**

Nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$: on ne peut conclure directement pour la limite du quotient. On peut écrire :

$$\frac{\mathrm{e}^x}{x^\alpha} = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{\alpha\ln x}} = \mathrm{e}^{x-\alpha\ln x} = \mathrm{e}^X,$$

en posant $X = x - \alpha\ln x = x\left(1 - \alpha\dfrac{\ln x}{x}\right)$. Nous avons :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \left(1 - \alpha\frac{\ln x}{x}\right) = 1, \qquad \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \alpha\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty.$$

Il en résulte que $\lim\limits_{x\to+\infty} X = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$, d'où :

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*) \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^\alpha} = +\infty$$

Quand x tend vers $+\infty$, le comportement de $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^\alpha}$ est celui de e^x.

■ **Étude de $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{-x}$.**

Nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} = 0$: on ne peut conclure directement pour la limite du produit $x^\alpha \mathrm{e}^{-x}$. On remarque que $x^\alpha \mathrm{e}^{-x} = \dfrac{x^\alpha}{\mathrm{e}^x}$, qui n'est autre que l'inverse de $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^\alpha}$ dont on vient de trouver la limite. D'après le théorème relatif à la limite de l'inverse d'une fonction :

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*) \qquad \lim_{x\to+\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{-x} = 0$$

Quand x tend vers $+\infty$, le comportement de $x^\alpha \mathrm{e}^{-x}$ est celui de e^{-x}.

Étude de la fonction $f\ : x \longmapsto x^x$

Étudier et représenter graphiquement la fonction numérique f de la variable réelle x, définie par $f(x) = x^x$.

Nous pouvons écrire $f(x) = \mathrm{e}^{x\ln x}$. La fonction f, définie sur $D =]0\,;+\infty[$, est continue et dérivable sur D avec, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$,

$$f'(x) = \mathrm{e}^{x\ln x}\left[1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right] = \mathrm{e}^{x\ln x}\big[\ln x + 1\big].$$

Aux bornes de D :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 1 \quad \text{car} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x = 0\ ; \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{car} \quad \lim_{x\to+\infty} x\ln x = +\infty.$$

La fonction f est prolongeable en une fonction φ définie par

$$\varphi(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in]0\,;+\infty[,\ \varphi(x) = f(x).$$

Pour étudier la dérivabilité à droite en 0 de φ, considérons, pour $h > 0$:

$$\frac{\varphi(h)-\varphi(0)}{h} = \frac{\mathrm{e}^{h\ln h}-1}{h} = \frac{\mathrm{e}^{h\ln h}-1}{h\ln h}\cdot\ln h.$$

En posant $X = h\ln h$, et en remarquant que $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} h\ln h = 0$, nous obtenons

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{\mathrm{e}^{h\ln h}-1}{h\ln h} = \lim_{X\to 0}\frac{\mathrm{e}^X-1}{X} = 1,$$

dont nous déduisons, puisque $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \ln h = -\infty$,

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{\varphi(h)-\varphi(0)}{h} = -\infty.$$

φ n'est donc pas dérivable à droite en 0. La courbe représentative admettra au point $(0\,;1)$ une tangente parallèle à $y'Oy$.

Étudions la branche infinie en considérant

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\mathrm{e}^{x\ln x}}{x} = \frac{\mathrm{e}^{x\ln x}}{x\ln x}\cdot\ln x.$$

En posant $X = x\ln x$ et en remarquant que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x = +\infty$, nous obtenons

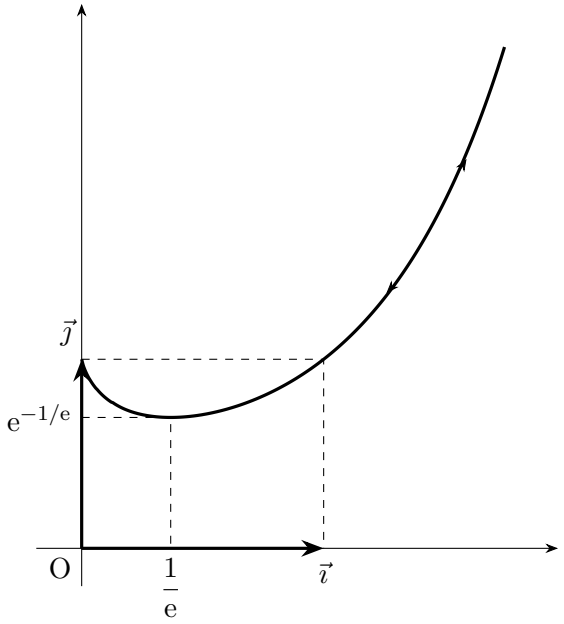
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{x\ln x}}{x\ln x} = \lim_{X\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty,$$

et, par conséquent, puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = +\infty.$$

La courbe représentative admet donc une branche parabolique de direction celle de $y'Oy$.

x	0		$\dfrac{1}{\mathrm{e}}$		$+\infty$
$\varphi'(x)$	$(-\infty)$	$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	1	$\searrow$	$\mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}}}$	$\nearrow$	$+\infty$



Thème 18 : Probabilités (2)

Sommaire

18.1 Dénombrement

18.2 Probabilités

18.3 Probabilité conditionnelle

18.4 Variables aléatoires

18.5 Schéma de Bernoulli et loi binomiale

18.6 Fonction de répartition

18.7 Exercices corrigés

Exercice 1

Exercice 2

Exercice 3

18.1 Dénombrement

Tirage successif avec remise

L'ordre compte et la répétition est possible :

$$n^p$$

Tirage successif sans remise (arrangements)

L'ordre compte et il n'y a pas de répétition :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Tirage simultané (combinaisons)

L'ordre ne compte pas et la répétition est impossible :

$$\binom{n}{p} = C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

18.2 Probabilités

- **Événement impossible** : $\varnothing$, avec $\mathrm{P}(\varnothing) = 0$.
- **Événement certain** : Ω, avec $\mathrm{P}(\Omega) = 1$.
- **Événements incompatibles (disjoints)** : $A \cap B = \varnothing$.

Propriétés. Pour tous événements A et B :

- $0 \leq \mathrm{P}(A) \leq 1$
- $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$
- $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$ si A et B sont incompatibles
- Événement contraire $\overline{A}$: $\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$

Cas d'équiprobabilité

Si toutes les issues élémentaires ont la même probabilité de se produire, la probabilité d'un événement A est donnée par :

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{\operatorname{card} A}{\operatorname{card} \Omega}$$

18.3 Probabilité conditionnelle

La probabilité que B se réalise sachant que A est déjà réalisé (avec $\mathrm{P}(A) \neq 0$) est notée $\mathrm{P}(B \,|\, A)$ ou $¶_A(B)$.

$$\mathrm{P}(B \,|\, A) = \frac{\mathrm{P}(B \cap A)}{\mathrm{P}(A)} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{P}(B \cap A) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B \,|\, A)$$

Probabilités totales

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des événements deux à deux disjoints dont la réunion forme l'univers Ω. Pour tout événement B :

$$\mathrm{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(B \cap A_i)$$

Indépendance

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si :

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B)$$

Si les probabilités ne sont pas nulles, cela équivaut à :

$$\mathrm{P}(B \,|\, A) = \mathrm{P}(B) \quad \text{ou} \quad \mathrm{P}(A \,|\, B) = \mathrm{P}(A)$$

18.4 Variables aléatoires

Une variable aléatoire X est une application qui associe un nombre réel à chaque issue de l'univers Ω.

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

a) Loi de probabilité

Définir la loi de probabilité de X, c'est associer à chaque valeur x_i sa probabilité $p_i = \mathrm{P}(X = x_i)$, telle que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

x_i	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
$\mathrm{P}(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n

$$p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n = 1$$

b) Espérance mathématique

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \,\mathrm{P}(X = x_i) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n$$

Lorsque X désigne le gain algébrique d'un joueur :

- $\mathrm{E}(X) = 0$: le jeu est équitable ;
- $\mathrm{E}(X) > 0$: le jeu est favorable au joueur ;
- $\mathrm{E}(X) < 0$: le jeu est défavorable au joueur.

c) Variance

La variance $\mathrm{V}(X)$ est toujours positive ou nulle.

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \big[\mathrm{E}(X)\big]^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \,\mathrm{P}(X = x_i) - \big[\mathrm{E}(X)\big]^2 = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \cdots + x_n^2 p_n - \big[\mathrm{E}(X)\big]^2$$

d) Écart-type

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{V}(X)}$$

Exemple

On considère la variable aléatoire X de loi :

x_i	0	1	2
$\mathrm{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

$$\sum_{i=1}^{3} p_i = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\mathrm{E}(X) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{4}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\mathrm{V}(X) = 0^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{1}{4} + 2^2 \times \frac{1}{2} - \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{4}{2} - \frac{25}{16} = \frac{4 + 32 - 25}{16} = \frac{11}{16}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{V}(X)} = \sqrt{\frac{11}{16}} = \frac{\sqrt{11}}{4}$$

18.5 Schéma de Bernoulli et loi binomiale

- **Épreuve de Bernoulli** : expérience aléatoire à deux issues, le succès de probabilité p et l'échec de probabilité $q = 1 - p$.
- **Schéma de Bernoulli** : répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.
- **Loi binomiale** : la variable aléatoire X comptant le nombre de succès obtenus au cours de n épreuves suit la loi binomiale de paramètres n et p, notée $\mathcal{B}(n\,;p)$, telle que, pour $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$:

$$\mathrm{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k \, q^{n-k}$$

Propriétés de la loi binomiale. $\mathrm{E}(X) = np$ et $\mathrm{V}(X) = np(1-p)$

Exemple

Une urne contient 10 jetons indiscernables au toucher :

- 3 jetons rouges numérotés : -1, 0, 1 ;
- 4 jetons noirs numérotés : 0, 1, 1, 2 ;
- 3 jetons verts numérotés : 0, 2, 2.

On tire simultanément et au hasard 3 jetons de l'urne.

1. Calculer la probabilité d'obtenir 3 jetons de couleurs différentes.

2. Soit X la variable aléatoire qui correspond au nombre de jetons portant le numéro 0 parmi les trois jetons tirés.

   a) Déterminer la loi de probabilité de X.

   b) Calculer son espérance mathématique $\mathrm{E}(X)$, sa variance $\mathrm{V}(X)$ et son écart-type $\sigma(X)$.

Correction

Le tirage étant simultané, $\operatorname{card}\Omega = \binom{10}{3} = 120$.

1. Il faut tirer un jeton de chaque couleur :

$$\mathrm{P} = \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{3\times 4\times 3}{120} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$$

2. a) Trois jetons portent le numéro 0 et sept ne le portent pas. X prend les valeurs 0, 1, 2, 3 et

$$\mathrm{P}(X=k) = \frac{\binom{3}{k}\binom{7}{3-k}}{\binom{10}{3}}$$

x_i	0	1	2	3
$\mathrm{P}(X=x_i)$	$\frac{35}{120} = \frac{7}{24}$	$\frac{63}{120} = \frac{21}{40}$	$\frac{21}{120} = \frac{7}{40}$	$\frac{1}{120}$

b)

$$\mathrm{E}(X) = 0\times\frac{35}{120} + 1\times\frac{63}{120} + 2\times\frac{21}{120} + 3\times\frac{1}{120} = \frac{108}{120} = \frac{9}{10}$$

$$\mathrm{V}(X) = \frac{0\times 35 + 1\times 63 + 4\times 21 + 9\times 1}{120} - \left(\frac{9}{10}\right)^2 = \frac{156}{120} - \frac{81}{100} = \frac{13}{10} - \frac{81}{100} = \frac{49}{100}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{49}{100}} = \frac{7}{10}$$

18.6 Fonction de répartition

La fonction de répartition F d'une variable aléatoire X est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \mathrm{P}(X \leq x)$$

Soit $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, où les x_i sont rangés dans l'ordre croissant, avec les probabilités associées $p_i = \mathrm{P}(X = x_i)$.

Expression par intervalles

- Si $x < x_1$: $F(x) = 0$.
- Si $x \in [x_i\,;x_{i+1}[$: $F(x) = p_1 + p_2 + \cdots + p_i$.
- Si $x \geq x_n$: $F(x) = 1$.

Propriétés. Pour toute fonction de répartition F :

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq F(x) \leq 1$;
- F est croissante sur $\mathbb{R}$;
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$;
- pour tous réels $a < b$: $\mathrm{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$.

Méthode pour tracer $F(x)$: exemple

Une urne contient 5 boules indiscernables au toucher : 3 vertes et 2 rouges. On tire simultanément 2 boules de l'urne. X est la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes obtenues.

1. Loi de probabilité de X

$X(\Omega) = \{0\,;1\,;2\}$ et $\operatorname{card}\Omega = \binom{5}{2} = 10$.

Obtenir 0 boule verte : $\mathrm{P}(X=0) = \dfrac{\binom{3}{0}\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \dfrac{1}{10}$

Obtenir 1 boule verte : $\mathrm{P}(X=1) = \dfrac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$

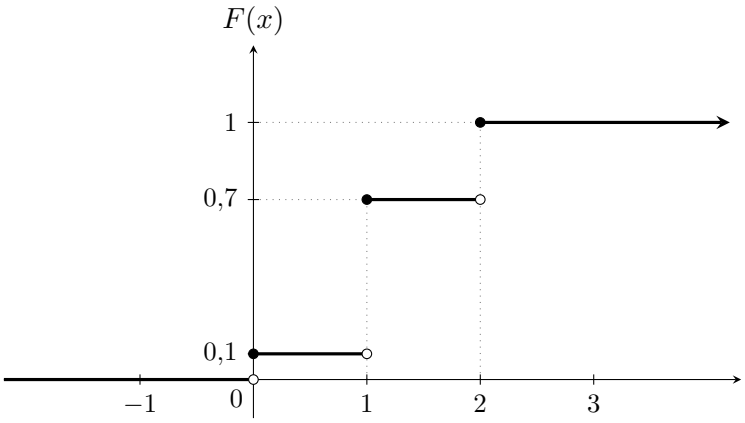
Obtenir 2 boules vertes : $\mathrm{P}(X=2) = \dfrac{\binom{3}{2}\binom{2}{0}}{\binom{5}{2}} = \dfrac{3}{10}$

2. Construction de $F(x)$

- Si $x \in]-\infty\,;0[$: $F(x) = 0$, car il n'y a pas de nombre négatif de boules.
- Si $x \in [0\,;1[$: $F(x) = \mathrm{P}(X=0) = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$.
- Si $x \in [1\,;2[$: on a $X \leq x$ dès que $(X=0)$ ou $(X=1)$, donc $F(x) = \mathrm{P}(X=0) + \mathrm{P}(X=1) = \dfrac{1}{10} + \dfrac{6}{10} = \dfrac{7}{10} = 0{,}7$.
- Si $x \in [2\,;+\infty[$: $F(x) = \mathrm{P}(X=0) + \mathrm{P}(X=1) + \mathrm{P}(X=2) = \dfrac{1}{10} + \dfrac{6}{10} + \dfrac{3}{10} = 1$.

F est donc définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 0{,}1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0{,}7 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$



18.7 Exercices corrigés

Exercice 1

On lance deux fois de suite un dé cubique et on note S la somme des deux nombres obtenus.

Si $S \leq 5$, on gagne 1 F ; si $6 \leq S \leq 10$, on gagne 4 F ; et si $S > 10$, on gagne 10 F.

Soit X la variable aléatoire associant à chaque partie le gain obtenu. Déterminer la loi de probabilité de X, puis calculer son espérance mathématique, sa variance et son écart-type.

Correction

L'univers Ω compte $6 \times 6 = 36$ issues équiprobables. X prend les valeurs 1, 4 et 10.

- $(X = 1)$: $S \in \{2, 3, 4, 5\}$, ce qui correspond à $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ issues.
- $(X = 10)$: $S \in \{11, 12\}$, ce qui correspond à $2 + 1 = 3$ issues.
- $(X = 4)$: $36 - 10 - 3 = 23$ issues.

x_i	1	4	10
$\mathrm{P}(X = x_i)$	$\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$	$\frac{23}{36}$	$\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

$$\mathrm{E}(X) = 1 \times \frac{10}{36} + 4 \times \frac{23}{36} + 10 \times \frac{3}{36} = \frac{10 + 92 + 30}{36} = \frac{132}{36} = \frac{11}{3}$$

$$\mathrm{V}(X) = \frac{1^2 \times 10 + 4^2 \times 23 + 10^2 \times 3}{36} - \left(\frac{11}{3}\right)^2 = \frac{678}{36} - \frac{121}{9} = \frac{113}{6} - \frac{121}{9} = \frac{339 - 242}{18} = \frac{97}{18}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{97}{18}} = \frac{\sqrt{194}}{6} \approx 2{,}32$$

Exercice 2

Pour prévenir l'extension d'une certaine maladie, on vaccine 60 % d'une population à risques. Le vaccin n'étant pas totalement infaillible, 10 % des personnes vaccinées attrapent la maladie. En revanche, 30 % des individus non vaccinés ne sont pas malades.

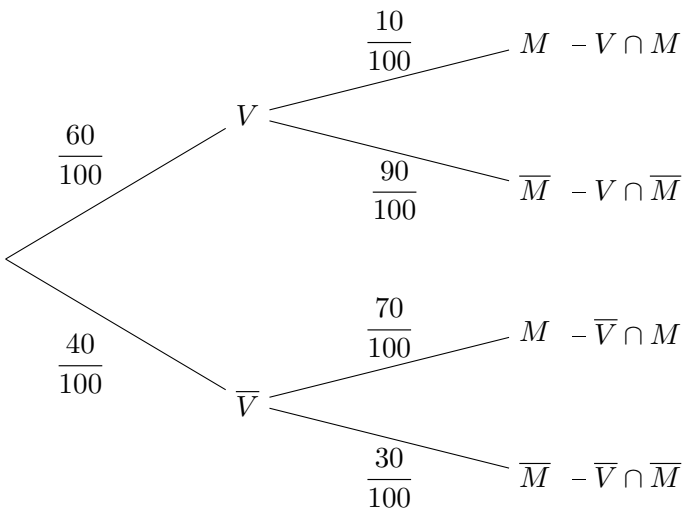
1° a) On choisit une personne au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle soit malade et vaccinée ? Malade et non vaccinée ?

b) En déduire la probabilité pour un individu de contracter la maladie. (On pourra remarquer que $M = (V \cap M) \cup (\overline{V} \cap M)$.)

2° Calculer la probabilité qu'un individu bien portant soit vacciné.

Correction

Notons V : « la personne est vaccinée » et M : « la personne est malade ».



1° a) Probabilité qu'une personne soit malade et vaccinée :

$$\mathrm{P}(V \cap M) = \frac{60}{100} \times \frac{10}{100} = \frac{6}{100} = \frac{3}{50}$$

Probabilité qu'une personne soit malade et non vaccinée :

$$\mathrm{P}(\overline{V} \cap M) = \frac{40}{100} \times \frac{70}{100} = \frac{28}{100} = \frac{7}{25}$$

b) Comme $M = (V \cap M) \cup (\overline{V} \cap M)$, avec $V \cap M$ et $\overline{V} \cap M$ incompatibles :

$$\mathrm{P}(M) = \mathrm{P}(V \cap M) + \mathrm{P}(\overline{V} \cap M) = \frac{6}{100} + \frac{28}{100} = \frac{34}{100} = \frac{17}{50}$$

2° On cherche $\mathrm{P}(V \,|\, \overline{M}) = \dfrac{\mathrm{P}(V \cap \overline{M})}{\mathrm{P}(\overline{M})}$.

$$\mathrm{P}(\overline{M}) = 1 - \mathrm{P}(M) = 1 - \frac{34}{100} = \frac{66}{100} = \frac{33}{50} \qquad \mathrm{P}(V \cap \overline{M}) = \frac{60}{100} \times \frac{90}{100} = \frac{54}{100} = \frac{27}{50}$$

$$\mathrm{P}(V \,|\, \overline{M}) = \frac{\frac{27}{50}}{\frac{33}{50}} = \frac{27}{50} \times \frac{50}{33} = \frac{27}{33} = \frac{9}{11}$$

Exercice 3

Une entreprise possède 50 ordinateurs. La probabilité qu'un ordinateur tombe en panne est de 0,01. On suppose que le fonctionnement d'un ordinateur est indépendant de celui des autres.

1. Calculer la probabilité qu'aucun ordinateur ne tombe en panne.
2. Calculer la probabilité que 5 ordinateurs soient en panne.

3. Calculer la probabilité de l'événement E : « au moins 1 ordinateur est en panne ».
4. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre d'ordinateurs en panne parmi les 50.
   a) Que signifie $\mathrm{P}(X = 3)$?
   b) Calculer $\mathrm{P}(X = 3)$.
5. Calculer $\mathrm{E}(X)$ et interpréter ce résultat.

Correction

X prend ses valeurs dans $\{0, 1, 2, \ldots, 50\}$. On répète 50 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, le succès étant « l'ordinateur tombe en panne », de probabilité $p = 0{,}01$; l'échec a pour probabilité $q = 1 - p = 0{,}99$. Donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(50\,;0{,}01)$.

1.
$$\mathrm{P}(X = 0) = \binom{50}{0}(0{,}01)^0(1 - 0{,}01)^{50-0} = (0{,}99)^{50} \approx 0{,}605$$

2.
$$\mathrm{P}(X = 5) = \binom{50}{5}(0{,}01)^5(1 - 0{,}01)^{50-5} = \binom{50}{5}(0{,}01)^5(0{,}99)^{45} \approx 1{,}35 \times 10^{-4}$$

3. L'événement contraire de « au moins 1 ordinateur est en panne » est « aucun ordinateur n'est en panne » :
$$\mathrm{P}(E) = 1 - \mathrm{P}(X = 0) \approx 1 - 0{,}605 = 0{,}395$$

4. a) $\mathrm{P}(X = 3)$ est la probabilité que exactement 3 ordinateurs tombent en panne parmi les 50.

b)
$$\mathrm{P}(X = 3) = \binom{50}{3}(0{,}01)^3(1 - 0{,}01)^{50-3} = \binom{50}{3}(0{,}01)^3(0{,}99)^{47} \approx 0{,}012$$

5.
$$\mathrm{E}(X) = np = 50 \times 0{,}01 = 0{,}5$$

En moyenne, 0,5 ordinateur est en panne parmi les 50.

Thème 19 : Statistiques à deux variables réelles

Sommaire

19.1 Présentation

19.2 La méthode de Mayer

19.3 La méthode des moindres carrés

19.4 Ajustement exponentiel

Exercices

Problème

Exercices corrigés

19.1 Présentation

En statistiques à deux variables, l'**ajustement affine** consiste à trouver une relation mathématique simple entre deux caractéristiques mesurables.

Série statistique

x_i	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
y_i	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_n

Le nuage de points

Lorsqu'on étudie deux variables, on place chaque couple de données $(x_i\,;\,y_i)$, avec $1 \leq i \leq n$, dans un repère orthogonal ; cela forme un **nuage de points**.

- Si le nuage a une forme allongée, les points semblent s'aligner le long d'une droite.
- On cherche alors à tracer une droite qui passe « au plus près » de tous ces points : c'est la **droite d'ajustement**, d'équation $y = ax + b$, avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.

Le point moyen

Le **point moyen**, noté G, est le centre de gravité du nuage de points : $G(\bar{x}\,;\,\bar{y})$ avec

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_n}{n}$$

19.2 La méthode de Mayer

Pour un nuage de points, elle consiste à diviser la série en deux sous-séries d'effectifs égaux (ou différant d'une unité lorsque l'effectif total est impair) afin de calculer deux points moyens $G_1(x_1\,;\,y_1)$ et $G_2(x_2\,;\,y_2)$. La droite d'ajustement est la droite (G_1G_2) : $y = ax + b$ avec

$$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \qquad \text{et} \qquad b=y_1-ax_1$$

Exemple 1

Soit la série :

x	1	2	3	4
y	2	3	5	6

Point moyen $G(\bar{x}\,;\,\bar{y})$:

$$\bar{x}=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}x_i=\frac{1+2+3+4}{4}=\frac{10}{4}=2{,}5$$

$$\bar{y}=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}y_i=\frac{2+3+5+6}{4}=\frac{16}{4}=4$$

$$G(2{,}5\,;\,4)$$

Équation de la droite d'ajustement par la méthode de Mayer

Premier groupe G_1 :

x	1	2
y	2	3

$$x_1=\frac{1+2}{2}=1{,}5 \qquad y_1=\frac{2+3}{2}=2{,}5 \qquad G_1(1{,}5\,;\,2{,}5)$$

Deuxième groupe G_2 :

x	3	4
y	5	6

$$x_2=\frac{3+4}{2}=3{,}5 \qquad y_2=\frac{5+6}{2}=5{,}5 \qquad G_2(3{,}5\,;\,5{,}5)$$

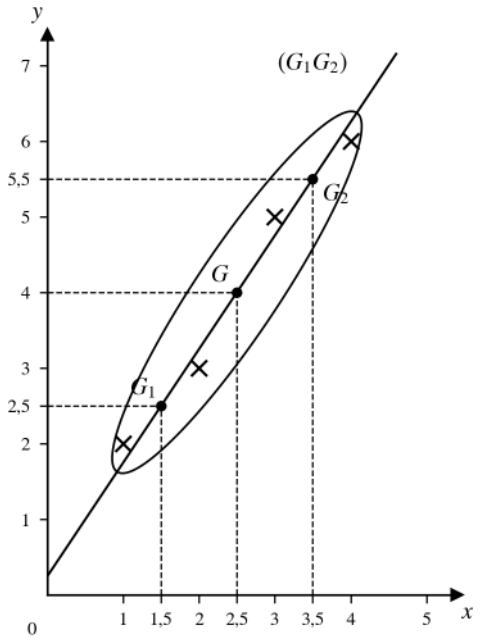
La droite d'ajustement passe par G_1 et G_2 :

$$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{5{,}5-2{,}5}{3{,}5-1{,}5}=1{,}5$$

$$b=y_1-ax_1=2{,}5-1{,}5\times 1{,}5=0{,}25$$

$$\text{donc} \quad (G_1G_2):\ y=1{,}5x+0{,}25$$

Construction du nuage de points. Échelle : en abscisse, 1 unité = 1 cm ; en ordonnée, 1 unité = 1 cm.



Exemple 2 (effectif total impair)

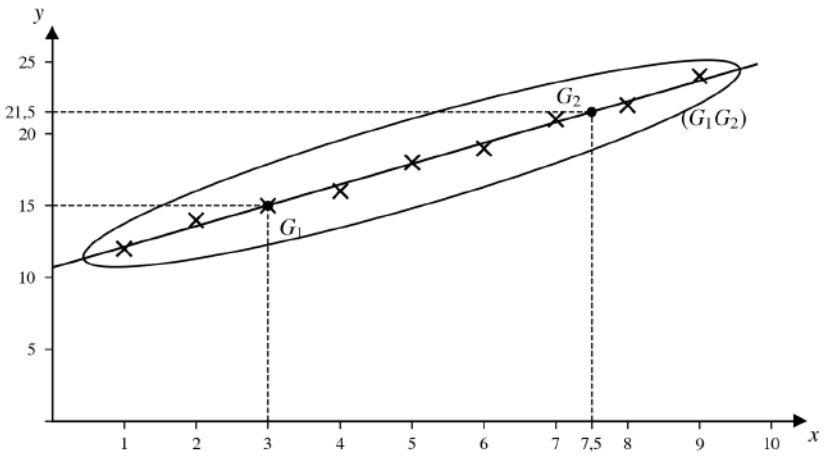
On relève l'évolution du chiffre d'affaires d'une entreprise, en millions.

année (x)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
C.A. en millions	12	14	15	16	18	19	21	22	24

- Construire le nuage de points.
- Déterminer l'équation de la droite d'ajustement affine par la méthode de Mayer.

Échelle : en abscisse, 1 unité = 1 cm ; en ordonnée, 5 unités = 1 cm.

ordonnée y	12	14	15	16	18	19	21	22	24
longueur (cm)	2,4	2,8	3	3,2	3,6	3,8	4,2	4,4	4,8



Effectif impair ($n = 9$) : premier groupe de 5 points, second groupe de 4 points.

Premier groupe G_1 ($n = 5$) :

x	1	2	3	4	5
y	12	14	15	16	18

$$x_1 = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3 \qquad y_1 = \frac{12+14+15+16+18}{5} = \frac{75}{5} = 15 \qquad G_1(3\,;\,15)$$

Deuxième groupe G_2 $(n = 4)$:

x	6	7	8	9
y	19	21	22	24

$$x_2 = \frac{6+7+8+9}{4} = 7{,}5 \qquad y_2 = \frac{19+21+22+24}{4} = \frac{86}{4} = 21{,}5 \qquad G_2(7{,}5\,;\,21{,}5)$$

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{21{,}5 - 15}{7{,}5 - 3} = \frac{13}{9} \approx 1{,}444$$

$$b = y_1 - a\,x_1 = 15 - \frac{13}{9} \times 3 = \frac{32}{3} \approx 10{,}667$$

$$(G_1G_2) :\ y \approx 1{,}444\,x + 10{,}667$$

19.3 La méthode des moindres carrés

C'est la méthode la plus précise et la plus utilisée pour trouver l'équation de la droite $y = ax + b$. Elle rend minimale la somme des carrés des écarts verticaux entre les points réels et la droite. La droite des moindres carrés passe par $G(\bar{x}\,;\,\bar{y})$, donc son ordonnée à l'origine est $b = \bar{y} - a\,\bar{x}$.

La covariance

On appelle **covariance** de la série statistique double des variables x et y le nombre réel :

$$\mathrm{Cov}(x\,;\,y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i - \bar{x}\,\bar{y}$$

La variance et l'écart-type

La variance de x est $V(x) = \mathrm{Cov}(x\,;\,x)$; celle de y est $V(y) = \mathrm{Cov}(y\,;\,y)$:

$$V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \bar{x}^2$$

$$V(y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i^2 - \bar{y}^2$$

L'écart-type σ (lire « sigma ») est la racine carrée de la variance :

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} \qquad \sigma(y) = \sqrt{V(y)}$$

Droites de régression

La **droite de régression de** y **en** x a pour équation $y = ax + b$ avec

$$a = \frac{\text{Cov}(x\,;\,y)}{V(x)} \quad \text{et} \quad b = \bar{y} - a\bar{x}$$

La **droite de régression de** x **en** y a pour équation $x = a'y + b'$ avec

$$a' = \frac{\text{Cov}(x\,;\,y)}{V(y)} \quad \text{et} \quad b' = \bar{x} - a'\bar{y}$$

Le coefficient de corrélation linéaire

$$r = \frac{\text{Cov}(x\,;\,y)}{\sqrt{V(x)} \times \sqrt{V(y)}}$$

Ce coefficient sert à mesurer la qualité d'un ajustement affine. Il vérifie $-1 \leq r \leq 1$. Plus $|r|$ est proche de 1, plus l'ajustement affine est justifié. Si $r = \pm 1$, la droite de régression passe par tous les points du nuage, qui sont alors alignés.

Exemple

Utiliser les formules pour calculer l'équation de la droite de régression de y en x et le coefficient de corrélation linéaire r.

x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	y_i^2
1	3	$1 \times 3 = 3$	$1^2 = 1$	$3^2 = 9$
3	5	$3 \times 5 = 15$	$3^2 = 9$	$5^2 = 25$
5	6	$5 \times 6 = 30$	$5^2 = 25$	$6^2 = 36$
Total	9	48	35	70

On obtient :

$$\bar{x} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} x_i = \frac{9}{3} = 3 \qquad \bar{y} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} y_i = \frac{14}{3} \qquad G\left(3\,;\,\frac{14}{3}\right)$$

$$\text{Cov}(x\,;\,y) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} x_i y_i - \bar{x}\bar{y} = \frac{48}{3} - 3 \times \frac{14}{3} = 2$$

$$V(x) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{35}{3} - 3^2 = \frac{8}{3}$$

$$a = \frac{\text{Cov}(x\,;\,y)}{V(x)} = \frac{2}{8/3} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = \frac{14}{3} - \frac{3}{4} \times 3 = \frac{14}{3} - \frac{9}{4} = \frac{29}{12}$$

L'équation de la droite de régression de y en x est donc :

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{29}{12}$$

Coefficient de corrélation linéaire r :

$$V(y) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} y_i^2 - \bar{y}^2 = \frac{70}{3} - \left(\frac{14}{3}\right)^2 = \frac{14}{9}$$

$$r = \frac{\text{Cov}(x\,;\,y)}{\sqrt{V(x)} \times \sqrt{V(y)}} = \frac{2}{\sqrt{8/3} \times \sqrt{14/9}} \approx 0{,}98$$

19.4 Ajustement exponentiel

Lorsque l'ajustement affine ne convient pas, l'ajustement exponentiel permet de déterminer un ajustement plus juste. On pose $z = \ln y$ et on effectue un ajustement affine de z en x. Si $z = ax + b$, alors :

$$y = e^{ax+b} = e^b \times (e^a)^x$$

Exemple 1

Soit la série :

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	70	90	115	140	170	220

x_i	1	2	3	4	5	6
$z_i = \ln y_i$	4,248	4,500	4,745	4,942	5,136	5,394

Équation de la droite de régression de z en x par la méthode des moindres carrés, à partir des couples $(x_i\,;\,z_i)$:

$$(d):\ z = 0{,}224\,x + 4{,}044$$

Comme $z = \ln y$, on obtient :

$$\ln y = 0{,}224\,x + 4{,}044$$

$$y = e^{0{,}224\,x + 4{,}044} = (e^{0{,}224})^x \times e^{4{,}044}$$

$$y \approx 57{,}054 \times (1{,}251)^x$$

Exemple 2

Soit la série statistique :

x_i	1	2	3	4	5
y_i	43	33,6	24,75	19,7	14,7

Déterminons l'équation de la droite de régression par la méthode des moindres carrés et le coefficient de corrélation linéaire, puis un ajustement exponentiel. On construit le nuage de points associé à la série en choisissant une échelle convenable.

Ajustement affine de y **en** x

$$\bar{x}=3 \qquad \bar{y}=\frac{43+33{,}6+24{,}75+19{,}7+14{,}7}{5}=27{,}15 \qquad G(3\,;\,27{,}15)$$

$$\mathrm{Cov}(x\,;\,y)=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-\bar{x}\,\bar{y}=\frac{336{,}75}{5}-3\times 27{,}15=-14{,}1$$

$$V(x)=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}x_i^2-\bar{x}^2=\frac{55}{5}-3^2=2$$

$$a=\frac{\mathrm{Cov}(x\,;\,y)}{V(x)}=\frac{-14{,}1}{2}=-7{,}05$$

$$b=\bar{y}-a\,\bar{x}=27{,}15-(-7{,}05)\times 3=48{,}3$$

$$y=-7{,}05\,x+48{,}3$$

Coefficient de corrélation linéaire r

$$V(y)=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}y_i^2-\bar{y}^2=838{,}9405-(27{,}15)^2=101{,}818$$

$$r=\frac{\mathrm{Cov}(x\,;\,y)}{\sqrt{V(x)}\times\sqrt{V(y)}}=\frac{-14{,}1}{\sqrt{2}\times\sqrt{101{,}818}}\approx -0{,}99 \qquad r\in[-1\,;\,1]$$

Ajustement exponentiel de la série, $z_i=\ln y_i$:

x_i	1	2	3	4	5
$z_i=\ln y_i$	3,761	3,515	3,209	2,981	2,688

$$z=ax+b \qquad a=\frac{\mathrm{Cov}(x\,;\,z)}{V(x)} \qquad b=\bar{z}-a\,\bar{x}$$

$$\bar{z}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}z_i=\frac{16{,}154}{5}\approx 3{,}231$$

$$\mathrm{Cov}(x\,;\,z)=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}x_iz_i-\bar{x}\,\bar{z}=\frac{45{,}782}{5}-3\times 3{,}231\approx -0{,}536$$

$$a=\frac{-0{,}536}{2}=-0{,}268 \qquad b=\bar{z}-a\,\bar{x}\approx 3{,}231+0{,}268\times 3\approx 4{,}035$$

$$z=-0{,}268\,x+4{,}035$$

Coefficient de corrélation linéaire :

$$V(z)=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}z_i^2-\bar{z}^2\approx 0{,}144$$

$$r=\frac{\mathrm{Cov}(x\,;\,z)}{\sqrt{V(x)}\times\sqrt{V(z)}}=\frac{-0{,}536}{\sqrt{2}\times\sqrt{0{,}144}}\approx -0{,}999$$

Calculons z pour $x=6$:

$$z=-0{,}268\times 6+4{,}035=2{,}427$$

Comme $z=\ln y$, on a $y=e^z$:

$$y = e^{-0{,}268x+4{,}035} = (e^{-0{,}268})^x \times e^{4{,}035} \approx 56{,}54 \times (0{,}765)^x$$

$$\text{Pour } x = 6 : \quad y = e^{2{,}427} \approx 11{,}32$$

Exercices

Exercice 1

Une entreprise souhaite faire des prévisions sur son chiffre d'affaires. Les résultats seront exprimés au centième près.

x_i (années)	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i (C.A. en millions d'€)	15	18	20	22	25	27	29	32

1) Construire le nuage de points de la série.
2) Déterminer les points moyens G_1 et G_2.
3) Déterminer l'équation de la droite d'ajustement affine par la méthode de Mayer.
4) Tracer la droite de Mayer.

Exercice 2

Soit la série statistique :

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	2	3	5	4	6	8	9

Déterminer l'équation de la droite d'ajustement affine par la méthode de Mayer.

Exercice 3

Un magasin de sport étudie ses dépenses en publicité (x, en centaines d'euros) et son chiffre d'affaires (y, en millions d'euros) sur 6 mois.

mois	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6
x_i (pub)	2	4	6	8	10	12
y_i (C.A.)	15	22	28	32	40	43

1) Construire le nuage de points associé à cette série. Choisir une échelle convenable.
2) Déterminer les coordonnées du point moyen G.
3) Trouver l'équation de la droite de Mayer et tracer cette droite.
4) Estimer le chiffre d'affaires du magasin s'il dépense 15 centaines d'euros en publicité.

Problème

Le tableau suivant présente l'évolution du chiffre d'affaires y_i (en millions) d'une start-up de services numériques depuis sa création en 2018.

Année	2018	2019	2020	2021	2022	2023
Rang x_i	1	2	3	4	5	6
C.A. y_i	120	155	210	280	390	530

Partie A

1) Représenter le nuage de points $M_i(x_i\,;\,y_i)$ dans un repère orthogonal.
2) Déterminer l'équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés. Retrouver cette équation à l'aide de la calculatrice.
3) Selon ce modèle, quel serait le chiffre d'affaires pour l'année 2026 ?

Partie B

On souhaite affiner ce modèle, car la croissance semble s'accélérer. On pose $z_i = \ln y_i$.

1) Compléter le tableau ci-dessous en arrondissant les z_i au millième près.

x_i	1	2	3	4	5	6
$z_i = \ln y_i$	4,787					

2) Déterminer l'équation de la droite de régression de z en x, sous la forme $z = \alpha x + \beta$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
3) En déduire une expression de y en fonction de x de la forme $y = A\,e^{Bx}$, avec $A, B \in \mathbb{R}$.
4) Avec ce nouveau modèle, donner le chiffre d'affaires en 2026.
5) Lequel des deux ajustements est le plus pertinent au regard des données ?

Exercices corrigés

Exercice 4

Le mur d'une habitation est constitué d'une couche de béton et d'une couche de polystyrène d'épaisseur variable x (en cm). On a mesuré la résistance thermique y de ce mur pour diverses valeurs de x, et on a obtenu :

x_i	2	4	6	8	10	12	15	20
y_i	0,83	1,34	1,63	2,29	2,44	2,93	4,06	4,48

1°) Calculer les coordonnées du point moyen G.

2°) Déterminer, par la méthode de Mayer, une équation de la droite d'ajustement affine de la forme $y = ax + b$.

3°) Déterminer, par la méthode des moindres carrés, l'équation $y = a'x + b'$ de la droite de régression de y en x.

4°) En admettant que l'évolution constatée se poursuive, quelle résistance thermique peut-on espérer obtenir avec une couche de polystyrène de 25 cm ? Utiliser les deux ajustements précédents et donner deux estimations possibles.

Corrigé

1°) Point moyen :

$$\bar{x} = \frac{77}{8} = 9{,}625 \qquad \bar{y} = \frac{20}{8} = 2{,}5 \qquad G(9{,}625\,;\,2{,}5)$$

2°) Méthode de Mayer : on forme deux groupes de quatre points.

$$G_1(5\,;\,1{,}5225) \quad \text{(quatre premiers points)}$$
$$G_2(14{,}25\,;\,3{,}4775) \quad \text{(quatre derniers points)}$$
$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3{,}4775 - 1{,}5225}{14{,}25 - 5} \approx 0{,}211$$
$$b = y_1 - a\,x_1 \approx 0{,}466$$
$$y = 0{,}211\,x + 0{,}466$$

3°) Méthode des moindres carrés :

$$\text{Cov}(x\,;\,y) \approx 6{,}585 \qquad V(x) \approx 30{,}984$$
$$a' = \frac{\text{Cov}(x\,;\,y)}{V(x)} \approx 0{,}213 \qquad b' = \bar{y} - a'\,\bar{x} \approx 0{,}454$$
$$y = 0{,}213\,x + 0{,}454$$

4°) Pour $x = 25$ cm, en conservant les valeurs exactes des coefficients :

- avec l'ajustement de Mayer : $y \approx 5{,}75$;
- avec l'ajustement des moindres carrés : $y \approx 5{,}77$.

Exercice 5

Tous les résultats seront donnés à 10^{-3} près. Le tableau donne l'évolution du pourcentage de logiciels piratés en France de 1990 à 1999. On désigne par x le rang de l'année et par y le pourcentage de logiciels piratés.

Année	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
Rang x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Pourcentage y_i	85	78	73	66	57	51	47	44	43	37

1°) Représenter par un nuage de points $M_i(x_i\,;\,y_i)$ la série statistique.

2°) a) Calculer le coefficient de corrélation r_1 entre x et y (aucun détail des calculs statistiques n'est demandé). Un ajustement affine est-il justifié ?

b) Calculer les coordonnées du point moyen G.

c) Déterminer, par la méthode de Mayer, une équation de la droite d'ajustement affine de la forme $y = ax + b$.

d) Estimer, en utilisant cet ajustement affine, le pourcentage de logiciels piratés en 2010. Comment interpréter ce résultat ?

3°) L'allure du nuage permet d'envisager un ajustement exponentiel. On pose $z = \ln y$ (aucun détail des calculs statistiques n'est demandé).

a) Compléter le tableau :

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$z_i = \ln y_i$										

b) Calculer le coefficient de corrélation r_2 entre x et z. Le comparer avec r_1.

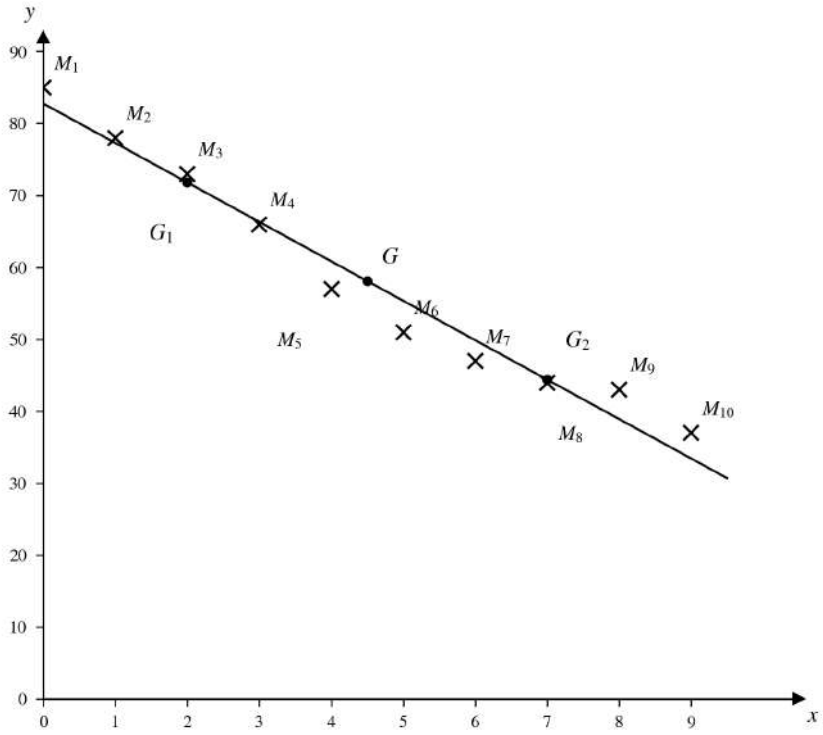
c) Déterminer, par la méthode des moindres carrés, l'équation $z = ax + b$ de la droite de régression de z en x.

d) En déduire une relation liant y et x de la forme $y = k\,e^{\alpha x}$.

e) Estimer à nouveau, en utilisant cet ajustement, le pourcentage de logiciels piratés en 2010.

Corrigé

1°) Nuage de points, points moyens et droite de Mayer :



2°) a) $r_1 \approx -0{,}984$. Comme $|r_1|$ est proche de 1, l'ajustement affine est justifié.

b) $G(\bar{x}\,;\,\bar{y})$ avec $\bar{x} = 4{,}5$ et $\bar{y} = 58{,}1$, donc $G(4{,}5\,;\,58{,}1)$.

c) On considère le nuage constitué des cinq premiers points, puis celui des cinq derniers points :

$$G_1(2\,;\,71{,}8) \qquad G_2(7\,;\,44{,}4)$$

$$\overrightarrow{G_1G_2}\begin{pmatrix}5\\-27{,}4\end{pmatrix}$$

$M(x\,;\,y) \in (G_1G_2)$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{G_1M}$ et $\overrightarrow{G_1G_2}$ sont colinéaires, c'est-à-dire si et seulement si $\det\left(\overrightarrow{G_1M}, \overrightarrow{G_1G_2}\right) = 0$:

$$-27{,}4\,(x-2) - 5\,(y-71{,}8) = 0$$
$$-27{,}4\,x - 5\,y + 54{,}8 + 359 = 0$$
$$-27{,}4\,x - 5\,y + 413{,}8 = 0$$
$$y = -5{,}48\,x + 82{,}76$$

d) En 2010, $x = 20$:

$$y = -5{,}48 \times 20 + 82{,}76 \approx -26{,}84$$

Ce résultat est incohérent (un pourcentage ne peut pas être négatif) : l'ajustement affine n'est donc pas le modèle idéal.

3°) a)

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$z_i = \ln y_i$	4,443	4,357	4,290	4,190	4,043	3,932	3,850	3,784	3,761	3,611

b) $r_2 \approx -0{,}993$: ce coefficient est plus proche de -1 que r_1.

c) $z = -0{,}093\,x + 4{,}444$.

d) $z = ax + b \iff \ln y = ax + b \iff y = e^{ax+b} = e^b\, e^{ax}$, donc

$$y \approx 85{,}095\, e^{-0{,}093\,x}$$

e) En utilisant cet ajustement exponentiel, le pourcentage de logiciels piratés en 2010 serait :

$$y \approx 85{,}095\, e^{-0{,}093 \times 20} \approx 13{,}295$$

Thème 20 : Applications affines - Similitudes

Sommaire

I Applications affines **2**
- I.1 Définition 2
- I.2 Propriétés 2
- I.3 Exemples 2
- I.4 Exercices 3
  - Exercice 1 3
  - Exercice 2 4
  - Exercice 3 4
  - Exercice 4 5
  - Exercice 5 6
  - Exercice 6 7

II Similitudes planes **10**
- II.1 Similitudes directes du plan 10
- II.2 Propriétés 10
- II.3 Cas particuliers et forme réduite 11
- II.4 Composée de deux similitudes directes 11
- II.5 Exercices 12
  - Exercice 7 12
  - Exercice 8 12
  - Exercice 9 12
  - Exercice 10 13
  - Exercice 11 13

I. Applications affines

I.1. Définition

Application affine

On appelle *application affine* toute application du plan qui conserve le barycentre et le coefficient de colinéarité.
Une application f du plan est une application affine s'il existe une application linéaire φ du plan vectoriel $\mathcal{V}$ telle que, pour tous points A et B du plan affine :

$$\overrightarrow{f(A)f(B)} = \varphi\left(\overrightarrow{AB}\right).$$

φ est l'application linéaire associée à l'application affine f.

Soit $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ qui conserve le coefficient de colinéarité, et G le barycentre de (A, α) et (B, β) tels que $\alpha + \beta \neq 0$. On a

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB} \qquad \text{donc} \qquad \overrightarrow{f(A)f(G)} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{f(A)f(B)}.$$

Ainsi $f(G)$ est le barycentre des points $(f(A), \alpha)$ et $(f(B), \beta)$.

I.2. Propriétés

Propriétés

Soit f une application affine du plan et φ l'application linéaire (vectorielle) associée à f. Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ de $\mathcal{V}$ et pour tous réels α et β :

$$\varphi(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha\,\varphi(\vec{u}) + \beta\,\varphi(\vec{v}).$$

- Une application affine est bijective si elle transforme un repère du plan en un repère du plan.
- Deux applications affines sont égales si elles coïncident en trois points non alignés du plan.
- L'expression analytique d'une application affine du plan est de la forme

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$$

I.3. Exemples

Exemple 1 : application linéaire

Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des vecteurs du plan et $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ telle que $\varphi(\vec{u}) = k\vec{u}$, $k \in \mathbb{R}^*$. Pour tous $\vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{V}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(\vec{a}+\vec{b}) = k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b} = \varphi(\vec{a}) + \varphi(\vec{b}), \qquad \varphi(\lambda\vec{a}) = k\lambda\vec{a} = \lambda\varphi(\vec{a}).$$

Donc φ est une application linéaire.

Exemple 2 : détermination d'une application affine

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit f l'application affine telle que $A(3;2)$,

$B(1;1)$, $C(0;1)$ aient pour images $A'(6;6)$, $B'(3;3)$, $C'(2;1)$. Soit $M(x;y) \mapsto M'(x';y')$ et φ l'application linéaire associée à f.

On a $\overrightarrow{AB}(-2;-1)$, $\overrightarrow{A'B'}(-3;-3)$, $\overrightarrow{AC}(-3;-1)$, $\overrightarrow{A'C'}(-4;-5)$.

$$\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'} \ : \ -2\varphi(\vec{\imath}) - \varphi(\vec{\jmath}) = -3\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} \quad (1)$$

$$\varphi(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{A'C'} \ : \ -3\varphi(\vec{\imath}) - \varphi(\vec{\jmath}) = -4\vec{\imath} - 5\vec{\jmath} \quad (2)$$

$(1) - (2)$ donne $\varphi(\vec{\imath}) = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$. En remplaçant dans (1) : $\varphi(\vec{\jmath}) = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$.

$\varphi(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{A'M'}$ avec $\overrightarrow{AM}(x-3;y-2)$ et $\overrightarrow{A'M'}(x'-6;y'-6)$:

$$(x-3)(\vec{\imath}+2\vec{\jmath}) + (y-2)(\vec{\imath}-\vec{\jmath}) = (x'-6)\vec{\imath} + (y'-6)\vec{\jmath}$$

$$(x+y-5)\vec{\imath} + (2x-y-4)\vec{\jmath} = (x'-6)\vec{\imath} + (y'-6)\vec{\jmath}.$$

Par identification : $\begin{cases} x'-6 = x+y-5 \\ y'-6 = 2x-y-4 \end{cases} \iff \begin{cases} x' = x+y+1 \\ y' = 2x-y+2 \end{cases}$

Exemple 3 : expression analytique d'une homothétie

Soit h l'homothétie de centre $\Omega(2;-1)$ et de rapport -2. Soit $M(x;y) \mapsto M'(x';y')$ tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = -2\overrightarrow{\Omega M}$:

$$\begin{pmatrix} x'-2 \\ y'+1 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x'-2 = -2x+4 \\ y'+1 = -2y-2 \end{cases} \iff \begin{cases} x' = -2x+6 \\ y' = -2y-3 \end{cases}$$

I.4. Exercices

Exercice 1

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $f : M(z) \mapsto M'(z')$ telle que $z' = (5+4\mathrm{i})\,\bar{z} + 3z + 2 + 4\mathrm{i}$.

1) f est-elle une application affine ?

2) Si oui, f admet-elle un point invariant ?

Solution

Posons $z = x + \mathrm{i}y$ avec $x, y \in \mathbb{R}$; alors $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$.

1)

$$\begin{aligned} z' &= (5+4\mathrm{i})(x-\mathrm{i}y) + 3(x+\mathrm{i}y) + 2 + 4\mathrm{i} \\ &= (5x+4y) + \mathrm{i}(4x-5y) + 3x + 3\mathrm{i}y + 2 + 4\mathrm{i} \\ &= (8x+4y+2) + \mathrm{i}(4x-2y+4). \end{aligned}$$

Donc $\begin{cases} x' = 8x+4y+2 \\ y' = 4x-2y+4 \end{cases}$ est de la forme $x' = ax+by+c$, $y' = a'x+b'y+c'$: f est une application affine.

2) $M(x;y)$ est invariant si et seulement si $x' = x$ et $y' = y$:

$$\begin{cases} 7x+4y+2 = 0 \quad (a) \\ 4x-3y+4 = 0 \quad (b) \end{cases}$$

$3(a)+4(b) : 37x+22=0$; $4(a)-7(b) : 37y-20=0$.

Donc f admet un unique point invariant $\Omega\left(-\frac{22}{37};\frac{20}{37}\right)$.

Exercice 2

Soit f l'application affine du plan définie par $\begin{cases} u = x-y \\ v = x+y \end{cases}$ (le point $M(x;y)$ a pour image $M'(u;v)$).
Démontrer que f est bijective et déterminer sa réciproque f^{-1}.

Solution

Pour $(u;v)$ donné, le système $\begin{cases} x-y=u \\ x+y=v \end{cases}$ donne, en additionnant puis en soustrayant les deux équations, $2x=u+v$ et $2y=v-u$.

Il admet donc une unique solution : tout point $M'(u;v)$ a un unique antécédent, donc f est bijective, et

$$f^{-1} : \begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{v-u}{2} \end{cases}$$

Exercice 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soit $f : M(x;y) \mapsto M'(x';y')$ telle que

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{13}(5x-12y+24) \\ y' = \dfrac{1}{13}(-12x-5y+36) \end{cases}$$

1) Démontrer que $f \circ f = \mathrm{Id}$.
2) Démontrer que l'ensemble des points invariants par f est une droite (D) que l'on précisera.
3) M et M' sont deux points du plan tels que M' soit l'image de M par f.
   a) Démontrer que le milieu de $[MM']$ appartient à (D).
   b) Démontrer que $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe orthogonale à celle de (D).
   c) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

Solution

1) Soient $M'(x';y') = f(M)$ et $M''(x'';y'') = f(M')$.

$$\begin{aligned} 13x'' &= 5x' - 12y' + 24 = \tfrac{1}{13}\left[5(5x-12y+24) - 12(-12x-5y+36)\right] + 24 \\ &= \tfrac{1}{13}(169x - 312) + 24 = 13x, \\ 13y'' &= -12x' - 5y' + 36 = \tfrac{1}{13}\left[-12(5x-12y+24) - 5(-12x-5y+36)\right] + 36 \\ &= \tfrac{1}{13}(169y - 468) + 36 = 13y. \end{aligned}$$

Donc $x''=x$ et $y''=y$, soit $M''=M$: $f \circ f = \mathrm{Id}$.

2) $f(M) = M \iff x' = x$ et $y' = y$:

$$\begin{cases} 5x - 12y + 24 = 13x \\ -12x - 5y + 36 = 13y \end{cases} \iff \begin{cases} -8x - 12y + 24 = 0 \\ -12x - 18y + 36 = 0 \end{cases} \iff 2x + 3y - 6 = 0.$$

L'ensemble des points invariants est la droite $(D) : \ 2x + 3y - 6 = 0$.

3) a) Soit A le milieu de $[MM']$:

$$x_A = \frac{x + x'}{2} = \frac{9x - 6y + 12}{13}, \qquad y_A = \frac{y + y'}{2} = \frac{-6x + 4y + 18}{13}.$$

$$2x_A + 3y_A - 6 = \frac{18x - 12y + 24 - 18x + 12y + 54}{13} - 6 = \frac{78}{13} - 6 = 0,$$

donc $A \in (D)$.

b) $\overrightarrow{MM'} \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix} = \dfrac{-2x - 3y + 6}{13} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{MM'}$ est donc colinéaire au vecteur fixe $\vec{w}(4;6)$. Un vecteur directeur de (D) est $\vec{v}(-3;2)$ et $\vec{w} \cdot \vec{v} = 4 \times (-3) + 6 \times 2 = 0 : \vec{w} \perp \vec{v}$.

c) $f \circ f = \text{Id}$, l'ensemble des points invariants est la droite (D), le milieu de $[MM']$ appartient à (D) et $(MM') \perp (D)$:
f est la symétrie orthogonale d'axe $(D) : \ 2x + 3y - 6 = 0$.

Exercice 4

Soit ABC un triangle, A', B' et C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$, f l'application affine du plan définie par : $f(A) = A$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$.

1. Déterminer les images par f de A', B' et C'.
2. Déterminer les images par f des droites (AA'), (BB') et (CC').
3. Déterminer l'expression analytique de f dans le repère (A, B, C).

Solution

On travaille dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$: $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(0;1)$, $A'\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $B'\left(0;\frac{1}{2}\right)$, $C'\left(\frac{1}{2};0\right)$.

1. Une application affine conserve les milieux.
   - A' milieu de $[BC]$: $f(A')$ est le milieu de $[f(B)f(C)] = [B'C']$.
   - B' milieu de $[AC]$: $f(B')$ est le milieu de $[f(A)f(C)] = [AC']$.
   - C' milieu de $[AB]$: $f(C')$ est le milieu de $[f(A)f(B)] = [AB']$.

   Soit I le milieu de $[AC']$ et J le milieu de $[AB']$: $f(A')\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$, $f(B') = I\left(\frac{1}{4};0\right)$, $f(C') = J\left(0;\frac{1}{4}\right)$.
2. - $f(A) = A$ et $f(A')\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right) \in (AA') : f\big((AA')\big) = (AA')$.
   - $f(B) = B'$ et $f(B') = I : f\big((BB')\big) = (B'I)$, d'équation $4x + 2y = 1$.
   - $f(C) = C'$ et $f(C') = J : f\big((CC')\big) = (C'J)$, d'équation $2x + 4y = 1$.
3. Soit φ l'application linéaire associée à f :

$$\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{AB'} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}, \qquad \varphi(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AC'} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

Pour $M(x;y)$, $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ donc

$$\overrightarrow{Af(M)} = \varphi(\overrightarrow{AM}) = \tfrac{y}{2}\,\overrightarrow{AB} + \tfrac{x}{2}\,\overrightarrow{AC}.$$

Expression analytique de f :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{y}{2} \\ y' = \dfrac{x}{2} \end{cases}$$

Exercice 5

Soit $ABCD$ un losange et f l'application affine de $\mathcal{P}$ définie par : $f(A) = A$, $f(B) = D$ et $f(C) = D$.

1. a) Déterminer les images par f du point D, de la droite (AD) et du plan $\mathcal{P}$.
   b) Démontrer que $f \circ f$ est une application constante.
2. Soit g la symétrie orthogonale d'axe (AC).
   a) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de l'application $g \circ f$.
   b) En déduire la construction de l'image par f d'un point quelconque M de $\mathcal{P}$.

Solution

Soit φ l'application linéaire associée à f. $ABCD$ étant un losange, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

1. a) $\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{AD}$ et $\varphi(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{f(A)f(C)} = \overrightarrow{AD}$.
   $\varphi(\overrightarrow{AD}) = \varphi(\overrightarrow{AC}) - \varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD} = \vec{0}$.
   - $\overrightarrow{f(A)f(D)} = \varphi(\overrightarrow{AD}) = \vec{0}$ donc $f(D) = f(A) = A$.
   - Pour $M \in (AD)$, $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{Af(M)} = t\,\varphi(\overrightarrow{AD}) = \vec{0}$: $f\big((AD)\big) = \{A\}$.
   - Pour $M \in \mathcal{P}$, $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{Af(M)} = x\,\overrightarrow{AD}$: $f(M) \in (AD)$, et x décrit $\mathbb{R}$ donc $f(\mathcal{P}) = (AD)$.

   b) Pour tout $M \in \mathcal{P}$, $f(M) \in (AD)$ et $f\big((AD)\big) = \{A\}$, donc $(f \circ f)(M) = A$.
   $f \circ f$ est l'application constante égale à A.

2. a) Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires et (AC) est la médiatrice de $[BD]$: $g(A) = A$, $g(B) = D$, $g(D) = B$.
   $g \circ f$ est affine et

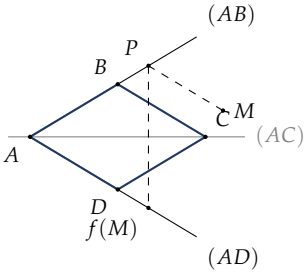
   $$(g \circ f)(A) = A, \qquad (g \circ f)(B) = g(D) = B, \qquad (g \circ f)(D) = g(A) = A.$$

   Soit ψ sa partie linéaire : $\psi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB}$ et $\psi(\overrightarrow{AD}) = \vec{0}$. Pour $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{A\,(g \circ f)(M)} = x\,\overrightarrow{AB}$.
   $g \circ f$ est la projection sur la droite (AB) parallèlement à la droite (AD).

b) $g \circ g = \text{Id}$ donc $f = g \circ (g \circ f)$.

Pour construire $f(M)$:

- la parallèle à (AD) passant par M coupe (AB) en $P = (g \circ f)(M)$;
- $f(M)$ est le symétrique orthogonal de P par rapport à (AC) ; il appartient à (AD).



Exercice 6

Soit f une application du plan dans lui-même. On se propose d'établir que :
f est affine si et seulement s'il existe une application vectorielle linéaire φ associée à f.

Partie A : on suppose que f est affine. Soient M, N, P et Q les points d'images respectives M', N', P' et Q' par f.

1- Justifier que : si $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ alors $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{Q'P'}$.

2- Soit φ l'application vectorielle, du plan dans lui-même, qui à tout vecteur $\overrightarrow{MN}$ associe $\varphi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{f(M)f(N)}$.

a) Démontrer que φ est linéaire.

b) En déduire que $\varphi(\vec{0}) = \vec{0}$.

c) Démontrer que si φ' est une application vectorielle linéaire associée à f alors $\varphi = \varphi'$. (On pourra montrer que pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan de représentant $\overrightarrow{MN}$: $\varphi(\vec{u}) = \varphi'(\vec{u})$.)

d) Énoncer le résultat établi dans cette partie.

Partie B : on suppose dans cette partie qu'il existe une application vectorielle linéaire φ associée à f telle que pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan de représentant $\overrightarrow{MN}$: $\varphi(\vec{u}) = \overrightarrow{f(M)f(N)}$.

1- Soient $(A;\alpha)$ et $(B;\beta)$ deux points pondérés quelconques de barycentre G. Démontrer que $f(G)$ est le barycentre des points pondérés $(f(A);\alpha)$ et $(f(B);\beta)$.

2- En déduire que f est une application affine.

3- D'après ce qui précède, comment peut-on montrer qu'une application du plan dans lui-même est affine ?

Partie C : le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. f est l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que : $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + (\overrightarrow{OM} \cdot \vec{\jmath})\,\vec{\imath}$.

1- Soit φ l'application vectorielle associée à f. Démontrer que, pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, on a : $\varphi(\vec{u}) = \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{\jmath})\,\vec{\imath}$.

2- Démontrer alors que f est une application affine.

3- Soit $\vec{u}$ un vecteur quelconque du plan. On pose $y = \vec{u} \cdot \vec{\jmath}$, où y est un nombre réel.

a) Déterminer l'image par φ du vecteur $\vec{u} - y\,\vec{\imath}$.

b) En déduire que f est une transformation affine.

c) Quelle est l'image du plan par f ?

Solution

Partie A

1- $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} \iff N - M = P - Q \iff M + P = N + Q$: les segments $[MP]$ et $[NQ]$ ont le même milieu I.

f conserve le barycentre : $f(I)$ est le milieu de $[M'P']$ et de $[N'Q']$. Ces deux segments ont même milieu, donc $M' + P' = N' + Q'$, soit $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{Q'P'}$.

2- D'après 1-, $\varphi(\vec{u})$ ne dépend pas du représentant $\overrightarrow{MN}$ de $\vec{u}$: φ est bien définie.

a) *Additivité.* Soient $\vec{u}, \vec{v}$ des vecteurs, M un point, N et P tels que $\overrightarrow{MN} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{NP} = \vec{v}$, donc $\overrightarrow{MP} = \vec{u} + \vec{v}$. Alors

$$\varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \overrightarrow{f(M)f(P)} = \overrightarrow{f(M)f(N)} + \overrightarrow{f(N)f(P)} = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v}).$$

Homogénéité. Soient $k \in \mathbb{R}$, $\vec{u} = \overrightarrow{MN}$ et P le point tel que $\overrightarrow{MP} = k\,\overrightarrow{MN}$, c'est-à-dire le barycentre de $(M; 1-k)$ et $(N; k)$. f conserve le barycentre : $f(P)$ est le barycentre de $(f(M); 1-k)$ et $(f(N); k)$, donc $\overrightarrow{f(M)f(P)} = k\,\overrightarrow{f(M)f(N)}$, soit $\varphi(k\vec{u}) = k\,\varphi(\vec{u})$.
Donc φ est linéaire.

b) $\varphi(\vec{0}) = \varphi(0 \cdot \vec{u}) = 0 \cdot \varphi(\vec{u}) = \vec{0}$.

c) Si φ' est linéaire associée à f, pour tout vecteur $\vec{u}$ de représentant $\overrightarrow{MN}$: $\varphi'(\vec{u}) = \overrightarrow{f(M)f(N)} = \varphi(\vec{u})$. Donc $\varphi = \varphi'$.

d) Si f est une application affine, il existe une unique application vectorielle linéaire φ associée à f, c'est-à-dire telle que, pour tous points M et N : $\overrightarrow{f(M)f(N)} = \varphi(\overrightarrow{MN})$.

Partie B

1- G barycentre de $(A; \alpha)$ et $(B; \beta)$, $\alpha + \beta \neq 0$: $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$. Par linéarité de φ :

$$\overrightarrow{f(A)f(G)} = \varphi(\overrightarrow{AG}) = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\,\varphi(\overrightarrow{AB}) = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\,\overrightarrow{f(A)f(B)}.$$

Donc $f(G)$ est le barycentre de $(f(A); \alpha)$ et $(f(B); \beta)$.

2- f conserve le barycentre (question 1-). Elle conserve aussi le coefficient de colinéarité : si $\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{f(A)f(C)} = \varphi(\overrightarrow{AC}) = k\,\varphi(\overrightarrow{AB}) = k\,\overrightarrow{f(A)f(B)}$.

Donc f est une application affine.

3- Pour montrer qu'une application f du plan dans lui-même est affine, il suffit de montrer qu'il existe une application vectorielle linéaire φ telle que, pour tous points M et N : $\overrightarrow{f(M)f(N)} = \varphi(\overrightarrow{MN})$.

Partie C

1- Pour tous points M et N :

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{ON'} - \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{MN} + \big((\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}) \cdot \vec{\jmath}\big)\vec{\imath} = \overrightarrow{MN} + (\overrightarrow{MN} \cdot \vec{\jmath})\,\vec{\imath}.$$

Donc, pour tout vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{MN}$: $\varphi(\vec{u}) = \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{\jmath})\,\vec{\imath}$.

2- Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et réels α, β, le produit scalaire étant bilinéaire :

$$\varphi(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \big((\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) \cdot \vec{\jmath}\big)\vec{\imath} = \alpha\,\varphi(\vec{u}) + \beta\,\varphi(\vec{v}).$$

φ est linéaire et $\overrightarrow{f(M)f(N)} = \varphi(\overrightarrow{MN})$ pour tous points M, N : d'après la partie B, f est une application affine.

3- a) Avec $\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath} = 0$ et $\vec{u}\cdot\vec{\jmath} = y$:

$$\varphi(\vec{u} - y\vec{\imath}) = \vec{u} - y\vec{\imath} + \big((\vec{u} - y\vec{\imath})\cdot\vec{\jmath}\big)\vec{\imath} = \vec{u} - y\vec{\imath} + (y-0)\vec{\imath} = \vec{u}.$$

b) Tout vecteur $\vec{u}$ a pour antécédent $\vec{u} - y\vec{\imath}$ par φ : φ est surjective, donc bijective (le plan vectoriel est de dimension finie). Comme $f(O) = O$ et $\overrightarrow{Of(M)} = \varphi(\overrightarrow{OM})$, f est bijective.
f est une transformation affine.

c) f est bijective : l'image du plan par f est le plan tout entier, $f(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$.

II. Similitudes planes

II.1. Similitudes directes du plan

Écriture complexe

On appelle *similitude directe* du plan toute écriture complexe de la forme

$$z' = f(z) = az + b, \qquad a \in \mathbb{C}^*,\ b \in \mathbb{C}.$$

Éléments caractéristiques

Pour une similitude directe d'écriture complexe $z' = az + b$:

- le *centre* est le point invariant de la similitude : $z' = az + b = z$, soit $az + b = z$;
- le *rapport* est le module de a : $|a|$;
- l'*angle* est un argument de a : $\arg a$.

Définition géométrique

On appelle *similitude directe* toute application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ composée d'une homothétie de rapport positif et d'un déplacement.

II.2. Propriétés

Propriétés

- Soient A, B, A', B' quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$: il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B'.
- Une similitude est une application du plan sur lui-même qui, au point A, associe le point A' et, au point B, associe le point B' tels que $\dfrac{A'B'}{AB} = k$, où k est un réel : c'est le *rapport* de la similitude. Pour une similitude directe, $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A'B'}) = \theta\ (2\pi)$ est l'*angle* de la similitude.
- Une isométrie est une similitude de rapport 1.
- Toute similitude directe de rapport $k \neq 1$ possède un centre.
- Le rapport d'une similitude directe est toujours positif, car c'est le rapport des distances.
- $S(\Omega, k, \theta)$ désigne la similitude directe de centre Ω, de rapport k et d'angle θ.
- Si $S(\Omega, k, \theta)$ et $S'(\Omega, k', \theta')$ sont deux similitudes directes de même centre :

$$S \circ S' = S(\Omega, kk', \theta + \theta'), \qquad S^{-1} = S\left(\Omega, \frac{1}{k}, -\theta\right).$$

II.3. Cas particuliers et forme réduite

Cas particuliers

- Si $\theta = 0$, la similitude est une homothétie : $S(\Omega, k, 0) = h(\Omega, k)$ et $S(\Omega, k, \pi) = h(\Omega, -k)$.
- Si $S(A) = A'$ et $S(B) = B'$, alors $k = \dfrac{A'B'}{AB}$ et $\theta = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A'B'})\ (2\pi)$.

Forme réduite d'une similitude S

$S = h \circ R = R \circ h$, où h est une homothétie et R une rotation de même centre.

Exemple 4 : forme réduite

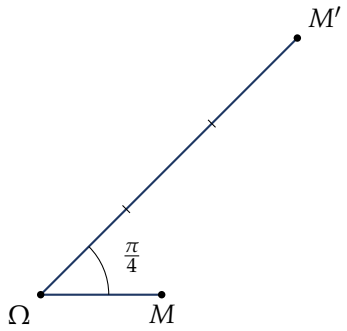
Pour $S\left(\Omega, 2, \frac{\pi}{4}\right)$: $h(\Omega, 2)$ et $R\left(\Omega, \frac{\pi}{4}\right)$, et $S = h \circ R = R \circ h$ est la forme réduite de S.

Exemple 5 : composée d'une rotation et d'une homothétie

$$R\left(A, \frac{\pi}{6}\right) \circ h(A, -4) = S\left(A, 1, \frac{\pi}{6}\right) \circ S(A, 4, \pi) = S\left(A, 1 \times 4, \frac{\pi}{6} + \pi\right) = S\left(A, 4, \frac{7\pi}{6}\right).$$

Exemple 6 : image d'un point par $S\left(\Omega, 3, \frac{\pi}{4}\right)$

Pour $M' = S(M)$: $k = \dfrac{\Omega M'}{\Omega M} = 3$ et $(\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}) = \dfrac{\pi}{4}\ (2\pi)$.



II.4. Composée de deux similitudes directes

Composée de deux similitudes directes

Soient $S_1(I, k_1, \theta_1)$ et $S_2(J, k_2, \theta_2)$ deux similitudes directes :

$$S_1 \circ S_2 = S(\Omega, k_1 k_2, \theta_1 + \theta_2).$$

1) Si $I = J$ alors $\Omega = I = J$.
2) Si $I \neq J$ avec $k_1 k_2 = 1$ et $\theta_1 + \theta_2 = 0\ (2\pi)$, alors $S_1 \circ S_2$ est une translation.
3) Si $k = 1$ et $\theta \neq 0$, alors S est une rotation $R(\Omega, \theta)$ définie par : $\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ (\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \end{cases}$

II.5. Exercices

Exercice 7

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z) = z' = (1 - \mathrm{i}\sqrt{3})\, z - 1 + \mathrm{i}$.
Étudier la transformation f et déterminer l'expression analytique de f.

Solution

$a = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\,e^{-\mathrm{i}\pi/3}$: f est une similitude directe de rapport $|a| = 2$ et d'angle $\arg a = -\frac{\pi}{3}$.

Centre : $z_\Omega = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{-1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}\sqrt{3}} = \dfrac{(-1+\mathrm{i})(-\mathrm{i})}{\sqrt{3}} = \dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{3}}$, soit $\Omega\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}; \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Expression analytique : avec $z = x + \mathrm{i}y$,

$$(1 - \mathrm{i}\sqrt{3})(x + \mathrm{i}y) - 1 + \mathrm{i} = (x + \sqrt{3}\,y - 1) + \mathrm{i}(-\sqrt{3}\,x + y + 1),$$

$$\begin{cases} x' = x + \sqrt{3}\,y - 1 \\ y' = -\sqrt{3}\,x + y + 1 \end{cases}$$

Exercice 8

Soit f : $\begin{cases} x' = x + 2y - 3 \\ y' = -2x + y + 1 \end{cases}$
Déterminer l'expression complexe et la nature des éléments caractéristiques de la transformation f.

Solution

Avec $z = x + \mathrm{i}y$:

$$z' = x' + \mathrm{i}y' = (1 - 2\mathrm{i})x + (2 + \mathrm{i})y - 3 + \mathrm{i} = (1 - 2\mathrm{i})(x + \mathrm{i}y) - 3 + \mathrm{i},$$

car $2 + \mathrm{i} = \mathrm{i}(1 - 2\mathrm{i})$. Expression complexe : $z' = (1 - 2\mathrm{i})z - 3 + \mathrm{i}$.

f est une similitude directe, de rapport $|1 - 2\mathrm{i}| = \sqrt{5}$ et d'angle $\theta = \arg(1 - 2\mathrm{i})$ tel que $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ et $\sin\theta = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Centre : $z_\Omega = \dfrac{-3+\mathrm{i}}{1-(1-2\mathrm{i})} = \dfrac{-3+\mathrm{i}}{2\mathrm{i}} = \dfrac{(-3+\mathrm{i})(-\mathrm{i})}{2} = \dfrac{1+3\mathrm{i}}{2}$, soit $\Omega\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$.

Exercice 9

ABC est un triangle équilatéral direct, E le milieu de $[BC]$ et L le milieu de $[BA]$. Soit S la similitude directe $S\left(B, 2, \frac{\pi}{3}\right)$; on a $S(B) = B$ et $S(E) = A$.
Soit $F = S(L)$. Construire F.

Solution

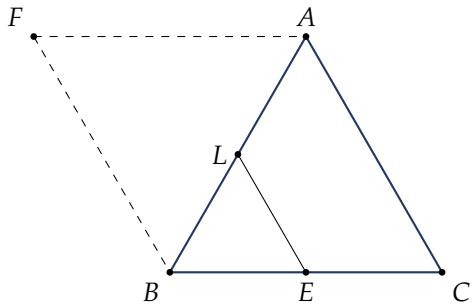
$S(E) = A$ et $S(L) = F$, donc

$$(\overrightarrow{EL}; \overrightarrow{AF}) = \frac{\pi}{3}\ (2\pi) \qquad \text{et} \qquad \frac{AF}{EL} = 2.$$

E et L sont les milieux de $[BC]$ et $[BA]$: $\overrightarrow{EL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$, donc $\overrightarrow{AF}$ est l'image de $2\overrightarrow{EL} = \overrightarrow{CA}$ par la rotation vectorielle d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

Le triangle ABC étant équilatéral direct, $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) = \dfrac{\pi}{3}\ (2\pi)$ et $CA = CB$: cette image est $\overrightarrow{CB}$.

Donc $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CB}$: F est le point tel que $AFBC$ soit un parallélogramme (la parallèle à (BC) passant par A, avec $AF = BC$ du côté de B).



Exercice 10

$ABCD$ est un carré direct de centre O et de côté 2. Soit S la similitude directe $S\left(A, \sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$. Déterminer $S(B)$.

Solution

$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{4}\ (2\pi)$ (diagonale du carré) et, d'après le théorème de Pythagore, $AC^2 = 2AB^2$, soit $AC = 2\sqrt{2} = \sqrt{2}\,AB$.

Donc $B' = S(B)$ est le point de la demi-droite $[AC)$ tel que $AB' = \sqrt{2}\,AB = AC$: $S(B) = C$.

Exercice 11

ABC est un triangle isocèle en A tel que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$. A' est le symétrique de A par rapport à C.

1) Déterminer l'angle et le rapport de la similitude S telle que $S(A') = C$ et $S(C) = B$.
2) Soit Ω le centre de S. Montrer que ΩCB est rectangle et isocèle. Construire Ω.
3) M est un point du plan. Construire M', l'image de M par S.
4) Déterminer l'image de (AC) par S.

Solution

1) $S(A') = C$ et $S(C) = B$: $\theta = (\overrightarrow{A'C}; \overrightarrow{CB})$ et $k = \dfrac{CB}{A'C}$.

   C est le milieu de $[AA']$ donc $\overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{CA}$ et $A'C = CA$.

Le triangle ABC est rectangle isocèle direct en A : $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}) = \dfrac{\pi}{4}\ (2\pi)$, et $CB^2 = 2\,CA^2$ donc $CB = \sqrt{2}\,CA$.

Ainsi $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ et $k = \dfrac{CB}{CA} = \sqrt{2}$: S est la similitude de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

2) $S(\Omega) = \Omega$ et $S(C) = B$ donc $(\overrightarrow{\Omega C};\overrightarrow{\Omega B}) = \dfrac{\pi}{4}\ (2\pi)$ et $\Omega B = \sqrt{2}\,\Omega C$.

Dans le triangle ΩCB : $CB^2 = \Omega C^2 + \Omega B^2 - 2\,\Omega C \cdot \Omega B \cos\dfrac{\pi}{4} = \Omega C^2 + 2\,\Omega C^2 - 2\,\Omega C^2 = \Omega C^2$.

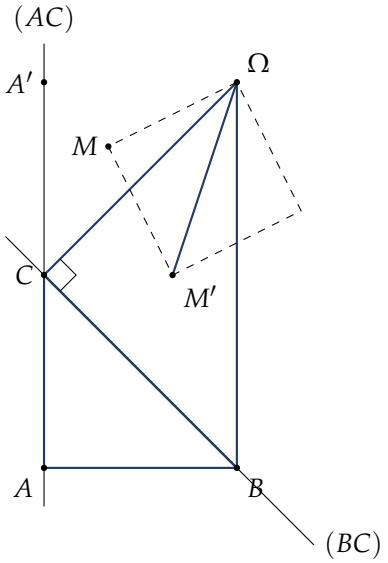
Donc $CB = \Omega C$ et $\Omega B^2 = 2\,\Omega C^2 = \Omega C^2 + CB^2$: ΩCB est rectangle et isocèle en C.

Construction : le triangle ΩCB est direct, donc $(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{C\Omega}) = \dfrac{\pi}{2}$ et $C\Omega = CB$: Ω est l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

3) $S(\Omega) = \Omega$ et $S(M) = M'$ donc $(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}) = \dfrac{\pi}{4}\ (2\pi)$ et $\Omega M' = \sqrt{2}\,\Omega M$.

Construction : M' est le sommet opposé à Ω du carré construit sur $[\Omega M]$ du côté direct (la diagonale $[\Omega M']$ fait l'angle $\frac{\pi}{4}$ avec $[\Omega M)$ et mesure $\sqrt{2}\,\Omega M$).

4) $A' \in (AC)$, $S(A') = C$ et $S(C) = B$: une similitude transforme une droite en une droite, donc l'image de $(AC) = (A'C)$ par S est la droite $(CB) = (BC)$.



Thème 21 : Applications de l'espace

Sommaire

I Cours **2**

1. Présentation 2
2. La translation 2
3. Homothétie de l'espace 3
4. Rotation dans l'espace 3
5. Symétrie orthogonale par rapport à un plan 4
6. Projection 5
7. Demi-tour (symétrie par rapport à une droite de l'espace) 5
8. Composée de deux homothéties de même centre 6

II Exercices **7**

Exercice 1 7
Exercice 2 8
Exercice 3 8
Exercice 4 10
Exercice 5 11

I Cours

1 Présentation

- L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.
- Le vocabulaire et les résultats concernant les applications du plan s'étendent à l'espace.
- Une transformation de l'espace est une application bijective de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$.
- Une **isométrie** de l'espace $\mathcal{E}$ est une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui conserve les distances.

Une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ est une **application affine** si elle vérifie 1) ou 2) :
1) elle conserve le barycentre de n points pondérés ($n \in \mathbb{N}\setminus\{0\,;1\}$) ;
2) son expression analytique est de la forme $\begin{cases} x' = ax+by+cz+d \\ y' = a'x+b'y+c'z+d' \\ z' = a''x+b''y+c''z+d'' \end{cases}$

- Toute isométrie de l'espace $\mathcal{E}$ est une transformation affine.
- Une isométrie conserve les positions relatives, les aires et les volumes.

2 La translation

La translation de vecteur $\vec{u}$ est une isométrie du plan ou de l'espace. C'est la transformation du plan ou de l'espace qui, à tout point M, associe le point M' tel que

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}.$$

Traduction analytique. Dans un repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, soit $\vec{u}(a\,;b\,;c)$, $M(x\,;y\,;z)$ et $M'(x'\,;y'\,;z')$:

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u} \iff \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \\ z'-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x' = x+a \\ y' = y+b \\ z' = z+c \end{cases}$$

Remarques.

- Si $\vec{u} = \vec{0}$, alors $M' = M$ et l'application est l'identité : tous les points de l'espace sont invariants par $t_{\vec{0}}$.
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, la translation n'admet aucun point invariant.

Exemple 1

Donner l'expression analytique de la translation de vecteur $\vec{u}(1\,;-2\,;-1)$.

Solution. $t_{\vec{u}}(M) = M' \iff \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \iff (x'-x\,;\,y'-y\,;\,z'-z) = (1\,;-2\,;-1)$, d'où

$$\begin{cases} x' = x+1 \\ y' = y-2 \\ z' = z-1 \end{cases}$$

3 Homothétie de l'espace

L'homothétie de centre I et de rapport k ($k \neq 0$) est la transformation du plan ou de l'espace qui, à tout point M, associe le point M' tel que

$$\overrightarrow{IM'} = k\,\overrightarrow{IM}.$$

- Si $k = 1$, l'homothétie est l'identité du plan ou de l'espace.
- Si $k = -1$, l'homothétie est la symétrie centrale de centre I.
- Si $|k| > 1$, l'homothétie est un agrandissement.

Traduction analytique. Soit $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ un repère de l'espace, $M(x\,;y\,;z)$, $M'(x'\,;y'\,;z')$ et $I(a\,;b\,;c)$.

$$h_{(I,k)}(M) = M' \iff \overrightarrow{IM'} = k\,\overrightarrow{IM} \iff \begin{cases} x' - a = k\,(x-a) \\ y' - b = k\,(y-b) \\ z' - c = k\,(z-c) \end{cases}$$

Exemple 2

Définir analytiquement $h_{(I,\frac{3}{2})}$ tel que $I(1\,;-2\,;5)$.

Solution. $\begin{cases} x'-1 = \frac{3}{2}(x-1) \\ y'+2 = \frac{3}{2}(y+2) \\ z'-5 = \frac{3}{2}(z-5) \end{cases}$ d'où $\begin{cases} x' = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \\ y' = \frac{3}{2}y + 1 \\ z' = \frac{3}{2}z - \frac{5}{2} \end{cases}$

Exemple 3

Soit h l'homothétie d'expression analytique $\begin{cases} x' = -2x - 4 \\ y' = -2y + 1 \\ z' = -2z + 3 \end{cases}$

Déterminer le point invariant par h.

Solution. $M' = M$ donc $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$:

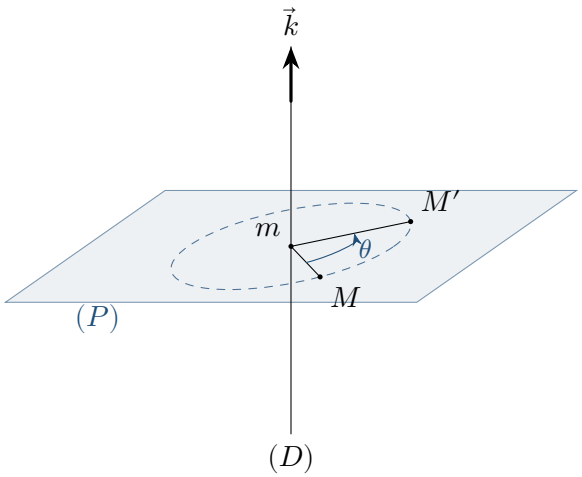
$$-2x - 4 = x\,; \quad -2y + 1 = y\,; \quad -2z + 3 = z$$

d'où $x = -\dfrac{4}{3}$, $y = \dfrac{1}{3}$, $z = 1$. Le point invariant est $\Omega\left(-\dfrac{4}{3}\,;\dfrac{1}{3}\,;1\right)$.

4 Rotation dans l'espace

Soit (D) une droite et $\vec{k}$ un vecteur directeur de (D). On dit que le couple $(D,\vec{k})$ est un **axe orienté**.

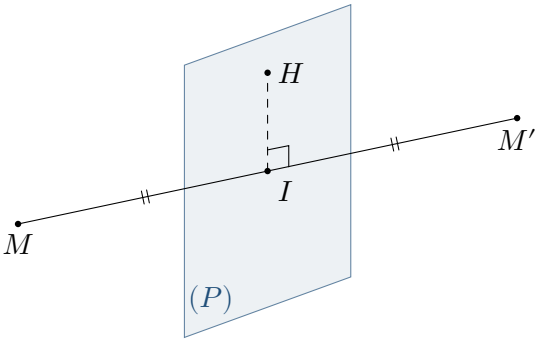
La rotation R d'axe la droite (D) et d'angle θ est l'application de l'espace qui, à tout point M de l'espace, associe le point M' image de M par la rotation plane, dans le plan (P) passant par M et orthogonal à (D), de centre $m = (D) \cap (P)$ et d'angle θ.



5 Symétrie orthogonale par rapport à un plan

La symétrie orthogonale par rapport au plan (P) est une isométrie de l'espace. C'est la transformation de l'espace qui, à tout point M, associe le point M' tel que (P) soit le **plan médiateur** de $[MM']$.

L'ensemble des points équidistants de M et M' est un plan (P) orthogonal à la droite (MM') en I, milieu de $[MM']$; il est appelé **plan médiateur** du segment $[MM']$.



Équation du plan médiateur. Soit $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et $B(x_B\,;y_B\,;z_B)$, avec $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}$. Le plan médiateur (P) de $[AB]$ est orthogonal à (AB) et passe par le milieu I de $[AB]$; $\overrightarrow{AB}$ est donc un vecteur normal au plan (P). On a :

$$H(x\,;y\,;z)\in(P)\iff\overrightarrow{IH}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\qquad I\left(\frac{x_A+x_B}{2}\,;\frac{y_A+y_B}{2}\,;\frac{z_A+z_B}{2}\right).$$

Exemple 4

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on donne $A(3\,;-2\,;-5)$ et $B(1\,;4\,;3)$. Déterminer l'équation du plan médiateur de $[AB]$.

Solution.

1) $\overrightarrow{AB}(-2\,;6\,;8)$ et I, milieu de $[AB]$, a pour coordonnées $I(2\,;1\,;-1)$.

2) $H(x\,;y\,;z) \in (P) \iff \overrightarrow{IH}\cdot\overrightarrow{AB} = 0 \iff -2(x-2)+6(y-1)+8(z+1) = 0 \iff -2x+6y+8z+6 = 0$.

Le plan médiateur de $[AB]$ a pour équation $x-3y-4z-3=0$.

6 Projection

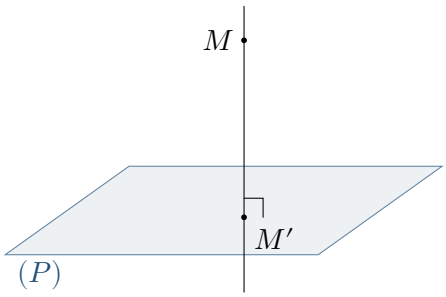
En géométrie, une projection est une application de l'espace dans lui-même.

Projection orthogonale. Soit (P) un plan. Le projeté orthogonal de M sur (P) est le point M' tel que

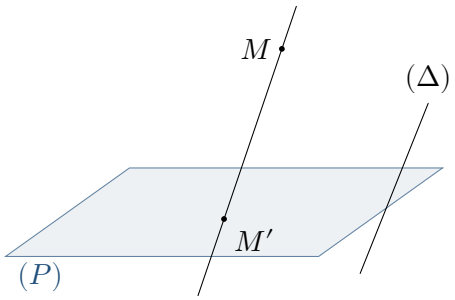
$$M' \in (P) \quad \text{et} \quad (MM') \perp (P).$$

Projection parallèlement à une droite. Soit (P) un plan et (Δ) une droite non parallèle à (P). Le projeté de $M \notin (P)$ sur (P) parallèlement à (Δ) est le point M' tel que

$$M' \in (P) \quad \text{et} \quad (MM') \parallel (\Delta).$$



projection orthogonale



projection parallèle à (Δ)

7 Demi-tour (symétrie par rapport à une droite de l'espace)

On appelle **demi-tour d'axe** (Δ), où (Δ) est une droite de l'espace, la transformation de l'espace notée S_Δ telle que $S_\Delta(M) = M'$ avec :

- si $M \in (\Delta)$, alors $M' = M$;
- si $M \notin (\Delta)$, alors (Δ) est la médiatrice de $[MM']$.

Expression analytique. Soit (D) la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$, $M(x\,;y\,;z)$ et $M'(x'\,;y'\,;z')$ l'image de M par le demi-tour d'axe (D). On a :

$$\begin{cases} I \text{ milieu de } [MM'] \text{ et } I \in (D) \\ \overrightarrow{MM'}\cdot\vec{u} = 0 \end{cases}$$

8 Composée de deux homothéties de même centre

Exemple 5

Soit $h_1 = h_{(A,-3)}$ et $h_2 = h_{(A,\frac{1}{2})}$ avec $A(-1\,;2\,;-2)$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $h_1 \circ h_2$.

Solution. La composée de deux homothéties de même centre est une homothétie de ce centre, de rapport le produit des rapports :

$$h_1 \circ h_2 = h_{(A\,;kk')} = h_{(A\,;-3\times\frac{1}{2})} = h_{(A\,;-\frac{3}{2})}.$$

Donc $\overrightarrow{AM'} = -\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AM}$, c'est-à-dire $\begin{cases} x'+1 = -\frac{3}{2}(x+1) \\ y'-2 = -\frac{3}{2}(y-2) \\ z'+2 = -\frac{3}{2}(z+2) \end{cases}$ d'où $\begin{cases} x' = -\frac{3}{2}x - \frac{5}{2} \\ y' = -\frac{3}{2}y + 5 \\ z' = -\frac{3}{2}z - 5 \end{cases}$

II Exercices

Exercice 1

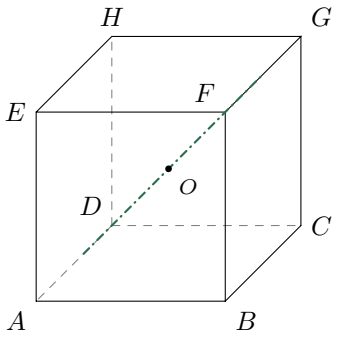
L'espace est muni du repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.
Soit $ABCDEFGH$ un cube de centre O et les réflexions $s_1 = s_{(OEH)}$, $s_2 = s_{(OFG)}$.

1. Déterminer les images des sommets du cube par les transformations s_1, s_2 et $s_2 \circ s_1$.
2. Conjecturer la nature de $s_2 \circ s_1$. Démontrer cette conjecture.

Solution

Le cube est d'arête 2, ses faces $ABCD$ et $EFGH$ sont opposées, ses arêtes sont $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DH]$; le repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ est dirigé par les arêtes :

$A(-1\,;-1\,;-1)$ $\quad E(-1\,;-1\,;1)$
$B(1\,;-1\,;-1)$ $\quad F(1\,;-1\,;1)$
$C(1\,;1\,;-1)$ $\quad G(1\,;1\,;1)$
$D(-1\,;1\,;-1)$ $\quad H(-1\,;1\,;1)$



1. Le plan (OEH) a pour équation $x+z=0$ (O, E et H la vérifient) ; $\vec{n}(1\,;0\,;1)$ lui est normal. Pour $M(x\,;y\,;z)$:

$$s_1(M) = M - \frac{2\overrightarrow{OM}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = (x\,;y\,;z) - (x+z)(1\,;0\,;1), \quad \text{soit} \quad s_1(x\,;y\,;z) = (-z\,;y\,;-x).$$

De même, (OFG) a pour équation $x-z=0$ et $s_2(x\,;y\,;z) = (z\,;y\,;x)$.

M	A	B	C	D	E	F	G	H
$s_1(M)$	F	B	C	G	E	A	D	H
$s_2(M)$	A	E	H	D	B	F	G	C
$s_2 \circ s_1(M)$	F	E	H	G	B	A	D	C

2. Conjecture : $s_2 \circ s_1$ est le demi-tour d'axe la droite $(O\,;\vec{\jmath})$, c'est-à-dire la droite passant par O et parallèle à (AD) (les sommets sont échangés deux à deux : $A \leftrightarrow F$, $B \leftrightarrow E$, $C \leftrightarrow H$, $D \leftrightarrow G$).

Démonstration. Pour $M(x\,;y\,;z)$:

$$s_2 \circ s_1(M) = s_2(-z\,;y\,;-x) = (-x\,;y\,;-z) = M'.$$

Le milieu de $[MM']$ est $(0\,;y\,;0)$, qui appartient à la droite $(O\,;\vec{\jmath})$, et $\overrightarrow{MM'}(-2x\,;0\,;-2z)$ est orthogonal à $\vec{\jmath}$. Donc M' est le symétrique de M par rapport à la droite $(O\,;\vec{\jmath})$: $s_2 \circ s_1$ est le demi-tour d'axe $(O\,;\vec{\jmath})$.

Exercice 2

1. Démontrer que la composée d'une réflexion de plan (Π) et d'une translation est une réflexion de plan parallèle à (Π).
2. Démontrer que la composée d'un demi-tour d'axe (Δ) et d'une translation est un demi-tour d'axe parallèle à (Δ).

Solution

Dans les deux questions, le vecteur $\vec{u}$ de la translation est orthogonal à (Π), respectivement à (Δ) ; sans cette condition, la composée est une symétrie glissée, respectivement un demi-tour suivi d'une translation parallèle à l'axe.

1. On choisit un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ tel que (Π) soit le plan $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'équation $z=0$. Alors $\vec{u}=c\,\vec{k}$ et, pour $M(x\,;y\,;z)$:

$$s_{(\Pi)}(M)=(x\,;y\,;-z),\qquad t_{\vec{u}}(M)=(x\,;y\,;z+c).$$

$$t_{\vec{u}}\circ s_{(\Pi)}(M)=(x\,;y\,;-z+c)=M'.$$

Le milieu de $[MM']$ est $\left(x\,;y\,;\dfrac{c}{2}\right)$, qui appartient au plan (Π') d'équation $z=\dfrac{c}{2}$, et $\overrightarrow{MM'}=(c-2z)\,\vec{k}$ est normal à (Π'). Donc $t_{\vec{u}}\circ s_{(\Pi)}$ est la réflexion de plan (Π'), parallèle à (Π).
De même $s_{(\Pi)}\circ t_{\vec{u}}(M)=(x\,;y\,;-z-c)$ est la réflexion de plan $z=-\dfrac{c}{2}$.

2. On choisit un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ tel que $(\Delta)=(O\,;\vec{\imath})$, d'équations $y=z=0$. Alors $\vec{u}=(0\,;b\,;c)$ et, pour $M(x\,;y\,;z)$:

$$S_\Delta(M)=(x\,;-y\,;-z),\qquad t_{\vec{u}}\circ S_\Delta(M)=(x\,;-y+b\,;-z+c)=M'.$$

Le milieu de $[MM']$ est $\left(x\,;\dfrac{b}{2}\,;\dfrac{c}{2}\right)$, qui appartient à la droite (Δ') d'équations $y=\dfrac{b}{2}$, $z=\dfrac{c}{2}$, parallèle à (Δ) ; et $\overrightarrow{MM'}(0\,;b-2y\,;c-2z)$ est orthogonal à $\vec{\imath}$. Donc $t_{\vec{u}}\circ S_\Delta$ est le demi-tour d'axe (Δ'), parallèle à (Δ).
De même $S_\Delta\circ t_{\vec{u}}(M)=(x\,;-y-b\,;-z-c)$ est le demi-tour d'axe la droite d'équations $y=-\dfrac{b}{2}$, $z=-\dfrac{c}{2}$.

Exercice 3

Soit $ABCD$ un tétraèdre dont la face BCD est un triangle équilatéral et les faces ABC, ACD, ADB sont des triangles rectangles et isocèles.

1. Démontrer que la droite (AB) est orthogonale au plan (ACD).
2. Déterminer les plans et axes de symétrie de ce tétraèdre.
3. Préciser les images des points A, B, C et D par les transformations suivantes :
   a) réflexion de plan (BCD) ;
   b) réflexion de plan (ABC) ;
   c) demi-tour d'axe (AB) ;
   d) demi-tour d'axe (CD).

Solution

Préliminaire. Posons $a = BC = CD = DB$, $x = AB$, $y = AC$, $z = AD$. Un triangle rectangle isocèle a des côtés proportionnels à $1, 1, \sqrt{2}$; dans ABC dont un côté vaut a, on a donc $\{x, y\} = \left\{\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right\}$ ou $\{x, y\} = \{a, a\sqrt{2}\}$; de même pour $\{y, z\}$ et $\{z, x\}$. Si l'une des longueurs x, y, z vaut $\frac{a}{\sqrt{2}}$, les deux autres valent aussi $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Sinon, x, y, z prendraient deux à deux les valeurs distinctes a et $a\sqrt{2}$, ce qui est impossible pour trois nombres. Donc

$$AB = AC = AD = \frac{a}{\sqrt{2}}, \qquad AB^2 + AC^2 = a^2 = BC^2,$$

et les triangles ABC, ACD, ADB sont rectangles en A.

1. $(AB) \perp (AC)$ et $(AB) \perp (AD)$, avec (AC) et (AD) sécantes en A dans le plan (ACD). Donc (AB) est orthogonale au plan (ACD).

Repère. On prend le repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$, d'unité AB : $A(0\,;\,0\,;\,0)$, $B(1\,;\,0\,;\,0)$, $C(0\,;\,1\,;\,0)$, $D(0\,;\,0\,;\,1)$. Soit I, J, K les milieux de $[CD]$, $[BD]$, $[BC]$ et $G\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$ le centre de gravité de BCD.

2. Une symétrie du tétraèdre conserve les longueurs ; A est le seul sommet dont les trois arêtes ont même longueur $\frac{a}{\sqrt{2}}$ (celles de B valent $\frac{a}{\sqrt{2}}$, a, a). Elle fixe donc A et permute B, C, D.

- **Plans de symétrie :** (ABI) d'équation $y = z$ (échange C et D), (ACJ) d'équation $x = z$ (échange B et D), (ADK) d'équation $x = y$ (échange B et C).
- **Axe de symétrie :** la droite (AG), intersection des trois plans (équations $x = y = z$), axe de la rotation qui permute circulairement B, C, D (angles $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$).
- Aucun demi-tour ne laisse le tétraèdre invariant : un tel demi-tour fixerait A, échangerait deux des sommets B, C, D et fixerait le troisième, par exemple B ; son axe serait (AB) et passerait par I, ce qui est faux car A, B, I ne sont pas alignés.

3.

a) B, C, D sont invariants. Comme $AB = AC = AD$, le projeté orthogonal de A sur (BCD) est G ; l'image de A est $A' = 2G - A$, soit $A'\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{2}{3}\,;\,\frac{2}{3}\right)$.

b) A, B, C sont invariants. $(AD) \perp (ABC)$, donc le projeté de D sur (ABC) est A ; l'image de D est $D'(0\,;\,0\,;\,-1)$, symétrique de D par rapport à A.

c) A et B sont invariants. Le projeté de C sur (AB) est A (car $AC \perp AB$), de même pour D : les images de C et D sont $C'(0\,;\,-1\,;\,0)$ et $D'(0\,;\,0\,;\,-1)$, symétriques de C et D par rapport à A.

d) C et D sont invariants. Comme $AC = AD$ et $BC = BD$, les projetés de A et de B sur (CD) sont le milieu $I\left(0\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$ de $[CD]$. Les images sont $A' = 2I - A = (0\,;\,1\,;\,1)$ et $B' = 2I - B = (-1\,;\,1\,;\,1)$.

Exercice 4

1. Démontrer que toute symétrie centrale de $\mathcal{E}$ est la composée de trois réflexions.
2. Soit $ABCDEFGH$ un cube de centre O. On désigne par s_O la symétrie de centre O, $s_{(AOC)}$ la réflexion de plan (AOC) et $s_{(AG)}$ le demi-tour d'axe (AG). Déterminer les transformations suivantes :
   a) $s_O \circ s_{(AOC)}$ et $s_{(AOC)} \circ s_O$;
   b) $s_O \circ s_{(AG)}$ et $s_{(AG)} \circ s_O$.

Solution

1. Soit s_Ω la symétrie de centre Ω. On choisit un repère orthonormé $(\Omega\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ et les trois plans orthogonaux deux à deux $(\Omega\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, $(\Omega\,;\vec{\jmath},\vec{k})$, $(\Omega\,;\vec{\imath},\vec{k})$ dont les réflexions s'écrivent

$$s_1(x\,;y\,;z)=(x\,;y\,;-z),\quad s_2(x\,;y\,;z)=(x\,;-y\,;z),\quad s_3(x\,;y\,;z)=(-x\,;y\,;z).$$

Alors $s_3\circ s_2\circ s_1(x\,;y\,;z)=s_3\circ s_2(x\,;y\,;-z)=s_3(x\,;-y\,;-z)=(-x\,;-y\,;-z)=s_\Omega(M)$.
Donc $s_\Omega=s_3\circ s_2\circ s_1$: toute symétrie centrale est la composée de trois réflexions.

2. On reprend le cube et le repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ de l'exercice 1 : sommets $(\pm1\,;\pm1\,;\pm1)$, avec $A(-1\,;-1\,;-1)$ et $G(1\,;1\,;1)$, $C(1\,;1\,;-1)$. Alors $s_O(x\,;y\,;z)=(-x\,;-y\,;-z)$.
Le plan (AOC) a pour équation $x-y=0$ (O, A, C la vérifient), donc $s_{(AOC)}(x\,;y\,;z)=(y\,;x\,;z)$.
La droite (AG) passe par O et est dirigée par $\vec{n}(1\,;1\,;1)$, donc $s_{(AG)}(M)=\dfrac{2\,\overrightarrow{OM}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\,\vec{n}-\overrightarrow{OM}$.

a) $s_O\circ s_{(AOC)}(x\,;y\,;z)=s_O(y\,;x\,;z)=(-y\,;-x\,;-z)$, et de même $s_{(AOC)}\circ s_O(x\,;y\,;z)=s_{(AOC)}(-x\,;-y\,;-z)=(-y\,;-x\,;-z)$.
Les deux composées sont égales. Leurs points invariants vérifient $z=0$ et $y=-x$: c'est la droite (Δ) passant par O et dirigée par $(1\,;-1\,;0)$, orthogonale au plan (AOC) ; de plus, le milieu de $[MM']$ est $\left(\dfrac{x-y}{2}\,;\dfrac{y-x}{2}\,;0\right)\in(\Delta)$ et $\overrightarrow{MM'}\cdot(1\,;-1\,;0)=(-y-x)-(-x-y)=0$.

$s_O\circ s_{(AOC)}=s_{(AOC)}\circ s_O=$ demi-tour d'axe (Δ), droite passant par O orthogonale à (AOC).

b) Comme $s_O(M)=-\overrightarrow{OM}$ (vecteur), on a $s_O\circ s_{(AG)}=s_{(AG)}\circ s_O$ et, pour $M(x\,;y\,;z)$:

$$s_O\circ s_{(AG)}(M)=\overrightarrow{OM}-\frac{2\,(x+y+z)}{3}\,(1\,;1\,;1)=\left(\frac{x-2y-2z}{3}\,;\frac{-2x+y-2z}{3}\,;\frac{-2x-2y+z}{3}\right).$$

C'est la réflexion de plan (P) passant par O et orthogonal à (AG), d'équation $x+y+z=0$: en effet, $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à $(1\,;1\,;1)$ et le milieu de $[MM']$ vérifie $x+y+z=0$.

$$s_O\circ s_{(AG)}=s_{(AG)}\circ s_O=\text{réflexion de plan }(P)\ :\ x+y+z=0.$$

Exercice 5

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

1. Soit (D) la droite passant par $E(1\,;1\,;0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1\,;0\,;1)$. Justifier que pour tout point M de l'espace, on a :

$$M(x\,;y\,;z)\in(D)\iff\begin{cases}x=t+1\\y=1\\z=t\end{cases},\quad t\in\mathbb{R}.$$

2. Soit $M(x\,;y\,;z)$ un point de l'espace et $M'(x'\,;y'\,;z')$ son symétrique par rapport à la droite (D) ; K milieu de $[MM']$.
   a) Démontrer que le point K appartient à (D) si et seulement s'il existe un nombre réel t tel que : $\begin{cases}x'=2t+2-x\\y'=2-y\\z'=2t-z\end{cases}$
   b) Démontrer que $(MM')\perp(D)$ si et seulement si $(x'-x)+(z'-z)=0$.
   c) En déduire que l'expression analytique de S_D est $\begin{cases}x'=z+1\\y'=2-y\\z'=x-1\end{cases}$
3. Soit (π) un plan orthogonal à (D) au point $E(1\,;1\,;0)$ et S_π la réflexion de plan (π).
   a) Déterminer l'équation cartésienne de (π).
   b) Justifier que l'expression analytique de S_π est $\begin{cases}x'=-z+1\\y'=y\\z'=-x+1\end{cases}$
   c) Soit $M(x\,;y\,;z)$, $M_1(x_1\,;y_1\,;z_1)$ et $M'(x'\,;y'\,;z')$ trois points de l'espace tels que $M_1=S_\pi(M)$ et $M'=S_D(M_1)$. Déterminer l'expression analytique de $S_D\circ S_\pi$.
   d) Soit $M(x\,;y\,;z)$ un point de l'espace et $M'(x'\,;y'\,;z')$ son image par S_E. Déterminer l'expression analytique de S_E.
   e) Que pouvez-vous en conclure ?

Solution

1. $M(x\,;y\,;z)\in(D)\iff\overrightarrow{EM}$ est colinéaire à $\vec{u}\iff\exists\,t\in\mathbb{R},\ \overrightarrow{EM}=t\,\vec{u}\iff(x-1\,;y-1\,;z)=(t\,;0\,;t)$, c'est-à-dire $x=t+1$, $y=1$, $z=t$.

2. a) $K\left(\dfrac{x+x'}{2}\,;\dfrac{y+y'}{2}\,;\dfrac{z+z'}{2}\right)$. D'après la question 1 :

$$K\in(D)\iff\exists\,t,\ \frac{x+x'}{2}=t+1,\ \frac{y+y'}{2}=1,\ \frac{z+z'}{2}=t\iff\exists\,t,\ \begin{cases}x'=2t+2-x\\y'=2-y\\z'=2t-z\end{cases}$$

b) (D) est dirigée par $\vec{u}$, donc $(MM')\perp(D)\iff\overrightarrow{MM'}\cdot\vec{u}=0\iff1\times(x'-x)+0\times(y'-y)+1\times(z'-z)=0$, soit $(x'-x)+(z'-z)=0$.
c) M' est le symétrique de M par rapport à (D) si et seulement si $K\in(D)$ et $(MM')\perp(D)$.

En reportant les expressions de 2.a) dans 2.b) :

$$(2t+2-2x)+(2t-2z)=0 \iff t=\frac{x+z-1}{2}.$$

Alors $x'=2t+2-x=(x+z-1)+2-x=z+1,\ y'=2-y,\ z'=2t-z=(x+z-1)-z=x-1$. D'où

$$S_D : \begin{cases} x'=z+1 \\ y'=2-y \\ z'=x-1 \end{cases}$$

3. a) $\vec{u}(1\,;0\,;1)$ est un vecteur normal à (π), qui passe par $E(1\,;1\,;0)$:

$$M(x\,;y\,;z)\in(\pi) \iff 1\,(x-1)+0\,(y-1)+1\,(z-0)=0 \iff x+z-1=0.$$

b) $M'=S_\pi(M)$ si et seulement si $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à $\vec{u}$ et le milieu de $[MM']$ appartient à (π). Il existe donc λ tel que $\overrightarrow{MM'}=\lambda\,\vec{u}$, soit $x'=x+\lambda$, $y'=y$, $z'=z+\lambda$, et

$$\frac{x+x'}{2}+\frac{z+z'}{2}-1=0 \iff x+z+\lambda-1=0 \iff \lambda=1-x-z.$$

D'où $x'=x+1-x-z=-z+1,\ y'=y,\ z'=z+1-x-z=-x+1$.
c) $M_1=S_\pi(M)=(1-z\,;\,y\,;\,1-x)$, puis $M'=S_D(M_1)$ donne, avec $S_D : (x_1,y_1,z_1)\mapsto(z_1+1\,;\,2-y_1\,;\,x_1-1)$:

$$x'=z_1+1=(1-x)+1=2-x, \qquad y'=2-y_1=2-y, \qquad z'=x_1-1=(1-z)-1=-z.$$

$$S_D\circ S_\pi : \begin{cases} x'=2-x \\ y'=2-y \\ z'=-z \end{cases}$$

d) S_E est la symétrie de centre $E(1\,;1\,;0)$: E est le milieu de $[MM']$, donc $x'=2\times1-x$, $y'=2\times1-y$, $z'=2\times0-z$:

$$S_E : \begin{cases} x'=2-x \\ y'=2-y \\ z'=-z \end{cases}$$

e) Les expressions analytiques de $S_D\circ S_\pi$ et de S_E sont identiques : $S_D\circ S_\pi=S_E$. La composée du demi-tour d'axe (D) et de la réflexion de plan (π), orthogonal à (D) en E, est la symétrie centrale de centre E.