

RÉPUBLIQUE DU CAMEROUN <i>Paix – Travail – Patrie</i> LYCÉE BILINGUE D'EMANA	Département de Mathématiques	Classe : Terminale D Durée : 3 h Coefficient : 4
Examineur : M. KADIROU HUSSEIN (PLEG)		Note : / 20

PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES

(15 points)

EXERCICE 1 : (5,5 points)

I/ On considère le polynôme complexe P défini par : $P(z) = 2z^4 + 6z^3 + 9z^2 + 6z + 2$.

- 1) Montrer que $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$. (0,5pt)
- 2) Soit z_0 une racine de P .
 - a) Montrer que $z_0 \neq 0$. (0,5pt)
 - b) En déduire que $\bar{z}_0$ est aussi une racine de P . (0,25pt)
 - c) Montrer que $\frac{1}{z_0}$ et $\frac{1}{\bar{z}_0}$ sont aussi les racines de P . (0,5pt)
- 3) Calculer $P(1-i) = 0$ et conclure. (0,5pt)
- 4) En déduire alors l'ensemble solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$. (0,75pt)

II/ On pose $Z = \frac{z-2i}{z+2}$ où $z = x+iy \neq -1$ et $Z = X+iY$.

- 1) Montrer que $X = \frac{x^2+y^2+2x-2y}{(x+2)^2+y^2}$ et $Y = -\frac{2x-2y+4}{(x+2)^2+y^2}$. (0,75pt)
- 2) Déterminer l'ensemble (C) des points $M(x,y)$ du plan muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$ pour lesquels Z est un nombre complexe imaginaire pur. (0,5pt)
- 3) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (D) des points $M(x,y)$ du même plan pour lesquels $|Z| = 1$. (0,5pt)
- 4) Construire (C) et (D) dans le repère $(o, \vec{u}, \vec{v})$. (0,75pt)

EXERCICE 2 : (4 points)

On considère le polynôme complexe f défini par : $f(z) = z^3 + (2-3i)z^2 + (-5+11i)z - 6+6i$.

- 1) Montrer que f admet une racine réelle à préciser. (0,75pt)
- 2) Vérifier que $f(2i) = 0$. (0,25pt)
- 3) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 + (3-2i)z - 6i = 0$.
 - a) Montrer que le discriminant de cette équation est $\Delta = 5+12i$. (0,25pt)
 - b) Déterminer sous forme algébrique les racines carrées de Δ . (0,5pt)
 - c) En déduire alors l'ensemble solution de l'équation (E) . (0,5pt)
- 4) Déterminer alors le nombre complexe w vérifiant $f(z) = (z-2i)(z+3)(z-w)$. (0,5pt)
- 5) En déduire alors l'ensemble solution de l'équation $f(z) = 0$. (0,75pt)
- 6) En déduire l'ensemble solution dans $\mathbb{C}^2$ du système d'équation $\begin{cases} z+z' = -3+2i \\ zz' = -6i \end{cases}$. (0,5pt)

EXERCICE 3 : (5,5 points)

SECTION 1

Soit g la fonction définie sur $D =]-\infty; -2[\cup]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}} - 1$.

- (1) Montrer que $g'(x) = \frac{-1}{(x^2+2x)\sqrt{x^2+2x}}$. (0,5pt)
- (2) Dresser le tableau de variation de g pour tout $x \in D$. (0,5pt)
- (3) En déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x \in D$. (0,25pt)

SECTION 2

Soit f la fonction définie sur $]-\infty; -2] \cup [0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - x$ et (C) sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- (1) Etudier la dérivabilité de f à droite de 0 et à gauche de -2 , puis interpréter. (0,75pt)
- (2) Montrer que $f'(x) = g(x)$ et dresser le tableau de variations de f . (0,75pt)
- (3) Etudier les branches infinies de la fonction f . (0,5pt)
- (4) Construire soigneusement (C) et ses asymptotes. (0,75pt)
- (5) Soit h la restriction de f sur $[0; +\infty[$.
 - a) Montrer que h réalise une bijection de $]0; +\infty[$ vers un intervalle K que l'on prendra le soin de préciser. (0,5pt)
 - b) Expliciter $h^{-1}(x)$ pour tout $x \in K$. (0,5pt)
 - c) Construire soigneusement au stylo à encre bleu la courbe (C') de h dans le repère précédent. (0,5pt)

PARTIE B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES

4,5 points

Situation

M. Abou est propriétaire d'une ferme avicole située sur un terrain trapézoïdale $ABCD$ qu'il avait acheté à 6500 FCFA le mètre carré. Dans un repère orthonormé d'unité 1dam, les sommets A et B ont leurs coordonnées respectives (a, b) et (a', b') tels que les nombres complexes $z_1 = a + ib$ et $z_2 = a' + ib'$ soient solutions de l'équation $z^2 - 7z + 16 - 2i = 0$ avec $a < a'$. Les autres sommets sont $C(0, -2)$ et $D(-2, 2)$.

Pour les besoins en eau de cette exploitation, estimés à 25 mètre-cubes par jour, il a fait construire un puits de profondeur 10m et délimité par l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $z\bar{z} - 2(z + \bar{z}) = -3,99$ (avec $z = x + iy$), qui se remplit chaque matin aux $\frac{4}{5}$ cinquièmes de tout son volume.

M. Abou, pour ravitailler la ferme en aliments, doit faire chaque semaine trois voyages (aller-retour) avec sa camionnette entre la provenderie, située au point E d'abscisse -7 appartenant à l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan vérifiant $|z + 2i| = |z + 2 - 2i|$ (avec $z = x + iy$), et le magasin de la ferme situé en C . Le coût de chaque voyage est estimé à $1000x + 300000$ FCFA, où x est le nombre de décamètres parcourus par la camionnette pour ce voyage.

On prendra $\pi = 3,14$ et on arrondira les résultats à l'unité près.

Tâches

- 1) Combien M. Abou dépense par semaine pour ravitailler la ferme en aliments? (1,5pt)
- 2) Le puits que M. Abou a fait construire est-il capable de satisfaire les besoins journaliers en eau de la ferme? (1,5pt)
- 1) Combien M. Abou avait-il dépensé pour l'achat de ce terrain? (1,5pt)

Présentation : 0,5pt

« La pensée n'est qu'un éclair au milieu d'une longue nuit. Mais c'est cet éclair qui est tout. »

— Henri Poincaré