http://sujetexa.com
Whatsapp : 677007035

LA PENSÉE ÉDUC	TRAVAIL - MÉTHODE - RÉUSSITE	TEL : 688321456 / 674845891
Centre de PREPAS EXAMENS : CEP - BEPC - PROBATOIRE - BTS	15 ANS D'EXPÉRIENCE ET DE RÉUSSITE	YAOUNDÉ - BAFOUSSAM - DOUALA

FICHE DE TRAVAUX DIRIGÉS N° 3

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES — APPROCHE PAR LES COMPÉTENCES

Classe : Terminales D & TI — Durée conseillée : 4 h — Coefficient : 4

Date : samedi 31 octobre 2026

Thème : Nombres complexes et géométrie, racine imaginaire pure d'un polynôme de degré 3 — Dérivées n-ièmes et dérivées de fonctions composées — Limites et comparaison — Fonction définie par intervalles, valeurs intermédiaires, prolongement par continuité.
Cette fiche, notée sur 20 points, comporte deux parties obligatoires. Toutes les questions sont obligatoires. La présentation et le soin apporté à la rédaction seront pris en compte.

RÉSUMÉ DES NOTIONS ABORDÉES

1. Racine imaginaire pure d'un polynôme de degré 3.

- Pour montrer que P admet une racine imaginaire pure : poser $z = iy$ ($y \in \mathbb{R}$), écrire $P(iy) = \mathscr{R}(y) + i\,\mathscr{I}(y)$ avec $\mathscr{R},\mathscr{I}$ réels. $P(iy) = 0 \iff \mathscr{R}(y) = 0$ *et* $\mathscr{I}(y) = 0$: on résout l'équation la plus simple, puis on retient la (ou les) valeur(s) qui vérifient *aussi* l'autre.
- On factorise alors $P(z) = (z - iy_0)(z^2 + az + b)$ (identification), puis on résout le trinôme avec $\Delta = a^2 - 4b$ et une racine carrée complexe de Δ.

2. Nombres complexes et géométrie. $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ distincts.

- $AB = |z_B - z_A|$; $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv \arg\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\ [2\pi]$. Si $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \pm i$: ABC est rectangle isocèle en A.
- $ABCD$ parallélogramme $\iff z_A + z_C = z_B + z_D$; c'est un carré si de plus ABC est rectangle isocèle en B.
- $\dfrac{z - z_A}{z - z_C}$ ($M \neq C$) est imaginaire pur $\iff M$ appartient au cercle de diamètre $[AC]$ (privé de C) ; il est réel $\iff M$ appartient à la droite (AC).
- Rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ : $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.

3. Dérivées.

- *Composée* : $(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$. Ainsi $(\sin u)' = u'\cos u$; $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$; $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$.
- *Dérivée n-ième* : on calcule f', f'', f''', on conjecture $f^{(n)}$, puis on démontre par *récurrence* (initialisation, hérédité). Exemples : $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$; $\cos^{(n)}(ax) = a^n \cos\left(ax + \dfrac{n\pi}{2}\right)$.

4. Limites et comparaison.

- Minoration : $f(x) \geq u(x)$ et $u \to +\infty \Rightarrow f \to +\infty$; majoration : $f \leq u$ et $u \to -\infty \Rightarrow f \to -\infty$.
- Encadrement (théorème des gendarmes) : $u \leq f \leq v$ et $u, v \to \ell \Rightarrow f \to \ell$. En particulier, si $|f(x) - \ell| \leq u(x)$ et $u(x) \to 0$, alors $f(x) \to \ell$. Rappels : $|\sin x| \leq 1$, $|\cos x| \leq 1$.

5. Fonction définie par intervalles, valeurs intermédiaires, prolongement.

- En un point de raccord a : f est continue en a si $\lim_{a^-} f = \lim_{a^+} f = f(a)$; dérivable en a si les limites des taux d'accroissement à gauche et à droite existent, sont finies et égales. Sinon la courbe a deux demi-tangentes distinctes (point anguleux).
- *Prolongement par continuité* : si f n'est pas définie en a mais $\lim_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, la fonction $\tilde{f}$ égale à f sur le domaine de f et telle que $\tilde{f}(a) = \ell$ est continue en a. Pour lever l'indétermination avec une racine : quantité conjuguée.
- *TVI et bijection* : f continue et strictement monotone sur un intervalle I est une bijection de I sur $f(I)$; pour tout $k \in f(I)$, $f(x) = k$ a une unique solution, encadrée en calculant des images ($f(a)$ et $f(b)$ de signes contraires).

PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES (15 points)

EXERCICE 1 : (5 points)

On considère le polynôme $P(z) = z^3 - (7+7i)z^2 + (-2+30i)z + 32 - 16i$.

sujetexa.com

1. Montre que P admet une racine imaginaire pure z_0 que tu détermineras. **0,75 pt**
2. a) Détermine les nombres complexes a et b tels que $P(z) = (z - z_0)(z^2 + az + b)$. **0,75 pt**
   b) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. **0,5 pt**
3. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B et C dont les affixes sont les solutions de $P(z) = 0$: $z_A = 2i$, $z_B = 3 + i$ et $z_C = 4 + 4i$.
   a) Calcule $\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$. **0,5 pt**
   b) Déduis-en la nature du triangle ABC. **0,25 pt**
   c) Détermine l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un carré. **0,5 pt**
   d) Détermine l'ensemble (Γ) des points $M(z)$ tels que $\dfrac{z - z_A}{z - z_C}$ soit un imaginaire pur $(z \neq z_C)$, puis vérifie que $B \in (\Gamma)$. **1 pt**
   e) Donne l'écriture complexe de la rotation r de centre B qui transforme A en C et précise son angle. **0,75 pt**

EXERCICE 2 : (5 points)

I. Dérivées successives.

1. Soit $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ sur $]-2; +\infty[$. Démontre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}}$. **0,75 pt**
2. Soit $g(x) = \cos(2x)$ sur $\mathbb{R}$. Démontre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g^{(n)}(x) = 2^n \cos\left(2x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$. **0,75 pt**

II. Dérivées de fonctions composées. Calcule la dérivée de chacune des fonctions suivantes, en précisant leur ensemble de dérivabilité :

1. $u(x) = \sin(3x^2 - x)$; **0,5 pt**
2. $v(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 5}$; **0,5 pt**
3. $w(x) = \dfrac{1}{1 + \sin^2 x}$. **0,5 pt**

III. Limites et comparaison. En utilisant un théorème de comparaison, détermine :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - 3 + 2\sin x\right)$; **0,5 pt**
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cos x}{x^2 + 1}$; **0,5 pt**
3. $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \sin \dfrac{1}{x}$; **0,5 pt**
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x + \sin x}{x + \cos x}$. **0,5 pt**

EXERCICE 3 : (5 points)

I. Soit φ la fonction définie par $\varphi(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$.

1. Détermine l'ensemble de définition de φ. **0,25 pt**
2. Montre que φ admet une limite finie en 0, puis définis le prolongement par continuité de φ en 0. **0,75 pt**

II. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x + \dfrac{1}{2} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \varphi(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

On note $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 4 cm.

3. Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ et interprète graphiquement. **0,5 pt**
4. a) Étudie la continuité de f en 0. **0,25 pt**
   b) Étudie la dérivabilité de f en 0. **0,75 pt**
   c) Interprète graphiquement les résultats. **0,25 pt**
5. Étudie le sens de variation de f sur chacun des intervalles $]-\infty; 0]$ et $[0; +\infty[$, puis dresse le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$. **0,75 pt**
6. Montre que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser. Montre que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α et que $-0{,}25 < \alpha < -0{,}2$. **0,75 pt**

sujetexa.com

7. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = \dfrac{1}{4}$. **0,25 pt**
8. Construis $(\mathscr{C}_f)$ en traçant les demi-tangentes au point d'abscisse 0. **0,5 pt**

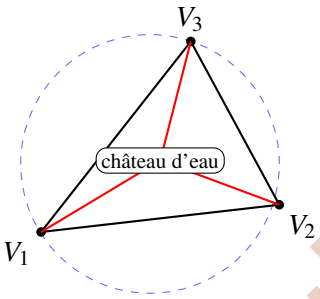
PARTIE B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES (5 points)

Compétence visée : résoudre une situation problème en déployant un raisonnement mathématique et en communiquant à l'aide du langage mathématique dans des situations de vie où interviennent les nombres complexes, les limites et le prolongement par continuité.

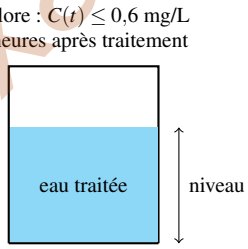
SITUATION :

La commune de Mbouda réalise un projet d'adduction d'eau potable. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 10 m (1 dam).

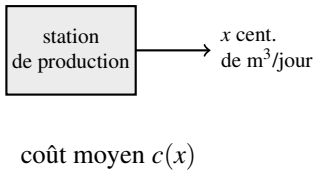
- Trois villages V_1, V_2 et V_3 sont situés aux points dont les affixes sont les solutions de l'équation (E_1) : $z^3 - (10+9i)z^2 + (46+40i)z - 50 + 36i = 0$, dont l'une est imaginaire pure. Le **château d'eau** doit être construit à égale distance des trois villages, puis relié à chacun d'eux par une conduite rectiligne. Le mètre de conduite coûte 2 500 FCFA.
- Le château d'eau est traité au chlore. La concentration de chlore, en mg/L, t heures après le traitement ($t \geq 0$), est $C(t) = 0{,}5 + \dfrac{2+\sin t}{t+1}$. La norme impose une concentration **inférieure ou égale à 0,6 mg/L**.
- La station produit chaque jour x centaines de m^3 d'eau ($x > 0$). Le coût moyen de production, en milliers de FCFA par m^3, est $c(x) = \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x}$.



Plan des trois villages et du château



Château d'eau



coût moyen $c(x)$

Schéma de la situation (les positions exactes des villages sont à déterminer).

Tâches :

1. Quelle somme la commune devra-t-elle dépenser pour les trois conduites reliant le château d'eau aux villages ? **1,5 pt**
2. Vers quelle valeur tend la concentration de chlore ? À partir de quelle heure peut-on garantir, grâce à un encadrement de $C(t)$, que la norme est respectée ? **1,5 pt**
3. Quel est le coût moyen du m^3, en FCFA, lorsque la production journalière devient très petite ? Pour quelle production journalière le coût moyen est-il égal à 100 FCFA par m^3 ? **1,5 pt**

Présentation : **0,5 pt**

sujetexa.com