



DEVOIR HARMONISÉ DE MATHÉMATIQUES DU JEUDI 08 OCTOBRE 2026

PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES (15 points)

EXERCICE 1 : (4 points)

Pour tout entier naturel n , on pose : $A_n = 4^n + 6n - 1$.

1. a) Vérifier que $A_0 = 0$, puis calculer A_1 et A_2 . (0,5 pt)
 b) Démontrer que $4^3 \equiv 1 [9]$. En déduire que, pour tout entier naturel n , $4^n \equiv 4^r [9]$, où r désigne le reste de la division euclidienne de n par 3. (1 pt)
 c) Démontrer que $6n - 1 \equiv 6r - 1 [9]$, puis, en discutant suivant les valeurs de r , établir que 9 divise A_n pour tout entier naturel n . (1 pt)
2. Déterminer l'ensemble E des entiers naturels n tels que A_n soit divisible par 5. (1 pt)
3. Écrire le nombre A_5 dans le système binaire, puis dans le système de numération de base 4. (0,5 pt)

EXERCICE 2 : (4 points)

On considère l'équation (E) : $17x - 23y = 4$, d'inconnue $(x; y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

1. a) Justifier que l'équation (E) admet au moins une solution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. (0,25 pt)
 b) À l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer un couple d'entiers relatifs $(u; v)$ tel que : $17u - 23v = 1$, puis en déduire une solution particulière de (E). (0,75 pt)
 c) Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. (0,75 pt)
2. Soit N un entier naturel vérifiant simultanément : $N \equiv 5 [17]$ et $N \equiv 9 [23]$.
 a) Démontrer que $N \equiv 124 [391]$. (1 pt)
 b) En déduire le plus petit entier naturel supérieur à 2026 vérifiant ces deux congruences. (0,5 pt)
3. Déterminer tous les couples $(a; b)$ d'entiers naturels non nuls tels que :
 $a + b = 60$ et $\text{PPCM}(a; b) = 72$. (0,75 pt)

EXERCICE 3 : (4 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On considère le nombre complexe :

$$u = \sqrt{2 + \sqrt{3}} + i\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

1. a) Démontrer que $u^2 = 2\sqrt{3} + 2i$, puis écrire u^2 sous forme trigonométrique. (1 pt)
 b) En déduire le module et un argument de u (le choix sera justifié). (0,75 pt)
 c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ sous la forme $\frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{2}}{4}$. (0,75 pt)
2. On pose $v = u^6$.
 a) Démontrer que $v = 64i$. (0,25 pt)
 b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 = 64i$ et écrire les solutions sous forme exponentielle. (0,75 pt)
 c) Démontrer que les points images de ces solutions sont les sommets d'un hexagone régulier dont on précisera le centre et le rayon du cercle circonscrit. (0,5 pt)

EXERCICE 4 : (3 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$. Soit m un nombre complexe non nul. On considère l'équation :

$$(F) : z^2 - (1 + i)mz + im^2 = 0$$

1. a) Calculer le discriminant Δ de (F) et vérifier que $(1 - i)m$ en est une racine carrée. (0,5 pt)
b) En déduire que les solutions de (F) sont $z_1 = m$ et $z_2 = im$. (0,5 pt)
2. On note A et B les points d'affixes respectives z_1 et z_2 .
 - a) Démontrer que le triangle OAB est rectangle et isocèle en O. (0,5 pt)
 - b) Déterminer, en fonction de m , l'affixe du point C tel que OACB soit un carré. (0,5 pt)
3. Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M d'affixe m pour lesquels l'aire du triangle OAB est égale à 8 unités d'aire. (0,5 pt)
4. Soit E le point d'affixe $1 + i$. Déterminer l'ensemble (D) des points M d'affixe m pour lesquels les points O, C et E sont alignés. (0,5 pt)

PARTIE B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES (5 points)

SITUATION

La coopérative agricole « **LA GRAINE D'OR** », située à Nkoteng, prépare la campagne cacaoyère 2026-2027. Monsieur MBALLA, nouvellement nommé gérant, doit présenter trois dossiers au conseil d'administration qui se tiendra le 30 octobre 2026.

Dossier 1. Le magasin central abrite un stock de sacs de cacao dont le nombre est compris entre 1 500 et 2 000. Le magasinier a consigné dans son registre les constats suivants : rangés par lots de 12 sacs, il reste 7 sacs ; rangés par lots de 20 sacs, il reste 15 sacs ; rangés par lots de 21 sacs, il reste 16 sacs. Le conseil d'administration exige de connaître l'effectif exact de ce stock avant toute mise en vente.

Dossier 2. Le 15 septembre 2026, la coopérative a vendu, en une seule journée, des sacs de café de deux conditionnements uniquement : le sac de 25 kg, facturé 32 000 F CFA l'unité, et le sac de 40 kg, facturé 49 000 F CFA l'unité. Le registre des ventes de cette journée indique une recette exactement égale à 1 000 000 F CFA, mais la page mentionnant le nombre de sacs vendus a été déchirée. Le comptable souhaite néanmoins actualiser la fiche de stock, qui est tenue en kilogrammes.

Dossier 3. Le domaine de la coopérative est représenté sur un plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ dont l'unité de longueur représente 100 m. Le forage est situé au point O. La coopérative projette d'implanter trois silos identiques aux sommets d'un triangle équilatéral dont le centre est le forage O. Le premier silo est déjà construit au point A d'affixe $a = 3\sqrt{3} + 3i$. Le conseil d'administration a décidé de clôturer entièrement le terrain triangulaire délimité par les trois silos ; le mètre linéaire de clôture est facturé 6 500 F CFA par l'entreprise retenue.

TÂCHES

- Tâche 1 :** Déterminer l'effectif exact du stock de sacs de cacao du magasin central. (1,5 pt)
- Tâche 2 :** Déterminer la masse totale de café vendue par la coopérative le 15 septembre 2026. (1,5 pt)
- Tâche 3 :** Déterminer le montant que la coopérative devra prévoir pour la réalisation de la clôture (on donnera le résultat arrondi au millier de francs CFA près). (1,5 pt)

Présentation (0,5 pt)