

|                                                                                                  |                                                                          |                                                       |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| <b>RÉPUBLIQUE DU CAMEROUN</b><br><i>Paix – Travail – Patrie</i><br><b>LYCÉE BILINGUE D'EMANA</b> | <b>DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES</b><br><i>Année scolaire : 2026–2027</i> | Classe : Première C<br>Durée : 3 h<br>Coefficient : 6 |
| <b>Examineur : M. KADIROU HUSSEIN (PLEG)</b>                                                     |                                                                          | <b>Note : ..... / 20</b>                              |

La qualité de la rédaction et la présentation de la copie seront prises en compte dans l'évaluation de la copie de l'élève.

## PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES

(15) points

### EXERCICE 1 : (04,00 points)

- Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  les systèmes  $(S_1) \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = -3 \end{cases}$  et  $(S_2) \begin{cases} x^3 + y^3 = 19 \\ x + y = 1 \end{cases}$ . (1,25pt)
- On considère un polynôme  $P$  de degré 3 à coefficients réels tel que  $\begin{cases} P(0) = 0 \\ P(x+1) - P(x) = x^2 \end{cases}$  ;
  - Calculer  $P(1)$  et  $P(-1)$ . (0,25pt)
  - En supposant que  $P(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx$  ; déterminer les réels  $a$  et  $b$ . (0,75pt)
  - Déduire de ce qui précède, l'expression en fonction de l'entier naturel  $n$  de la somme :  $S(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \dots + n^2$ . (0,75pt)
- Soit  $m$  un paramètre réel. On considère l'équation  $(E_m) : x^2 + 6x + 5 - 2m = 0$ . Déterminer les valeurs de  $m$  pour lesquelles  $(E_m)$  admet deux solutions négatives. (1pt)

### EXERCICE 2 : (04,00 points)

- On donne dans le plan le cercle  $(C)$  et la droite  $(D_m)$  d'équations respectives  $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$  et  $2x + y - m = 0$ .
  - Déterminer les coordonnées du centre  $A$  et la valeur du rayon de ce cercle. (0,5pt)
  - Déterminer en fonction de  $m$  la distance de  $A$  à  $(D_m)$ . (0,25pt)
  - En déduire pour quelles valeurs de  $m$ ,  $(D_m)$  est tangent à  $(C)$ . (0,25pt)
  - Ecrire une équation normal de la droite  $(D_{10})$ . (0,25pt)
- On considère l'ensemble  $(\Sigma)$  des points  $M(x; y)$  tels que  $\begin{cases} x = 4 + 5 \cos(\beta) \\ y = -1 + 5 \sin(\beta) \end{cases} \quad (\beta \in \mathbb{R})$  ;
  - Démontrer que  $(\Sigma)$  est cercle dont on précisera le centre  $\Omega$  et le rayon  $r$ . (0,5pt)
  - Montrer  $(\Sigma)$  a pour équation cartésienne  $x^2 + y^2 - 8x + 2y - 8 = 0$ . (0,5pt)
  - Vérifier que le point  $M_0(-1; -1)$  appartient à  $(\Sigma)$  puis écrire de deux manières différentes une équation de la tangente  $(T)$  en  $(\Sigma)$  au point  $M_0$ . (1pt)
- Soient  $(D_1)$  et  $(D_2)$  les droites d'équations respectives :

$$3x - 4y + 6 = 0 \quad \text{et} \quad -6x + 8y + 9 = 0$$

- Déterminer une équation paramétrique du cercle tangent à ces deux droites et dont le centre a une ordonnée nulle. (0,75pt)

### EXERCICE 3 : (04,00 points)

- En utilisant les formules d'addition, sachant que  $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$  calculer les valeurs exactes de  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ . (0,5pt)
- En utilisant les formules de duplication, montrer que  $\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$ . (0,75pt)
- En utilisant les formules de linéarisation, donner les valeurs exactes de  $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$  et de  $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ . (0,25pt)
- On considère l'expression  $A = 2\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \left( \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{7}\right) \right)$  ;

- a) sachant que  $\frac{6\pi}{7} = \pi - \frac{\pi}{7}$ , montrer que  $\sin\left(\frac{6\pi}{7}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$ . (0,25pt)
- b) En utilisant les formules de transformation, montrer que  $A = \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$ . (0,75pt)
- c) Dédurre que  $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{7}\right) = \frac{1}{2}$ . (0,25pt)
- 5) a) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation (E) :  $x^2 + 2x - 1 = 0$ . (0,5pt)
- b) sachant que  $\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2 x}$ , montrer que  $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$  est solution de l'équation (E). (0,5pt)
- c) Dédurre la valeur exacte de  $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$ . (0,25pt)

#### EXERCICE 4 : (03,00 points)

- 1) On considère dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $(E_m) : x^2 + 6x + 5 + m^2 = 0$  ;
- a) Montrer que le discriminant en fonction de  $m$  est  $\Delta_m = 4(4 - m^2)$ . (0,25pt)
- b) Dresser le tableau signe de  $\Delta_m$ . (0,25pt)
- c) Déterminer suivant les valeurs de  $m$  les solutions de l'équation  $(E_m)$ . (0,5pt)
- 2) On considère le polynôme  $p(x) = 2x^2 - (2\sqrt{3} + \sqrt{2})x + \sqrt{6}$ .
- a) Montrer que  $14 - 4\sqrt{6} = (2\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$ . (0,25pt)
- b) Montrer que le discriminant du polynôme  $p$  est  $\Delta = 14 - 4\sqrt{6}$  et déduire que  $p$  admet deux racines distinctes. (0,25pt)
- c) Dédurre dans  $\mathbb{R}$  les solutions de l'équation  $p(x) = 0$ . (0,25pt)
- 3) On considère le polynôme  $q(x) = 2x^3 - (2\sqrt{3} + \sqrt{2} + 2)x^2 + (2\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{6})x - \sqrt{6}$  ;
- a) Montrer que 1 est racine du polynôme  $q(x)$ . (0,25pt)
- b) Montrer que  $q(x) = (x - 1)p(x)$ . (0,25pt)
- c) Dédurre dans  $\mathbb{R}$  les solutions de l'équation  $q(x) = 0$ . (0,25pt)
- d) Déterminer l'ensemble solution de l'inéquation  $q(x) \leq 0$ . (0,5pt)

#### EXERCICE : ( points)

##### PARTIE B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES

(05 points)

##### Situation :

Mr NGANSO possède un terrain ayant la forme d'un triangle rectangle d'aire  $750 m^2$  dont le plus long côté mesure  $65m$ . Afin de protéger ce terrain des intrusions de bêtes, il décide de l'entourer d'une triple rangée de fil barbelé qui coûte 1750 F le mètre. Il dépose pour ce travail un montant de 800 000F.

Sur ce terrain, son projet est de construire un magasin rectangulaire et il aimerait cimenter le sol. Le technicien lui demande de payer 1500 F le mètre carré. Seulement, il a oublié les dimensions du magasin et se rappelle néanmoins que la longueur et la largeur dont les valeurs de  $m$  pour lesquelles la droite (D) :  $x + y + 7 - m = 0$  et le cercle d'équation (C) :  $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 6 = 0$  soient tangents.

Il a prévu un montant de 95000 F pour cimenter ce sol.

Il souhaite entourer ce magasin avec deux rangées de fils barbelés dont  $n$  mètres coûtent 7 650 FCFA ;  $n$  étant solution de l'équation  $4 + \sqrt{n - 2} = n$

##### TACHES :

- Le montant dont dispose Mr NGANSO lui permettra d'entourer son champ de forme triangulaire? (1,5pt)
- Le montant dont dispose Mr NGANSO lui permettra de cimenter le sol de son magasin? (1,5pt)
- Quel montant faudra-t-il à Mr NGANSO pour clôturer son magasin? (1,5pt)

Présentation : 0,5pt

« Ce n'est pas assez d'avoir l'esprit bon, mais le principal est de l'appliquer bien. »

— René Descartes

|                                                                                                  |                                                      |                                                       |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| <b>RÉPUBLIQUE DU CAMEROUN</b><br><i>Paix – Travail – Patrie</i><br><b>LYCÉE BILINGUE D'EMANA</b> | <b>CORRIGÉ ET<br/>BARÈME</b><br><b>Mathématiques</b> | Classe : Première C<br>Durée : 3 h<br>Coefficient : 6 |
| <b>Examineur : M. KADIROU HUSSEIN (PLEG)</b>                                                     |                                                      | <b>Total : 20 points</b>                              |

Les points sont indiqués entre crochets. Toute méthode correcte et justifiée est acceptée.

## PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES

(15 points)

### EXERCICE 1 : (4 points)

#### 1) Résolution des systèmes

[1,25 pt]

$(S_1) : x^2 + y^2 = 10$  et  $xy = -3$ . On a  $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 10 - 6 = 4$ , donc  $x + y = 2$  ou  $x + y = -2$ .

$x$  et  $y$  sont alors les racines de  $t^2 - St + P = 0$  avec  $P = -3$  :

- $S = 2 : t^2 - 2t - 3 = 0$ , soit  $t = 3$  ou  $t = -1$  ;
- $S = -2 : t^2 + 2t - 3 = 0$ , soit  $t = 1$  ou  $t = -3$ .

$$S_{(S_1)} = \{(3; -1), (-1; 3), (1; -3), (-3; 1)\} \quad (0,75)$$

$(S_2) : x^3 + y^3 = 19$  et  $x + y = 1$ . On a  $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 1 - 3xy$ , donc  $1 - 3xy = 19$ , soit  $xy = -6$ .

$x$  et  $y$  sont les racines de  $t^2 - t - 6 = 0$ , soit  $t = 3$  ou  $t = -2$ .

$$S_{(S_2)} = \{(3; -2), (-2; 3)\} \quad (0,5)$$

#### 2) a) Calcul de $P(1)$ et $P(-1)$

[0,25 pt]

Pour  $x = 0 : P(1) - P(0) = 0^2 = 0$ , donc  $P(1) = 0$ .

Pour  $x = -1 : P(0) - P(-1) = (-1)^2 = 1$ , donc  $P(-1) = P(0) - 1 = -1$ .

$$P(1) = 0 \quad \text{et} \quad P(-1) = -1$$

#### 2) b) Détermination de $a$ et $b$

[0,75 pt]

Avec  $P(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx$ , les égalités  $P(1) = 0$  et  $P(-1) = -1$  donnent le système

$$\begin{cases} \frac{1}{3} + a + b = 0 \\ -\frac{1}{3} + a - b = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b = -\frac{1}{3} \\ a - b = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

En additionnant :  $2a = -1$ , donc  $a = -\frac{1}{2}$ , puis  $b = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ .

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{6}, \quad P(x) = \frac{x(x-1)(2x-1)}{6}$$

$$\text{Vérification : } P(x+1) - P(x) = \frac{(x+1)x(2x+1) - x(x-1)(2x-1)}{6} = \frac{6x^2}{6} = x^2.$$

#### 2) c) Expression de $S(n)$

[0,75 pt]

Pour tout entier  $k$ ,  $k^2 = P(k+1) - P(k)$ . En sommant de  $k = 1$  à  $n$  (les termes se simplifient) :

$$S(n) = \sum_{k=1}^n [P(k+1) - P(k)] = P(n+1) - P(1) = P(n+1) \quad (\text{car } P(1) = 0).$$

$$S(n) = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

**3) Valeurs de  $m$  pour lesquelles  $(E_m)$  admet deux solutions négatives** [1 pt]

$(E_m) : x^2 + 6x + 5 - 2m = 0$ . Son discriminant est  $\Delta = 36 - 4(5 - 2m) = 16 + 8m = 8(m + 2)$  (0,25). Deux solutions distinctes existent si  $\Delta > 0$ , soit  $m > -2$  (0,25). La somme des solutions vaut  $S = -6 < 0$  ; elles sont de même signe, donc négatives, si leur produit est positif :  $P = 5 - 2m > 0$ , soit  $m < \frac{5}{2}$  (0,5).

$$m \in \left] -2; \frac{5}{2} \right[$$

Remarque : pour  $m = -2$ , la solution est double ( $x = -3$ ) ; pour  $m = \frac{5}{2}$ , les solutions sont 0 et  $-6$  (une seule est négative).

**EXERCICE 2 : (4 points)**

**1) a) Centre et rayon de  $(C)$**  [0,5 pt]

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0 \iff (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 5.$$

$$A(-2; 1) \quad \text{et} \quad r = \sqrt{5}$$

**1) b) Distance de  $A$  à  $(D_m)$**  [0,25 pt]

$$d(A, (D_m)) = \frac{|2(-2) + 1 - m|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|-3 - m|}{\sqrt{5}}.$$

$$d(A, (D_m)) = \frac{|m + 3|}{\sqrt{5}}$$

**1) c) Valeurs de  $m$  pour lesquelles  $(D_m)$  est tangente à  $(C)$**  [0,25 pt]

$$(D_m) \text{ est tangente à } (C) \text{ si } d(A, (D_m)) = r : \frac{|m + 3|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \iff |m + 3| = 5.$$

$$m = 2 \quad \text{ou} \quad m = -8$$

**1) d) Équation normale de  $(D_{10})$**  [0,25 pt]

$(D_{10}) : 2x + y - 10 = 0$ . Le vecteur normal  $(2; 1)$  a pour norme  $\sqrt{5}$  ; on divise l'équation par  $\sqrt{5}$  :

$$\frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y - 2\sqrt{5} = 0 \quad \left( \text{soit } \frac{2\sqrt{5}}{5}x + \frac{\sqrt{5}}{5}y - 2\sqrt{5} = 0 \right)$$

**2) a)  $(\Sigma)$  est un cercle** [0,5 pt]

$$(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 25 \cos^2 \beta + 25 \sin^2 \beta = 25.$$

$$(\Sigma) \text{ est le cercle de centre } \Omega(4; -1) \text{ et de rayon } r = 5$$

**2) b) Équation cartésienne de  $(\Sigma)$**  [0,5 pt]

$$(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 25 \iff x^2 - 8x + 16 + y^2 + 2y + 1 - 25 = 0.$$

$$x^2 + y^2 - 8x + 2y - 8 = 0$$

**2) c) Point  $M_0(-1; -1)$  et tangente  $(T)$**  [1 pt]

**Appartenance** (0,25) :  $(-1)^2 + (-1)^2 - 8(-1) + 2(-1) - 8 = 1 + 1 + 8 - 2 - 8 = 0$ . Donc  $M_0 \in (\Sigma)$ .

**Première méthode** (0,375) :  $(T)$  est perpendiculaire à  $\overrightarrow{\Omega M_0} = (-5; 0)$ . Pour  $M(x; y) \in (T)$  :  $\overrightarrow{\Omega M_0} \cdot \overrightarrow{M_0 M} = 0 \iff -5(x + 1) + 0 \times (y + 1) = 0$ .

**Deuxième méthode** (0,375) : par dédoublement,  $x_0x + y_0y - 4(x + x_0) + (y + y_0) - 8 = 0$  avec  $M_0(-1; -1)$  :  $-x - y - 4(x - 1) + (y - 1) - 8 = 0 \iff -5x - 5 = 0$ .

$$(T) : x = -1 \quad (\text{droite verticale})$$

**3) Cercle tangent à  $(D_1)$  et  $(D_2)$ , de centre d'ordonnée nulle****[0,75 pt]**

$(D_2) : -6x + 8y + 9 = 0 \iff 3x - 4y - \frac{9}{2} = 0$ . Les droites  $(D_1) : 3x - 4y + 6 = 0$  et  $(D_2)$  sont parallèles (0,25). Un cercle tangent aux deux a son centre sur la droite équidistante, d'équation

$$3x - 4y + \frac{6 - \frac{9}{2}}{2} = 0 \iff 3x - 4y + \frac{3}{4} = 0.$$

Le centre  $I(x_I; 0)$  vérifie  $3x_I + \frac{3}{4} = 0$ , donc  $x_I = -\frac{1}{4}$  (0,25). Le rayon est la distance de  $I$  à  $(D_1)$  :  
 $r = \frac{|3(-\frac{1}{4}) + 6|}{5} = \frac{21}{20}$ . (Vérification : la distance de  $I$  à  $(D_2)$  vaut aussi  $\frac{21}{20}$ .)

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{4} + \frac{21}{20} \cos t \\ y = \frac{21}{20} \sin t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \textbf{(0,25)}$$

**EXERCICE 3 : (4 points)****1) Valeurs exactes de  $\cos \frac{\pi}{12}$  et  $\sin \frac{\pi}{12}$** **[0,5 pt]**

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin \frac{\pi}{12} &= \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

**2) Formule  $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$** **[0,75 pt]**

$\cos 3x = \cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$ . Avec  $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$  et  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$  :

$$\cos 3x = (2 \cos^2 x - 1) \cos x - 2 \sin^2 x \cos x = (2 \cos^2 x - 1) \cos x - 2(1 - \cos^2 x) \cos x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$$

**3) Valeurs exactes de  $\cos \frac{\pi}{8}$  et  $\sin \frac{\pi}{8}$** **[0,25 pt]**

$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$  et  $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$ . Pour  $a = \frac{\pi}{8}$  :  $\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$  et  $\sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$ . Comme  $\frac{\pi}{8} \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ , les deux nombres sont positifs.

$$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \quad \sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

**4) a)  $\sin \frac{6\pi}{7} = \sin \frac{\pi}{7}$** **[0,25 pt]**

$$\sin \frac{6\pi}{7} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right) = \sin \frac{\pi}{7} \quad (\text{car } \sin(\pi - a) = \sin a).$$

**4) b)  $A = \sin \frac{\pi}{7}$** **[0,75 pt]**

On utilise  $2 \sin a \cos b = \sin(a + b) + \sin(a - b)$  avec  $a = \frac{\pi}{7}$  :

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} &= \sin \frac{2\pi}{7}, \\ 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7} &= \sin \frac{4\pi}{7} + \sin\left(-\frac{2\pi}{7}\right) = \sin \frac{4\pi}{7} - \sin \frac{2\pi}{7}, \\ 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{5\pi}{7} &= \sin \frac{6\pi}{7} + \sin\left(-\frac{4\pi}{7}\right) = \sin \frac{6\pi}{7} - \sin \frac{4\pi}{7}. \end{aligned}$$

En additionnant, les termes se simplifient :  $A = \sin \frac{6\pi}{7} = \sin \frac{\pi}{7}$  d'après la question a).

4) c) Valeur de  $\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7}$  [0,25 pt]

$A = 2 \sin \frac{\pi}{7} \cdot S = \sin \frac{\pi}{7}$  avec  $S = \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7}$ . Comme  $\sin \frac{\pi}{7} \neq 0$ , on simplifie :

$$S = \frac{1}{2}$$

5) a) Résolution de  $(E) : x^2 + 2x - 1 = 0$  [0,5 pt]

$\Delta = 4 + 4 = 8 > 0$ , donc  $x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$ .

$$S = \{-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2}\}$$

5) b)  $\tan \frac{\pi}{8}$  est solution de  $(E)$  [0,5 pt]

Posons  $t = \tan \frac{\pi}{8}$  ( $t \neq \pm 1$ ). La formule donne  $\tan \frac{\pi}{4} = \frac{2t}{1-t^2}$ . Comme  $\tan \frac{\pi}{4} = 1 : 2t = 1 - t^2$ , soit  $t^2 + 2t - 1 = 0$ . Donc  $t$  est solution de  $(E)$ .

5) c) Valeur exacte de  $\tan \frac{\pi}{8}$  [0,25 pt]

$\frac{\pi}{8} \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ , donc  $\tan \frac{\pi}{8} > 0$  : c'est la racine positive de  $(E)$ .

$$\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$$

#### EXERCICE 4 : (3 points)

1) a) Discriminant de  $(E_m) : x^2 + 6x + 5 + m^2 = 0$  [0,25 pt]

$$\Delta_m = 6^2 - 4(5 + m^2) = 16 - 4m^2 = 4(4 - m^2).$$

1) b) Tableau de signe de  $\Delta_m$  [0,25 pt]

$$\Delta_m = 4(2 - m)(2 + m).$$

|            |           |      |     |           |
|------------|-----------|------|-----|-----------|
| $m$        | $-\infty$ | $-2$ | $2$ | $+\infty$ |
| $\Delta_m$ |           | $-$  | $+$ | $-$       |

1) c) Solutions de  $(E_m)$  suivant les valeurs de  $m$  [0,5 pt]

- Si  $m < -2$  ou  $m > 2$  :  $\Delta_m < 0$ , il n'y a pas de solution réelle.
- Si  $m = -2$  ou  $m = 2$  :  $\Delta_m = 0$ , solution double  $x = -3$ .
- Si  $-2 < m < 2$  : deux solutions  $x_1 = -3 - \sqrt{4 - m^2}$  et  $x_2 = -3 + \sqrt{4 - m^2}$ .

2) a)  $14 - 4\sqrt{6} = (2\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$  [0,25 pt]

$$(2\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = 12 - 4\sqrt{6} + 2 = 14 - 4\sqrt{6}.$$

2) b) Discriminant de  $p$  et racines distinctes [0,25 pt]

$p(x) = 2x^2 - (2\sqrt{3} + \sqrt{2})x + \sqrt{6}$  :  $\Delta = (2\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - 8\sqrt{6} = 12 + 4\sqrt{6} + 2 - 8\sqrt{6} = 14 - 4\sqrt{6}$ . D'après a),  $\Delta = (2\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 > 0$  (car  $2\sqrt{3} \neq \sqrt{2}$ ) :  $p$  admet deux racines distinctes.

2) c) Solutions de  $p(x) = 0$  [0,25 pt]

$$x = \frac{(2\sqrt{3} + \sqrt{2}) \pm (2\sqrt{3} - \sqrt{2})}{4} : x = \sqrt{3} \text{ ou } x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$S = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{3} \right\}$$

3) a) 1 est racine de  $q$

[0,25 pt]

$$q(1) = 2 - (2\sqrt{3} + \sqrt{2} + 2) + (2\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{6}) - \sqrt{6} = 0.$$

3) b)  $q(x) = (x - 1)p(x)$

[0,25 pt]

$$(x - 1)p(x) = 2x^3 - (2\sqrt{3} + \sqrt{2})x^2 + \sqrt{6}x - 2x^2 + (2\sqrt{3} + \sqrt{2})x - \sqrt{6} = q(x).$$

3) c) Solutions de  $q(x) = 0$

[0,25 pt]

$$q(x) = 0 \iff x = 1 \text{ ou } p(x) = 0.$$

$$S = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}; 1; \sqrt{3} \right\}$$

3) d) Inéquation  $q(x) \leq 0$

[0,5 pt]

Comme  $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,71 < 1 < \sqrt{3} \approx 1,73$  et que  $p(x) = 2 \left( x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) (x - \sqrt{3})$  :

| $x$     | $-\infty$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|----------------------|---|------------|-----------|
| $x - 1$ | —         | —                    | 0 | +          | +         |
| $p(x)$  | +         | 0                    | — | 0          | +         |
| $q(x)$  | —         | 0                    | + | 0          | +         |

$$S = \left] -\infty; \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \cup [1; \sqrt{3}]$$

**Tâche 1 : l'argent suffit-il pour clôturer le terrain ?****[1,5 pt]**

**Dimensions du terrain** (0,75). Soient  $a$  et  $b$  les côtés de l'angle droit. L'aire donne  $\frac{ab}{2} = 750$ , soit  $ab = 1500$  ; le théorème de Pythagore donne  $a^2 + b^2 = 65^2 = 4225$ . Alors

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 4225 + 3000 = 7225, \quad \text{donc } a + b = 85.$$

$a$  et  $b$  sont les racines de  $t^2 - 85t + 1500 = 0$  :  $\Delta = 7225 - 6000 = 1225 = 35^2$ , donc  $t = \frac{85 \pm 35}{2}$ , soit 60 et 25. Les côtés mesurent 25 m, 60 m et 65 m.

**Coût** (0,5). Périmètre :  $25 + 60 + 65 = 150$  m. Triple rangée :  $3 \times 150 = 450$  m, donc  $450 \times 1750 = 787\,500$  F.

**Conclusion** (0,25).  $787\,500 \text{ F} < 800\,000 \text{ F}$  :

**Oui, le montant de 800 000 F suffit (il reste 12 500 F).**

**Tâche 2 : l'argent suffit-il pour cimenter le magasin ?****[1,5 pt]**

**Dimensions du magasin** (0,75). Le cercle  $(C)$  :  $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 6 = 0 \iff (x-1)^2 + (y-1)^2 = 8$  a pour centre  $I(1;1)$  et pour rayon  $2\sqrt{2}$ . La droite  $(D)$  :  $x + y + 7 - m = 0$  est tangente à  $(C)$  si

$$d(I, (D)) = \frac{|1 + 1 + 7 - m|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \iff |9 - m| = 4 \iff m = 5 \text{ ou } m = 13.$$

La largeur est 5 m et la longueur 13 m.

**Coût** (0,5). Aire :  $13 \times 5 = 65 \text{ m}^2$  ; coût :  $65 \times 1500 = 97\,500$  F.

**Conclusion** (0,25).  $97\,500 \text{ F} > 95\,000 \text{ F}$  :

**Non, le montant prévu ne suffit pas (il manque 2 500 F).**

**Tâche 3 : montant pour clôturer le magasin****[1,5 pt]**

**Valeur de  $n$**  (0,5). L'équation  $4 + \sqrt{n-2} = n$  équivaut à  $\sqrt{n-2} = n-4$ , qui impose  $n \geq 4$ . En élevant au carré :  $n-2 = n^2 - 8n + 16 \iff n^2 - 9n + 18 = 0 \iff n = 3 \text{ ou } n = 6$ . Comme  $n \geq 4$ , on garde  $n = 6$  ( $n = 3$  est rejeté :  $4 + \sqrt{1} = 5 \neq 3$ ).

**Longueur de fil** (0,5). Périmètre du magasin :  $2(13 + 5) = 36$  m ; deux rangées : 72 m.

**Montant** (0,5). 6 m coûtent 7 650 F, donc 1 m coûte 1 275 F et 72 m coûtent  $\frac{72}{6} \times 7\,650$  :

$12 \times 7\,650 = 91\,800 \text{ F}$

**Présentation****[0,5 pt]****RÉCAPITULATIF DU BARÈME**

| Partie       | Exercice / tâche                                           | Points    |
|--------------|------------------------------------------------------------|-----------|
| A (15 pts)   | Exercice 1 (systèmes, polynôme $P$ , équation à paramètre) | 4         |
|              | Exercice 2 (cercle, droites, cercle paramétré)             | 4         |
|              | Exercice 3 (trigonométrie)                                 | 4         |
|              | Exercice 4 (second degré, polynômes $p$ et $q$ )           | 3         |
| B (5 pts)    | Tâche 1 (terrain triangulaire)                             | 1,5       |
|              | Tâche 2 (ciment du magasin)                                | 1,5       |
|              | Tâche 3 (clôture du magasin)                               | 1,5       |
|              | Présentation                                               | 0,5       |
| <b>Total</b> |                                                            | <b>20</b> |