

RÉPUBLIQUE DU CAMEROUN <i>Paix – Travail – Patrie</i> LYCÉE BILINGUE D'EMANA	Département de Mathématiques	Classe : Seconde C Durée : 3 h Coefficient : 5
Examineur : M. KADIROU HUSSEIN (PLEG)		Note : / 20

La qualité de la rédaction et la présentation de la copie seront prises en compte dans l'évaluation de la copie de l'élève.

PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES

(15 points)

EXERCICE 1 : (4 points)

1) Déterminer la valeur de vérité (Vrai ou Faux) de chacune des propositions suivantes en justifiant :

a) $P_1 : ((-3)^2 = 9) \wedge (\sqrt{16} = -4)$ (0,5pt)

b) $P_2 : (\pi \in \mathbb{Q}) \implies (17 \text{ est un nombre premier})$ (0,5pt)

c) $P_3 : (\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0) \iff (0 \text{ est un entier pair})$ (0,5pt)

2) On considère l'implication mathématique suivante :

$$(I) : \forall x \in \mathbb{R}, (x > 3) \implies (x^2 > 9)$$

a) Énoncer la réciproque de l'implication (I). Déterminer sa valeur de vérité en donnant un contre-exemple si elle est fausse. (0,75pt)

b) Énoncer la contraposée de l'implication (I) et donner sa valeur de vérité. (0,75pt)

c) Écrire la négation logique formelle (avec quantificateurs et connecteurs adaptés) de la proposition (I), puis la traduire en langage usuel. (1pt)

EXERCICE 2 : (4 points)

1) Dire si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse, puis justifier la réponse : (1pt)

a) « Pour tout nombre réel x , si $x^2 = 16$, alors $x = 4$. »

b) « Un sac de maïs a une masse m (en kg) dont la valeur approchée est 12,4 à 0,2 près. En traduisant cette situation par une inéquation avec valeur absolue, on obtient $12,2 \leq m \leq 12,6$. »

2) On considère le nombre réel $A = 2,454545 \dots$ de période 45. Démontrer par le calcul algébrique que A est un nombre rationnel en déterminant sa fraction irréductible. (0,5pt)

3) Démontrer que si $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$, alors $2 - 3\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$. (0,75pt)

4) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $E = \frac{9^{n+1} + 3^{2n}}{2 \times 3^{2n}}$. Démontrer que E est un nombre entier naturel indépendant de n dont on précisera la valeur. (0,75pt)

5) Calculer le nombre réel suivant, puis déterminer le plus petit ensemble de nombres auquel il appartient :

$$M = \frac{3}{5} - \frac{1}{2} + \frac{5}{14}$$

$$\frac{3}{4} \times \frac{5}{5}$$

(1pt)

EXERCICE 3 : (4 points)

- 1) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $E(2x) = 2$ et $|x + 3| = 5$. (0,75pt)
b) Développe et réduis $(2 + \sqrt{7})^2$ et $(2 - \sqrt{7})^2$ puis montre que $y = \sqrt{11 + 4\sqrt{7}} - \sqrt{11 - 4\sqrt{7}}$ est un entier naturel. (0,75pt)
c) Comparer : $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ et $\sqrt{8 - 2\sqrt{15}}$. (0,5pt)
- 2) Soit $x \in \mathbb{R}$, tel que : $|x| \leq \frac{1}{3}$.
 - a) Montrer que $\frac{2}{3} \leq 1 + x \leq \frac{4}{3}$. (0,25pt)
 - b) Démontre pour tout $x \in \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]$, $\left|\frac{1}{1+x} - (1-x)\right| \leq \frac{3}{2}x^2$. (0,75pt)
 - c) En déduire que $1-x$ est une valeur approchée de $\frac{1}{1+x}$. (0,25pt)
 - d) Donner une valeur approchée de $\frac{1}{0,997}$ et préciser une majoration d'une erreur commise. (0,75pt)

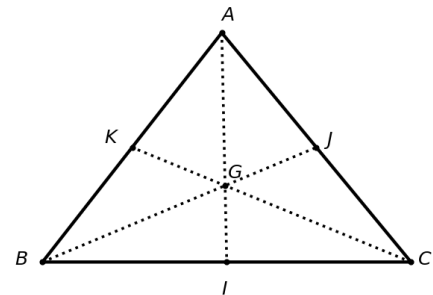
EXERCICE 4 : (3 points)

I. Le plan est muni d'une base orthonormée $(\vec{i}; \vec{j})$. On considère les vecteurs : $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{p} = \left(\frac{4 - \sqrt{2}}{6}\right)\vec{i} + \left(\frac{4 + \sqrt{2}}{6}\right)\vec{j}$.

- 1) Montrer que $\vec{p}$ est un vecteur unitaire. (0,5pt)
- 2) Soit $\vec{w} = (a; -4)$, déterminer a pour que $\vec{v}$ et $\vec{w}$ soient colinéaires. (0,25pt)
- 3) Montrer que $(\vec{u}; \vec{v})$ est une base du plan. (0,25pt)
- 4) Déterminer un vecteur unitaire $\vec{t}$ colinéaire à $\vec{u}$. (0,5pt)

II. ABC est un triangle quelconque, I , J et K sont les milieux respectifs de des segment $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. On note G le centre de gravité du triangle ABC .

- 1) Écrire les vecteurs $\vec{AJ}$, $\vec{AK}$ et $\vec{AG}$, comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$. (0,5pt)
- 2) En déduire les coordonnées des points A , B , C , I , J et K dans la base $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$. (1pt)



PARTIE B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES

(5 points)

Dans le cadre de l'extension de l'atelier de transformation agroalimentaire de L'UNICASTY à Yaoundé, l'intendant confie trois dossiers techniques au club de mathématiques de la classe de Seconde C du collège Vogt :

— **Dossier 1 (Régulation thermique)** : L'ingénieur a installé un automate de sécurité qui déclenche une sirène d'alerte générale pour évacuer les cuves de fermentation. La notice de fabrication stipule la règle logique suivante :

« La sirène sonne si et seulement si la température dépasse 40°C et la vanne de décharge n'est pas ouverte. »

On donne : (S) : « La sirène sonne » ; (T) : « la température dépasse 40°C » ; (V) : « la vanne de décharge est ouverte ».

Un technicien stagiaire affirme : « Dès l'instant où la vanne de décharge n'est pas ouverte, la sirène va obligatoirement retentir, quelle que soit la température mesurée. » L'intendant exige une validation logique formelle de cette affirmation.

— **Dossier 2 (Dosage d'un conservateur naturel)** : Le manuel de certification indique qu'un additif doit être injecté avec un débit continu représentant exactement une proportion massique d du mélange principal, donnée par la mesure décimale continue : $d = 0,41666\dots$

L'électrovanne volumétrique n'accepte que des consignes programmées sous forme de fractions irréductibles. Le technicien doit introduire la fraction exacte correspondante.

— **Dossier 3 (Calibrage d'une conduite cylindrique)** : Pour le raccordement au puits, la longueur utile d'un tuyau rigide en acier inoxydable (en mètres) est donnée par la formule d'ingénierie :

$$L = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} + \frac{1}{\sqrt{5} - 1} - \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Le magasinier affirme qu'il n'existe aucune conduite de cette dimension car la valeur L est un nombre irrationnel.

Tâches :

Tâche 1 : À l'aide d'une table de vérité ou d'une analyse des conditions suffisantes et nécessaires, modéliser la règle de l'automate et arbitrer l'affirmation du stagiaire. **(1,5pt)**

Tâche 2 : Déterminer la fraction irréductible exacte d à insérer dans le régulateur de dosage. **(1,5pt)**

Tâche 3 : Déterminer la valeur exacte simplifiée de la longueur L . Le magasinier a-t-il raison ? **(1,5pt)**

Présentation : 0,5pt

« *Les mathématiques sont la reine des sciences.* »

— **Carl Friedrich Gauss**

RÉPUBLIQUE DU CAMEROUN <i>Paix – Travail – Patrie</i> LYCÉE BILINGUE D'EMANA	CORRIGÉ ET BARÈME Mathématiques	Classe : Seconde C Durée : 3 h Coefficient : 5
Examineur : M. KADIROU HUSSEIN (PLEG)		Total : 20 points

Les points sont indiqués entre crochets. Toute méthode correcte et justifiée est acceptée.

PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES

(15 points)

EXERCICE 1 : (4 points)

1) a) $P_1 : ((-3)^2 = 9) \wedge (\sqrt{16} = -4)$ [0,5 pt]

$(-3)^2 = 9$ est vraie ; $\sqrt{16} = 4 \neq -4$ donc $\sqrt{16} = -4$ est fausse. Une conjonction est vraie seulement si ses deux propositions le sont.

P_1 est fausse

1) b) $P_2 : (\pi \in \mathbb{Q}) \implies (17 \text{ est un nombre premier})$ [0,5 pt]

$\pi \notin \mathbb{Q}$: la proposition « $\pi \in \mathbb{Q}$ » est fausse. Une implication dont la prémisse est fausse est vraie.

P_2 est vraie

1) c) $P_3 : (\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0) \iff (0 \text{ est un entier pair})$ [0,5 pt]

Pour tout réel x , $x^2 \geq 0$ donc $x^2 + 1 \geq 1 > 0$: la première proposition est vraie. De plus $0 = 2 \times 0$ est pair : la seconde est vraie. Une équivalence entre deux propositions vraies est vraie.

P_3 est vraie

2) a) **Réciproque de (I)** [0,75 pt]

Réciproque : $\forall x \in \mathbb{R}, (x^2 > 9) \implies (x > 3)$ (0,25). Elle est **fausse** (0,5) : pour $x = -4$, $x^2 = 16 > 9$ mais $-4 \not> 3$.

2) b) **Contraposée de (I)** [0,75 pt]

Contraposée : $\forall x \in \mathbb{R}, (x^2 \leq 9) \implies (x \leq 3)$ (0,25). Elle est **vraie** (0,5), car équivalente à (I) qui est vraie : si $x > 3$ alors $x > 0$ et $x^2 > 3x > 9$. (Directement : $x^2 \leq 9 \Rightarrow |x| \leq 3 \Rightarrow x \leq 3$.)

2) c) **Négation de (I)** [1 pt]

La négation de $\forall x, (A \implies B)$ est $\exists x, (A \wedge \neg B)$ (0,5) :

$\exists x \in \mathbb{R}, (x > 3) \wedge (x^2 \leq 9)$

En langage usuel (0,25) : « il existe un réel strictement supérieur à 3 dont le carré n'est pas strictement supérieur à 9 ». Cette négation est fausse (0,25), puisque (I) est vraie.

EXERCICE 2 : (4 points)

1) **Vrai ou faux** [1 pt]

a) **Faux** (0,5) : $x = -4$ vérifie $x^2 = 16$ mais $x \neq 4$ (contre-exemple).

b) **Vrai** (0,5) : $|m - 12,4| \leq 0,2 \iff -0,2 \leq m - 12,4 \leq 0,2 \iff 12,2 \leq m \leq 12,6$.

2) **Fraction irréductible de $A = 2,454545\dots$** [0,5 pt]

La période a 2 chiffres : $100A = 245,4545\dots$, donc $100A - A = 243$, soit $99A = 243$ et $A = \frac{243}{99}$.

$A = \frac{27}{11}$

3) Si $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$ alors $2 - 3\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$

[0,75 pt]

Raisonnement par l'absurde : supposons $2 - 3\sqrt{5} = r \in \mathbb{Q}$. Alors $\sqrt{5} = \frac{2-r}{3}$, quotient de rationnels : $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$, ce qui contredit l'hypothèse. Donc $2 - 3\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$. (On peut aussi raisonner par contraposition.)

4) $E = \frac{9^{n+1} + 3^{2n}}{2 \times 3^{2n}}$

[0,75 pt]

$$9^{n+1} = 3^{2n+2} = 9 \times 3^{2n}, \text{ donc } E = \frac{9 \times 3^{2n} + 3^{2n}}{2 \times 3^{2n}} = \frac{10 \times 3^{2n}}{2 \times 3^{2n}}.$$

$$E = 5, \text{ entier naturel indépendant de } n$$

5) Calcul de M et plus petit ensemble

[1 pt]

$$\frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{10} ; \frac{7}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10} ; \frac{1/10}{7/10} = \frac{1}{7} \text{ (0,5)}. \text{ Donc } M = \frac{1}{7} + \frac{5}{14} = \frac{2}{14} + \frac{5}{14} = \frac{7}{14}.$$

$$M = \frac{1}{2} = 0,5$$

M n'est pas entier, mais il est décimal : le plus petit ensemble est l'ensemble des nombres décimaux $\mathbb{D}$ (0,5), avec $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

EXERCICE 3 : (4 points)

1) a) Équations $E(2x) = 2$ et $|x + 3| = 5$

[0,75 pt]

E désigne la partie entière : $E(2x) = 2 \iff 2 \leq 2x < 3 \iff 1 \leq x < \frac{3}{2}$, donc $S_1 = \left[1; \frac{3}{2}\right[$ (0,5).

$|x + 3| = 5 \iff x + 3 = 5 \text{ ou } x + 3 = -5 \iff x = 2 \text{ ou } x = -8$, donc $S_2 = \{-8; 2\}$ (0,25).

1) b) Développements et entier naturel y

[0,75 pt]

$(2 + \sqrt{7})^2 = 4 + 4\sqrt{7} + 7 = 11 + 4\sqrt{7}$ et $(2 - \sqrt{7})^2 = 11 - 4\sqrt{7}$ (0,25). Alors

$$y = \sqrt{(2 + \sqrt{7})^2} - \sqrt{(2 - \sqrt{7})^2} = |2 + \sqrt{7}| - |2 - \sqrt{7}| = (2 + \sqrt{7}) - (\sqrt{7} - 2) \quad (\text{car } \sqrt{7} > 2).$$

$$y = 4 \in \mathbb{N} \quad (0,5)$$

1) c) Comparaison de $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ et $\sqrt{8 - 2\sqrt{15}}$

[0,5 pt]

$(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 = 5 + 3 - 2\sqrt{15} = 8 - 2\sqrt{15}$. Comme $\sqrt{5} - \sqrt{3} > 0$, on a $\sqrt{8 - 2\sqrt{15}} = \sqrt{5} - \sqrt{3}$.

$$\sqrt{5} - \sqrt{3} = \sqrt{8 - 2\sqrt{15}}$$

2) a) Encadrement de $1 + x$

[0,25 pt]

$$-\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{3}, \text{ donc en ajoutant } 1 : \frac{2}{3} \leq 1 + x \leq \frac{4}{3}.$$

2) b) Majoration de $\left| \frac{1}{1+x} - (1-x) \right|$

[0,75 pt]

$$\frac{1}{1+x} - (1-x) = \frac{1 - (1-x)(1+x)}{1+x} = \frac{1 - (1-x^2)}{1+x} = \frac{x^2}{1+x}.$$

Comme $1+x \geq \frac{2}{3} > 0$, on a $\frac{1}{1+x} \leq \frac{3}{2}$, donc $\left| \frac{1}{1+x} - (1-x) \right| = \frac{x^2}{1+x} \leq \frac{3}{2}x^2$.

2) c) $1 - x$ valeur approchée de $\frac{1}{1+x}$

[0,25 pt]

D'après b), l'erreur commise en remplaçant $\frac{1}{1+x}$ par $1-x$ est au plus $\frac{3}{2}x^2$, qui est très petit lorsque x est proche de 0 : $1-x$ est une valeur approchée de $\frac{1}{1+x}$ à $\frac{3}{2}x^2$ près.

2) d) Valeur approchée de $\frac{1}{0,997}$

[0,75 pt]

$0,997 = 1 + x$ avec $x = -0,003$ et $|x| \leq \frac{1}{3}$ (0,25). Valeur approchée : $1 - x = 1,003$ (0,25). Erreur :

$$\frac{1}{0,997} \approx 1,003 \text{ avec une erreur } \leq \frac{3}{2}(0,003)^2 = 1,35 \times 10^{-5} \quad (0,25)$$

EXERCICE 4 : (3 points)

I.1) $\vec{p}$ est unitaire

[0,5 pt]

La base étant orthonormée : $\|\vec{p}\|^2 = \frac{(4 - \sqrt{2})^2 + (4 + \sqrt{2})^2}{36} = \frac{(18 - 8\sqrt{2}) + (18 + 8\sqrt{2})}{36} = \frac{36}{36} = 1$, donc $\|\vec{p}\| = 1$.

I.2) $\vec{v}$ et $\vec{w}$ colinéaires

[0,25 pt]

$\vec{v} = (-1; 1)$ et $\vec{w} = (a; -4)$ sont colinéaires si $(-1) \times (-4) - 1 \times a = 0$, soit $4 - a = 0$.

$$a = 4$$

I.3) $(\vec{u}; \vec{v})$ est une base

[0,25 pt]

$\vec{u} = (2; -1)$ et $\vec{v} = (-1; 1)$: $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 2 \times 1 - (-1) \times (-1) = 1 \neq 0$. Les vecteurs ne sont pas colinéaires : ils forment une base du plan.

I.4) Vecteur unitaire colinéaire à $\vec{u}$

[0,5 pt]

$\|\vec{u}\| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$ (0,25). Le vecteur $\vec{t} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ est unitaire et colinéaire à $\vec{u}$:

$$\vec{t} = \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j} = \frac{2\sqrt{5}}{5}\vec{i} - \frac{\sqrt{5}}{5}\vec{j} \quad (\text{ou son opposé})$$

II.1) $\vec{AJ}$, $\vec{AK}$ et $\vec{AG}$

[0,5 pt]

J est le milieu de $[AC]$: $\vec{AJ} = \frac{1}{2}\vec{AC}$. K est le milieu de $[AB]$ (voir la figure) : $\vec{AK} = \frac{1}{2}\vec{AB}$. G est aux deux tiers de la médiane $[AI]$ à partir de A , avec $\vec{AI} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$:

$$\vec{AJ} = \frac{1}{2}\vec{AC}, \quad \vec{AK} = \frac{1}{2}\vec{AB}, \quad \vec{AG} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$$

Remarque : l'énoncé écrit « $[AC]$ » pour le segment de K ; la figure montre que K est sur $[AB]$.

II.2) Coordonnées dans la base $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$

[1 pt]

Dans ce repère, $\vec{AB} = 1 \cdot \vec{AB} + 0 \cdot \vec{AC}$ et $\vec{AC} = 0 \cdot \vec{AB} + 1 \cdot \vec{AC}$, et $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$.

$$A(0;0), \quad B(1;0), \quad C(0;1), \quad I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), \quad J\left(0; \frac{1}{2}\right), \quad K\left(\frac{1}{2}; 0\right)$$

(Bonus : $G\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.)

Tâche 1 : modéliser la règle de l'automate et arbitrer l'affirmation du stagiaire [1,5 pt]

Modélisation (0,5). La règle de la notice est $S \iff (T \wedge \neg V)$. L'affirmation du stagiaire est $\neg V \implies S$.

Table de vérité (0,5).

T	V	$\neg V$	$S (= T \wedge \neg V)$	$\neg V \Rightarrow S$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	V
F	V	F	F	V
F	F	V	F	F

Conclusion (0,5). Pour T fausse et V fausse (température $\leq 40^\circ\text{C}$, vanne non ouverte), la vanne n'est pas ouverte mais la sirène ne sonne pas.

L'affirmation du stagiaire est fausse : « la vanne n'est pas ouverte » est une condition nécessaire, mais non suffisante.

(La bonne formulation est : $S \Rightarrow \neg V$, ou encore $(T \wedge \neg V) \Rightarrow S$.)

Tâche 2 : fraction irréductible exacte d [1,5 pt]

$d = 0,41666\dots$ a un seul chiffre qui se répète (le 6) après 0,41 (0,5). Alors

$$1000d = 416,666\dots \quad \text{et} \quad 100d = 41,666\dots \Rightarrow 900d = 375 \quad (0,5).$$

Donc $d = \frac{375}{900} = \frac{5}{12}$ (0,25), fraction irréductible (le PGCD de 375 et 900 est 75).

$$d = \frac{5}{12}$$

Tâche 3 : valeur exacte de L ; le magasinier a-t-il raison ? [1,5 pt]

Rationalisation (0,5) : $\frac{1}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{(\sqrt{5})^2-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$. Alors

$$L = \frac{\sqrt{5}-1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}+1}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

$$L = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \text{ m} \approx 0,31 \text{ m} \quad (0,5)$$

Discussion (0,5). Si L était rationnel, alors $\sqrt{5} = 4L + 1$ le serait aussi : c'est impossible, donc L est bien irrationnel. Le magasinier a raison sur ce point. Mais cela ne prouve pas qu'il n'existe aucune conduite de cette dimension : un nombre irrationnel est une longueur possible (ici environ 30,9 cm), que l'on approche par une valeur décimale lors de la fabrication.

Le magasinier a raison sur l'irrationalité de L , mais tort sur sa conclusion.

Présentation [0,5 pt]

RÉCAPITULATIF DU BARÈME

Partie	Exercice / tâche	Points
A (15 pts)	Exercice 1 (logique)	4
	Exercice 2 (nombres, rationnels, irrationnels)	4
	Exercice 3 (radicaux, valeur absolue, approximations)	4
	Exercice 4 (vecteurs)	3
B (5 pts)	Tâche 1 (logique, table de vérité)	1,5
	Tâche 2 (fraction irréductible)	1,5
	Tâche 3 (valeur exacte de L)	1,5
	Présentation	0,5
Total		20

sujetexa.com