



**N.B :** L'épreuve comporte deux parties indépendantes ayant 4 exercices obligatoires.

La rigueur dans la rédaction et la clarté de la copie du candidat seront prises en compte pendant la correction.

**Partie A : ÉVALUATION DES RESSOURCES**

**(15 Points)**

**Exercice 1 : (05 Points)**

- I. On considère l'équation  $(E) : z^3 - (4 + i)z^2 + (13 + 4i)z - 13i = 0$ . Où  $z$  est un nombre complexe.
1. Démontrer que le nombre complexe  $i$  est solution de cette équation. 0,25 Pt
  2. a) Déterminer les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que, pour tout nombre complexe  $z$ ,  

$$z^3 - (4 + i)z^2 + (13 + 4i)z - 13i = (z - i)(az^2 + bz + c).$$
 0,75 Pt  
 b) En déduire les solutions de l'équation  $(E)$ . 0,75 Pt
- II. On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectives :  $z_A = i$ ;  $z_B = 2 + 3i$  et  $z_C = 2 - 3i$ .
1. Soit  $r$  la rotation de centre  $B$  et d'angle  $\frac{\pi}{4}$ . Déterminer l'affixe du point  $A'$  image du point  $A$  par la rotation  $r$ . 0,75 Pt
  2. Démontrer que les points  $A', B$  et  $C$  sont alignés et déterminer l'écriture de l'homothétie de centre  $B$  qui transforme  $C$  en  $A'$ . 1 Pt
  3. On considère l'application  $f$  du plan dans le plan qui à tout point  $M(x; y)$  associe le point  $M'(x'; y')$  tel que : 
$$\begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \\ y' = x\sqrt{3} + y - \sqrt{3} \end{cases}$$
.  
 a) Déterminer l'écriture complexe de l'application  $f$ . 0,75 Pt  
 b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de  $f$ . 0,75 Pt

**Exercice 2 : (05 Points)**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = xe^{-x} - \frac{1}{4}$ .

1. Étudier les variations de  $f$ , puis déduire que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha \in [1, +\infty[$ . 1 Pt
2. Donner un encadrement de  $\alpha$  avec une précision de l'ordre de  $10^{-1}$ . 0,5 Pt
3. On considère la fonction  $y$  définie par :  $y(x) = xe^{-x}$ . Montrer que  $y$  est solution de l'équation différentielle  $xy'(x) + (x + 1)y(x) = 0$ . 0,5 Pt
4. On pose la fonction  $\varphi$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $\varphi(x) = \ln(4x)$ . Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  est équivalente à l'équation  $x = \varphi(x)$ . 0,5 Pt
5. On définit la suite  $(u_n)$  par :  $u_0 = 0,5$  et  $u_{n+1} = \varphi(u_n)$ .  
 a) Calculer les trois premiers termes de la suite. 0,5 Pt  
 b) Soit l'intervalle  $[a; b] \subset [2, 1; 2, 2]$ . Montrer que  $\varphi([a; b]) \subset [a; b]$ . 0,5 Pt  
 c) Montrer par récurrence que si  $u_0 \in [a; b]$  alors pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \in [a; b]$ . 0,25 Pt  
 d) Montrer que pour tout  $x \in [2, 1; 2, 2]$ , on a  $|\varphi'(x)| \leq \frac{1}{2}$ , puis en déduire que pour tout entier naturel  $n$ ,  $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ . 0,5 Pt  
 e) En déduire que pour tout entier naturel  $n$ ,  $|u_n - \alpha| \leq 0,1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ . 0,25 Pt  
 f) Montrer que  $(u_n)$  est convergente et déterminer une valeur approchée à  $10^{-4}$  près de  $\alpha$ . 0,5 Pt

**Exercice 3 : (05 Points)**

- I. On considère l'équation différentielle  $(E) : 4y' + y = x + 6$
1. a) Vérifier que la fonction  $u(x) = x + 2$  est une solution de  $(E)$ . 0,25 Pt

- b) Démontrer qu'une fonction  $f$  au moins une fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  est solution de (E) si et seulement si la fonction  $h = f - u$  est solution de l'équation différentielle (E') :  $4y' + y = 0$ . **0,5 Pt**
- c) Résoudre (E'), puis déduire toutes les solutions de (E). **0,5 Pt**
- d) Déterminer la solution  $g$  de (E) dont la courbe représentative passe par le point  $A(0; 4)$ . **0,5 Pt**
2. Une urne contient **12** boules numérotées indiscernables au toucher parmi lesquelles **4** boules portent le numéro **1** et **5** boules portent le numéro **2** et **3** boules portent le numéro **-1**. On tire successivement et sans remise deux boules de cette urne. On désigne par  $a$  le numéro porté par la première boule tirée et par  $b$  le numéro porté par la deuxième boule tirée. On définit dans  $\mathbb{R}$  une fonction  $v$  par  $v(x) = ax + b$ .
- a. Quelle est la probabilité pour que  $v$  soit une solution de (E) ? **0,75 Pt**
- b. On reprend **5** fois cette expérience. Quelle est la probabilité pour que  $v$  soit au moins une fois une solution de (E) ? **0,75 Pt**
- II. On considère la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $h(x) = \frac{3x^4 + 6x^2 - 5x + 3}{(x^2 + 1)^2}$ .
1. Vérifier que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $h(x) = 3 - \frac{5x}{(x^2 + 1)^2}$ . **0,25 Pt**
2. En déduire une primitive sur  $\mathbb{R}$  de  $h$ , puis calculer la valeur moyenne de la fonction  $h$  sur l'intervalle  $[3; 5]$ . **1,5 Pt**

### Partie B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES

**(05 Points)**

#### Situation :

Face à la flambé des prix de carburant dans son pays, madame. KOUAYA a pour projet de lancer dans son usine la fabrication de **4000** véhicules ayant un faible taux de consommation en carburant. Pour ce fait, elle décide d'abord de tester un prototype du véhicule avant de lancer la fabrication en série. Elle réalise l'expérience suivante : dans un prototype du véhicule, elle introduit du carburant dans le réservoir à débit constant. À l'instant  $t = 0$ , le véhicule est mis en marche pour une durée de **10** minutes. Les mesures réalisées permettent de modéliser que le taux  $f(t)$  de consommation de carburant par le véhicule au bout de  $t$  minutes de fonctionnement est solution de l'équation différentielle  $y'' + y' + 0,25y = 0$  et vérifie les conditions  $f(0) = -0,2$  et  $f'(0) = 0,2$ . Par ailleurs, un véhicule fonctionne normalement lorsque le taux de consommation de carburant au bout de **10** minutes est compris entre **0,005** et **0,006**. Afin de faire une estimation sur la somme à prévoir pour la fabrication de tous ces véhicules dans quelques années, le comptable de madame KOUAYA constate que la somme  $Z$  en million de FCFA réservée pour cela varie en fonction du temps  $X$  d'années. En posant  $Y = \ln(Z)$  il a obtenu le tableau statistique suivant :

X	1	2	3	4	5
Y	13,3	12,9	12,5	12,1	11,7

Toutefois, la fabrication d'un véhicule coûte en moyenne **4** millions de FCFA.

Après tous ces tests l'usine fabrique une série de véhicules. On estime que la probabilité qu'un véhicule présente un défaut de fonctionnement à sa sortie de l'usine est égale à  $\frac{3}{10}$ . On prélève au hasard **20** véhicules sur cette production. On se demande qu'elle est la probabilité d'obtenir au moins deux véhicules présentant un défaut de fonctionnement.

#### Tâches :

1. Le prototype du véhicule testé par madame KOUAYA, fonctionne-t-il normalement ? **1,5 Pt**
2. La somme réservée pour la fabrication des véhicules sera-t-elle suffisante pour fabriquer les **4000** véhicules dans **10** ans ? **1,5 Pt**
3. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins deux véhicules présentant un défaut de fonctionnement ? **1,5 Pt**
- Présentation :** **0,5 Pt**