



N.B : L'épreuve comporte deux parties indépendantes ayant 5 exercices obligatoires.

La rigueur dans la rédaction et la clarté de la copie du candidat seront prises en compte pendant la correction.

Partie A : ÉVALUATION DES RESSOURCES

(15 Points)

Exercice 1 : (03 Points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A et B d'affixes respectives $Z_A = 2i$ et $Z_B = 2$. On désigne par (H) l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que :

$3x^2 + 3y^2 + 16x - 16y - 10xy + 12 = 0$. On note S la similitude directe de centre A qui transforme O en B . On désigne par (H') la conique d'équation $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$.

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $Z^2 - 2(1 + i)Z + 4i = 0$. 0,5 Pt
2. Justifier que OAB est un triangle rectangle isocèle. 0,25 Pt
3. Donner les éléments caractéristiques de S . 0,5 Pt
4. Déterminer l'écriture complexe et l'expression analytique de S . 0,5 Pt
5. Montrer que l'image de (H) par S est (H') . 0,5 Pt
6. Donner la nature et les éléments caractéristiques de (H) . 0,75 Pt

Exercice 2 : (05 Points)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = xe^{-x} - \frac{1}{4}$.

1. Étudier les variations de f , puis déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [1, +\infty[$. 1 Pt
2. Donner un encadrement de α avec une précision de l'ordre de 10^{-1} . 0,5 Pt
3. On considère la fonction y définie par : $y(x) = xe^{-x}$. Montrer que y est solution de l'équation différentielle $xy'(x) + (x + 1)y(x) = 0$. 0,5 Pt
4. On pose la fonction φ définie sur $]0; +\infty[$ par $\varphi(x) = \ln(4x)$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation $x = \varphi(x)$. 0,5 Pt
5. On définit la suite (u_n) par : $u_0 = 0,5$ et $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.
 - a) Calculer les trois premiers termes de la suite. 0,5 Pt
 - b) Soit l'intervalle $[a; b] \subset [2, 1; 2, 2]$. Montrer que $\varphi([a; b]) \subset [a; b]$. 0,5 Pt
 - c) Montrer par récurrence que si $u_0 \in [a; b]$ alors pour tout entier naturel n , $u_n \in [a; b]$. 0,25 Pt
 - d) Montrer que pour tout $x \in [2, 1; 2, 2]$, on a $|\varphi'(x)| \leq \frac{1}{2}$, puis en déduire que pour tout entier naturel n , $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$. 0,5 Pt
 - e) En déduire que pour tout entier naturel n , $|u_n - \alpha| \leq 0,1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$. 0,25 Pt
 - f) Montrer que (u_n) est convergente et déterminer une valeur approchée à 10^{-4} près de α . 0,5 Pt

Exercice 3 : (04 Points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Résoudre dans \mathbb{Z}^2 l'équation : $48x + 35y = 1$. 0,75 Pt
2. On considère le vecteur $\vec{u}(48; 35; 24)$ et le point $A(-11; 35; -13)$.
 - a) Préciser la nature et donner une équation cartésienne de l'ensemble (π) des points $M(x; y; z)$ tels que : $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$. 0,75 Pt
 - b) Soit (D) la droite d'intersection de (π) avec le plan d'équation $z = 16$. Déterminer tous les points de (D) dont les coordonnées sont entières et appartiennent à l'intervalle $[-100; 100]$. 1,25 Pt
3. On considère le plan (P) d'équation : $48x + 35y + 24z - 385 = 0$.
 - a) Écrire une équation de la sphère (S) de centre O et tangente à (P) . 0,5 Pt

b) Déterminer l'expression analytique de la réflexion f par rapport au plan (P) . 0,75 Pt

Exercice 4: (03 Points)

Une urne contient quatre boules noires et deux boules blanches. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On répète n fois l'épreuve qui consiste à tirer une boule de l'urne, puis à la remettre dans l'urne. On suppose que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées et que les tirages sont indépendants. On note p_n la probabilité de tirer exactement une boule blanche lors des $n - 1$ premiers tirages et une boule blanche lors du n ème tirage.

1. Calculer les probabilités p_2 et p_3 . 0,5 Pt

2. On considère les événements suivants :

- B_n : « Tirer une boule blanche lors du n ème tirage » ;
- U_n : « On tire une boule blanche et une seule lors des $n - 1$ premiers tirages ».

a) Calculer la probabilité de l'évènement B_n . 0,5 Pt

b) Exprimer la probabilité de l'évènement U_n en fonction de n . 0,5 Pt

c) En déduire l'expression de p_n en fonction de n et vérifier que : $p_n = \frac{n-1}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$. 0,5 Pt

3. On pose : $S_n = p_2 + p_3 + \dots + p_n$.

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$S_n = 1 - \left(\frac{n}{2} + 1\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n. \quad \text{0,75 Pt}$$

b) Déterminer la limite de la suite (S_n) . 0,25 Pt

Partie B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES

(05 Points)

Situation :

Dans le cadre de la promotion du tourisme, le maire de ville a entrepris la réfection d'une route et l'embellissement de la cour du musée de la ville.

La route est modélisable par une portion de la courbe (Γ) de la fonction numérique f de la variable réelle $x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$ par $f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}$. L'unité de longueur étant le kilomètre (km), on admet que la longueur de cette route est $\ell = \int_{\frac{1}{2}}^2 \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$. On estime que à 10 mètres de réfection de cette route coûtera **300 000 FCFA**.

Sur la cour du musée de la ville, un espace vert ayant la forme d'un losange $ABCD$ doit y être aménagé. Les points A, B, C et D étant les sommets de l'ellipse dont une équation est $2x^2 + 3y^2 - 12x + 9y + 24 = 0$. L'unité de longueur étant le kilomètre. Dans cet espace, on y sèmera du gazon sur toute la superficie. On estime à **35 000 FCFA** le prix d'un mètre-carré de ce gazon.

Dans l'une des boutiques situées sur l'esplanade du musée de cette ville, monsieur KOUAYA observe trois objets G, H et J que l'on peut repérer par leurs coordonnées dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On a alors $G\left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right)$, $H\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ et $J(0, 1, 0)$. La boutique dispose de deux caméras de surveillances, fixées à l'intersection de l'ensemble des points M de l'espace tels que $\|\overrightarrow{MG} \wedge \overrightarrow{MH}\| = \|\overrightarrow{MJ}\|$ et de la droite d'équations cartésiennes $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

Tâches :

1. Estimer la dépense à opérer pour refaire entièrement la route. 1,5 Pt

2. Estimer la dépense pour l'achat du gazon qui doit recouvrir entièrement l'espace vert. 1,5 Pt

3. Déterminer la position des deux caméras de surveillance dans la boutique du musée. 1,5 Pt

Présentation : 0,5 Pt