

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES (13 points)

Exercice 1 : 3,5 points

On considère dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , les courbes (C) et (C') des fonctions numériques respectives f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{2}{1+e^{x \ln 2}}$ et

$$g \text{ définie sur }]0 ; 2[\text{ par } g(x) = \frac{1}{\ln 2} \times \ln\left(\frac{2-x}{x}\right).$$

1. Montrer que le point $J(0 ; 1)$ est centre de symétrie pour (C) . 0,25 pt
2. a) Déterminer les variations de f sur \mathbb{R} . 0,5 pt
 b) En déduire que f est une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle I à déterminer. 0,75 pt
3. a) Démontrer que pour tout $x \in]0 ; 2[$, $f \circ g(x) = x$. 0,5 pt
 b) En déduire la bijection réciproque notée f^{-1} de la fonction f ; en précisant sont ensemble de définition et son expression. 0,5 pt
4. Tracer (C) et (C') en prenant 1 centimètre comme unité sur les axes. 1 pt

Exercice 2 : 4 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On pose $P(z) = z^3 - (18 + 5i)z^2 + (13 + 28i)z + 4 - 33i$.

1. Vérifier que : $P(z) = (z - 2 - 3i)[z^2 - (6 + 2i)z + 7 + 6i]$. 0,5 pt
2. On considère l'équation $(E) : z^2 - (6 + 2i)z + 7 + 6i = 0$
 a) Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes. 1 pt
 b) En déduire dans \mathbb{C} les solutions de l'équation $P(z) = 0$. 0,75 pt
3. On donne les points $(2 + i)$, $B(4 + i)$ et $C(2 + 3i)$.
 a) Ecrire le nombre $Z = \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ sous la forme algébrique. 0,5 pt
 b) En déduire la nature exacte du triangle ABC . 0,5 pt
4. On considère la similitude directe S de centre A qui transforme B en C .
 Montrer que l'écriture complexe de S est : $z' = iz + 3 - i$. 0,75 pt

Exercice 3 : 3,5 points

1. On considère l'équation différentielle $(E) : y'' - 4y' + 4y = 0$.

- a) Déterminer la forme générale des fonctions numériques, solutions de (E) . 0,75 pt
- b) Déterminer la solution particulière g de l'équation (E) qui vérifie les conditions :
 $g(0) = 2$ et $g'(0) = 1$. 0,5 pt
- c) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $I = \int_{\ln 2}^{\ln 4} (-3t + 2)e^{2t} dt$. 0,75 pt

2. Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_n = 0$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = -\frac{4}{4+u_n}.$$

- a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $-2 < u_n < 0$. 0,75 pt
- b) Etudier le sens de variation de la suite (u_n) . 0,5 pt
- c) En déduire la convergence de la suite (u_n) . 0,25 pt

Exercice 4 : 4 points

I. Une étude a été menée sur la taille (hauteur) et la masse de 6 lapins d'une ferme.

Taille (x) en cm	10	11,5	14,5	16	18,5	20
Masse (y) en kg	3,30	3,85	4,80	5,35	6,15	6,65

Les valeurs prélevées sont consignées dans le tableau ci-dessus.

1. a) Déterminer les coordonnées du point moyen. **0,5 pt**

b) Déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés. **0,75 pt**

c) Dans cette ferme, estimer de la masse d'un lapin la taille 25 cm. **0,25 pt**

2. Les 12 prélèvements sont inscrits chacun sur un des 12 coupons identiques, prévus pour l'étude, et placés dans une urne. On tire au hasard et simultanément 2 coupons de cette urne. Un tirage est dit significatif, si la paire de coupons tirés correspond aux prélèvements d'un des 6 lapins de l'étude.

a) Calculer la probabilité d'obtenir un tirage significatif. **0,5 pt**

b) On répète 3 fois avec remise, cette épreuve. Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux tirages significatifs. **0,75 pt**

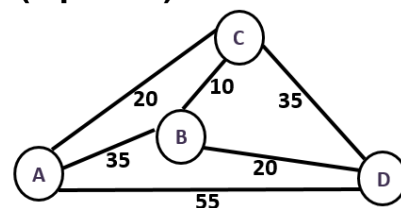
II. Soit ABC un triangle.

1. Exprimer $\vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC}$ en fonction de \vec{BC} . **0,5 pt**

2. Déterminer la nature de l'ensemble des points M tels que $\|\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = \|\vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC}\|$. **0,75 pt**

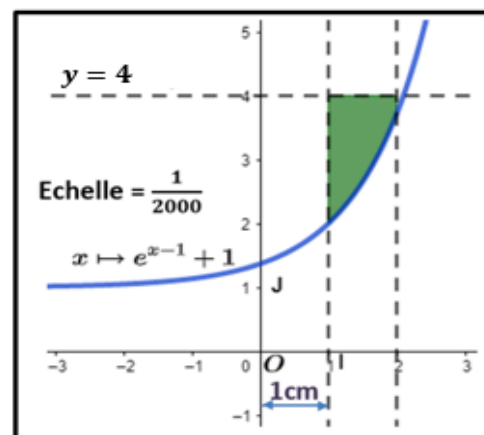
PARTIE B EVALUATION DES COMPETENCES (5 points)**Situation :**

Pago est un cultivateur de tomates. Pour livrer ses tomates au marché Dédo (D), il doit les transporter de son champ (A), dans un camion qui consomme 1 litre de carburant au kilomètre. Le réseau routier de la ville est représenté par le graphe ci-contre, sur lequel les arrêtes sont pondérées par la distance en km qui sépare deux sommets. Le réservoir du camion contient au départ du champ, 52 litres de carburant.



Pago possède une grande surface plane de terre traversée par un cours d'eau. Il projeté y planter des semences de tomate qui, dans des conditions bien décrites produisent une tonne au dam².

Pour rendre maximale sa production il a confié à un ingénieur agricole, l'étude de la faisabilité de ce projet. Après avoir mené cette étude, l'ingénieur a représenté la zone favorable audit projet, dans le repère orthonormé ci-contre.



Ladite zone est délimitée par une route modélisée par la droite d'équation $y = 4$ et un tronçon du cours d'eau, modélisé par la courbe de la fonction $x \mapsto e^{x-1} + 1$ sur l'intervalle $[1 ; 2]$.

Pago estime sur cette zone, sa récolte à plus de 10 tonnes et voudrait s'en rassurer.

Une pompe à eau doit être placée à la jonction de la route et du cours d'eau pour ravitailler la maison des employer dont l'emplacement est assimilé au point O, origine du repère.

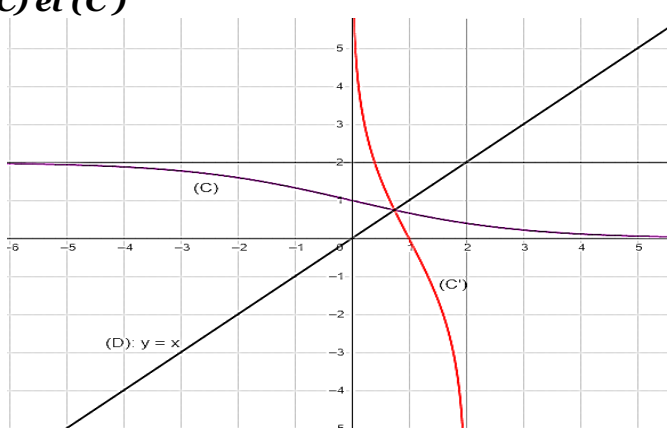
Tâches :

1. Le camion pourra-t-il livrer ses tomates sans carburant ajouté ? **1,5 pt**

2. Pago s'est-il trompé sur son estimation ? **1,5 pt**

3. Détermine la longueur minimale du tuyau à acheter pour ce ravitaillement. **1,5 pt**

Présentation : **0,5 pt**

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES (15 points)	
Exercice 1 : 3,5 points	COMMENTAIRE
<p>1) Montrons que J (0,1) est centre de symétrie pour (C) On a $D_f = \mathbb{R}; \forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$ et</p> $f(-x) + f(x) = \frac{2}{1+e^{-x \ln 2}} + \frac{2}{1+e^{x \ln 2}}$ $= \frac{2e^{x \ln 2}}{1+e^{x \ln 2}} + \frac{2}{1+e^{x \ln 2}} = 2 = 2 \times 1; \text{ Donc J est centre de symétrie}$	<p>0,25 pt pour la bonne réponse</p>
<p>2a) Déterminons les variations de f</p> <p>$\forall x \in \mathbb{R}, \text{ on a } : f'(x) = \frac{-2 \ln 2 e^{x \ln 2}}{(1+e^{x \ln 2})^2} < 0.$ Donc f est strictement décroissante sur \mathbb{R}</p>	<p>0,25 pt pour la bonne démarche. 0,25 pt pour la solution</p>
<p>b) Déduisons que f est une bijection. f est continue et strictement décroissante sur \mathbb{R} de plus $f(\mathbb{R}) =]\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[=]0, 2[$ donc f réalise une bijection de \mathbb{R} vers $]0, 2[$</p>	<p>0,5 pt pour la bonne démarche</p>
<p>3a) Démontrons que $\forall x \in]2, 0[f \circ g(x) = x$</p> $f \circ g(x) = f(g(x)) = \frac{2}{1+e^{\ln(\frac{2-x}{x})}} = \frac{2}{1+\frac{2-x}{x}} = x$	<p>0,25pt pour la bonne démarche 0,25pt pour la conclusion</p>
<p>b) Déduisons la bijection réciproque de f On a $f \circ g(x) = x$ d'ou $f^{-1}(x) = g(x) = \frac{1}{\ln 2} \times \ln(\frac{2-x}{x})$ avec $D_{f^{-1}} =]0, 2[$</p>	<p>0,25pt pr f^{-1} 0,25pt pr $D_{f^{-1}} =]0, 2[$</p>
<p>4) traçons (C) et (C')</p> 	<p>0,5pt pour (C) 0,25pt pour (C')</p>
Exercice 2	(4points)
<p>On pose $P(z) = z^3 - (8 + 5i)z^2 + (13 + 28i)z + 4 - 33i.$ Vérifions que $P(z) = (z - 2 - 3i)[z^2 - (6 + 2i)z + 7 + 6i]$ On a : $P(z) = z^3 - (6 + 2i)z^2 + 7z + 6zi - 2z^2 + (12 + 4i)z - 14 - 12i - 3z^2i + (18i - 6)z + 18 - 21i$ $= z^3 - (6 + 2i + 2 + 3i)z^2 + (7 + 6i + 12 + 4i + 18i - 6)z + (-14 - 12i + 18 - 21i)$ $= z^3 - (8 + 5i)z^2 + (13 + 28)z + 2 - 33i$ d'où le résultat si le coefficient de z^2 était $-(8+5i)$ 0,5pt</p>	
<p>On considère (E) : $z^2 - (6 + 2i)z + 7 + 6i = 0$ • Résolvons l'équation (E). $\Delta = (6 + 2i)^2 - 4(7 + 6i) = 4$ $z = 2 + i$ ou $z = 4 + i$ d'où $S_C = \{2 + i; 4 + i\}$</p>	<p>0,,5pt pour Δ 0,5pt pr z_1 ou z_1</p>
<p>a) Déduisons dans \mathbb{C} l'équation $P(z) = 0$ $S_C = \{2 + i; 4 + i; 2 + 3i\}$</p>	<p>0,5pt pour la réponse</p>
<p>3a) Écrivons le nombre $Z = \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ sous la forme algébrique.</p>	<p>0,5pt pour la bonne réponse</p>

$Z = \frac{4+i-2-i}{2+3i-2-i} = \frac{2}{2i} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i \times i} = -i$ donc $Z = -i$	
b) ABC est un triangle rectangle isocèle en A	0,5 pt pour la bonne réponse
4.) Montrons que l'écriture complexe de S est $z' = iz + 3 - i$	
On a $z_{A'} = iz_A + 3 - i = i(2 + i) + 3 - i = 2 + i = z_A$ de meme $z_{B'} = iz_B + 3 - i = i(4 + i) + 3 - i = 2 + 3i = z_C$ Donc S est la similitude de centre A qui transforme B en C.	0,75 pt pour bonne réponse
Exercice 3 (3,5points)	
1) On considère (E): $y'' - 4y' + 4y = 0$	
a) Déterminons la forme générale des fonctions solution de (E) L'équation caractéristique est $r^2 - 4r + 4 = 0$ On a : $\Delta = 0$ et $r = 2$ d'où les fonctions solutions de (E) sont les fonctions f définies par $f(x) = (Ax + B)e^{2x}$ avec A, B sont des réels	0,25 pt r : $\Delta = 0$ 0,5 pt pr $f(x) = (Ax + B)e^{2x}$
b.) Déterminons la solution g telque $g(0) = 2$ et $g'(0) = 1$ posons $g(x) = (Ax + B)e^{2x}$. On a : $g(0) = 2 \Rightarrow B = 2$ et $g'(x) = Ae^{2x} + 2(Ax + B)e^{2x}$; $g'(0) = 1 \Rightarrow A + 2B = 1 \Rightarrow A = -3$. Donc $g(x) = (-3x + 2)e^{2x}$	0,5 pt pour la bonne réponse
c.) A l'aide d'une intégration par parties calculons I Posons $\begin{cases} u(t) = -3t + 2 \\ v'(t) = e^{2t} \end{cases} \sim \begin{cases} u'(t) = -3 \\ v(t) = \frac{1}{2}e^{2t} \end{cases}$ $I = [(-3t + 2) \frac{1}{2}e^{2t}]_{\ln 2}^{\ln 4} + \frac{3}{2} \int_{\ln 2}^{\ln 4} e^{2t} dt = [(-3t + 2) \frac{1}{2}e^{2t}]_{\ln 2}^{\ln 4} + [\frac{1}{2}e^{2t}]_{\ln 2}^{\ln 4}$ $I = 21 - 42\ln 2$	0,5 pt pour la démarche 0,25 pt pour résultat
2.) Soit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = -\frac{4}{4+u_n}$	
a) Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $-2 < u_n \leq 0$ pour $n=0$ on a : $u_0 = 0$ d'où $-2 < u_0 \leq 0$ donc p(0) vraie ; supposons p(n) vraie et montrons que p(n+1) est aussi vraie on a p(n) vraie $\Leftrightarrow -2 < u_n \leq 0 \Leftrightarrow 2 < 4 + u_n \leq 4 \Leftrightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{4+u_n} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -2 < \frac{-4}{4+u_n} \leq -1$ $\Leftrightarrow -2 < u_{n+1} \leq 0$ d'où p(n+1) vraie ; donc pour tout entier naturel n , $-2 < u_n \leq 0$	0,5 pt
b) Etudions le sens de variation de (u_n) On a $u_{n+1} - u_n = -\frac{4}{4+u_n} - u_n$ $= \frac{-4-4u_n^2-4u_n}{4+u_n} = \frac{-(u_n+2)^2}{4+u_n} < 0$ car $2 < 4 + u_n \leq 4$ donc (u_n) est strictement décroissante	
c.) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc (u_n) est une suite convergente	0,25 pt
Exercice 4 (4points)	
1. a) Déterminons les coordonnées du point moyen	
$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^6 x_i = \frac{10+11,5+14,5+16+18,5+20}{6} = 15,08$ $\bar{Y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^6 y_i = \frac{3,3+3,85+4,8+5,35+6,15+6,65}{6} = 5,02$ Donc le point moyen M (15,08 ; 5,02)	0,25 pt pour \bar{X} 0,25 pt pour \bar{Y}
b) Déterminons l'équation de la droite d'ajustement	
✓ Variance $V(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^6 x_i^2 - \bar{x}^2 = 12,72$ ✓ Covariance $Cov(x; y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^6 x_i y_i - \bar{x} \cdot \bar{y} = 4,17a = \frac{Cov(x;y)}{V(x)} = 0,3278$; $b = \bar{y} - a\bar{x} = 0,076776$ ✓ Donc la droite d'ajustement $y = 0,3278x + 0,076776$	0,5 pt pour la démarche 0,25 pt pour le résultat
C) Estimons la masse d'un lapin de taille 25 cm $y = 0,3278 \times 25 + 0,076776 = 8,271776$ Kg La masse d'un lapin de taille 25 cm est de 8,27Kg	
2. a) Calculons la probabilité d'obtenir un significatif	0,25 pt pour la démarche

<p>Pour qu'un tirage soit significatif, on doit prendre les 2 coupons d'un lapin donné : 1 seule paire par lapin. Il y a 6 lapins, donc 6 paires significatives : $P = \frac{6}{66} = \frac{1}{11}$</p>	<p>0,25 pt pour le résultat</p>
<p>b.) Calculons la probabilité d'obtenir exactement deux tirages significatifs</p> $P = 3 \times \left(\frac{1}{11}\right)^2 \times \left(\frac{10}{11}\right)^1 = 3 \times \frac{1}{121} \times \frac{10}{11} = \frac{30}{1331}$	<p>0,25 pt pour la démarche 0,25 pt pour la conclusion</p>
<p>II- soit le triangle ABC</p>	
<p>1) $\overline{MA} + \overline{MB} - 2\overline{MC} = \overline{CA} + \overline{CB}$</p>	<p>0,5 pt pour le résultat</p>
<p>2) L'ensemble des points M tels que $\ \overline{MA} + \overline{MB} + 2\overline{MC}\ = \ \overline{MA} + \overline{MB} - 2\overline{MC}\$ posons G barycentre de A(1) ; B(1) ; C(2) on a : $4MG = \ \overline{CA} + \overline{CB}\$; l'ensemble des points M cherché est le cercle de centre G et de rayon $\frac{1}{4}\ \overline{CA} + \overline{CB}\$</p>	
<p style="text-align: center;">PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCE BARÈME</p>	
<p>1) Vérifions si le camion pourra livrer ses tomates sans carburant ajouté Le chemin le plus court est A-C-B-D qui pour poids minimal 50Km Comme 50Km est équivalent à 50 litres et 50L < 52 L alors le camion pourra livrer ses tomates sans carburant ajouté</p>	<p>Le chemin le plus court est A-C-B-D 0,5pt 50L < 52 L 0,5pt 0,25 pt des calculs. 0,25 pt pour la bonne conclusion</p>
<p>2) Vérifions si Pago s'est trompé sur son estimation ✓ Calculons l'aire de cette partie</p> <p>$A = \int_1^2 (4 - e^{x-1} - 1) dx = 4 - e = 1,3 \text{ u.a}$ or 1unité = 2000x1cm = 2dam d'où 1unité² = 4 dam² Aire réelle 1,3x4 = 5,2 dam² or on a 1tonne au dam² On a 5,2 tonnes < 10tonnes donc son estimation est fauss</p>	<p>$A = \int_1^2 (4 - e^{x-1} - 1) dx :$ 0,5 pt 0,25 pt pour le bon calculs. Et la conversion 0,25 pt pour la bonne conclusion 5,2 tonnes < tonnes :0,5</p>
<p>3) Déterminons la longueur du tuyau Déterminons le point de jonction $e^{x-1} + 1 = 4 \Leftrightarrow \ln e^{x-1} = \ln 3 \Leftrightarrow 4 = 1 + \ln 3$; On a le point A (1+ln3 ; 4) OA = $\sqrt{20,404} = 4,51$ or 1 unité = 20m Donc la longueur du tuyau à acheter est de $4,51 \times 20 \text{ m} = 90,3\text{m}$</p>	<p>$e^{x-1} + 1 = 4 : 0,25 \text{ pt}$ OA : 0,25pt A (1+ln3 ; 4) : 0,25p 90,3m : 0,25pt 0,25 pt pour la conversion 0,25 pt pour la conclusion</p>