

| COLLEGE BILINGUE LA BONTE | | | | | |
|---------------------------|----------------|------|--------|-------|-----------|
| EPREUVE | EVALUATION | COEF | CLASSE | DUREE | A/S |
| MATHS | BAC BLANC No 1 | 07 | Tle C | 04H00 | 2025/2026 |

Proposé par : MBEI EMMANUEL 1^{er}(le peintre)

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES 15pts

EXERCICE 1: 3pt

Soient (E) : $13x^2 + 13y^2 - 10xy - 72 = 0$ et f l'application du plan dans lui-même qui à tout point

$$M(x ; y) \text{ associe le point } M'(x', y') \text{ telle que } \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{cases}.$$

- 1) Montrer que f est une application linéaire. 0,5pt
- 2) Montre que f est bijective et déterminer l'expression analytique de sa bijection réciproque. 0,5pt
- 3) Montrer que f est une rotation qu'on caractérisera. 0,5pt
- 4) a) Déterminer l'équation cartésienne de l'image de (E) par f. 0,5pt
- b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (E). 1pt

EXERCICE 2 : 4pts

A/ On définit pour tout entier naturel $n \geq 1$, l'intégrale $I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!} (2-x)^n e^x dx$

a) Calculer I_1 . Etablir que pour entier naturel $n \geq 1$, $0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!} (e^2 - 1)$. 0,75pt

b) A l'aide d'une intégration par partie, montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$

$$I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}. \quad 0,5pt$$

c) On pose, pour tout entier naturel $n \geq 1$; $U_n = \frac{2^n}{n!}$

- i. Calculer $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ et montrer que pour tout entier naturel $n \geq 3$, $0 \leq U_{n+1} \leq \frac{1}{2} U_n$. 0,5pt
- ii. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 3$, $0 \leq U_n \leq U_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$. 0,25pt
- iii. En déduire la limite de la suite (U_n) ; puis celle de la suite (I_n) . 0,5pt

B/ soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme $S_n = \sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n}$.

1. Posons $z = \cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n}$. donner une expression simple de la somme $1 + z + \dots + z^{n-1}$
calculer la partie réelle et la partie imaginaire de cette somme. En déduire l'égalité $S_n = \frac{1}{\tan \frac{\pi}{2n}}$. 1pt
2. Quelle est la limite de la suite : $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$. 0,5pt

EXERCICE 3 : (5pts)

A- L'objectif de cet exercice est de résoudre une équation différentielle et de déterminer l'une de ses solutions sous une condition donnée. On considère l'équation différentielle suivantes : (E) : $y' + 2y = x + 1$. On pose $F(x) = \int_{-1}^x e^{2t} (t + 1) dt$

- 1) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $F(x)$. 0,5pt
- 2) Pour tout nombre réel x, on pose $S(x) = g(x)e^{-2x}$ où g est une fonction dérivable de R vers R
 - a) Montrer que si la fonction S est solution de (E), alors pour tout réel x de R.
 $g'(x) = e^{2x}(x + 1)$. 0,5pt
 - b) Réciproquement, montrer que si g vérifie cette relation, alors S est solution de (E). 0,5pt
 - c) En utilisant a question 1), déterminer toutes les fonctions g vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$ $g'(x) = e^{2x}(x + 1)$. 0,25pt
- 3) a) En déduire alors que les solutions de (E) sont les fonctions qui à :
x $\longmapsto \frac{1}{4}(2x + 1) + \frac{1}{4}e^{-2-2x} + ke^{-2x}$ où k est une constante réelle. 0,25pt

b) Déterminer la solution de (E) pour laquelle l'image de 0 est $\frac{1}{4}$. 0,25pt

B- Soit la fonction définie sur $]0 ; 2[$ par $f(x) = 2\sqrt{2x - x^2}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) Montre que f est dérivable sur $I =]0 ; 2[$ et calcule $f'(x)$ pour tout $x \in I$. 0,75pt

2) Dresse e tableau de variations de , puis trace (C). 1,5pt

3) On suppose que l'œuf d'un oiseau a la forme d'un solide de révolution obtenu par la rotation de la courbe (C) autour de l'axe des abscisses. Calculer le volume en u.v de cet œuf. 0,5pt

EXERCICE 4 : 3pts

Une urne contient 5 boules indiscernables au toucher dont deux portent le numéro -1, deux portent le numéro 1 et une porte le numéro 0. On tire successivement sans remise deux boules de l'urne. On désigne par X la variable aléatoire égale à $|a+b|$ où a désigne le numéro de la première boule tirée et b celui de la deuxième boule tirée.

1) Calculer la probabilité pour que :

a) Les plan (P) : $x+ay+bz+3=0$ et (Q) : $ax+by+z+3=0$ soient parallèles. 0,5pt

b) L'application $f_{a,b}$ de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par $f_{a,b}(z) = (a + ib)z + 5 - 5i$. soit une translation ou une homothétie. 0,5pt

2) Déterminer la loi de probabilité de X. 0,5pt

3) Dans cette question on suppose (P) : $x+y+2z+3=0$ et (Q) : $x+y-z+3=0$

a) Déterminer la nature et l'expression analytique de la composée $S_P \circ S_Q$ des réflexions des plans P et Q. 1pt

b) Déterminer l'expression analytiques de la réflexion du plan P. 0,5pt

PARTIE : B COMPETENCES

Janvier et rostand sont deux étudiants en 1^{ère} année de médecine. Pendant ses recherches sur le Net, Janvier a lu ceci : « On admet que lorsqu'on injecte dans le sang une dose A d'un médicament, il reste à la date t, après élimination naturelle, la dose $Ae^{-\frac{t}{24}}$. L'unité de temps est l'heure ; l'origine du temps est l'instant de l'injection ; l'unité de volume de la dose étant le cm^3 . Pour diverses raisons, on ne peut injecter une dose A que toutes les 8 heures. A la dose $3,65A$, le médicament devient dangereux ». Après la 1^{ère} injection, on administre sur un patient n autres injections. Rostand pour savoir s'il y a un danger à poursuivre l'injection indéfiniment et au rythme précédent, aimerait trouver la formule donnant la dose contenue dans le sang après la n^{ième} injection. Mais il a des difficultés compte tenu de son niveau douteux en Mathématiques.

Janvier déclare aussi avoir lu qu'après ladite n^{ième} injection de ce médicament, la dose contenue

dans le sang est : $\frac{1 - e^{-\frac{n}{3}}}{1 - e^{-\frac{1}{3}}} A$. On suppose que cette déclaration de janvier est avérée.

Dans un autre registre, Janvier est content de constater que l'acidité d'une solution est mesurée par son pH : $\text{pH} = -\log[\text{H}_3\text{O}^+]$, où $[\text{H}_3\text{O}^+]$ désigne la concentration d'ions H_3O^+ (en mole par litre) dans la solution. Mais ayant aussi des difficultés en maths, il souhaiterait pour sa très bonne formation et pour la santé de ses futurs malades, savoir utiliser cette connaissance.

Tâches :

1) Aide Rostand à trouver et à comprendre la formule donnant la dose contenue dans le sang après la n^{ième} injection. 1,5pt

2) Y aurait-il un danger à poursuivre le traitement le traitement au rythme noté par janvier lors de sa lecture ? 1,5pt

3) Aide janvier à savoir comment varie le pH d'une solution lorsque sa concentration en ion H_3O^+ décuple et à déterminer quelle est la concentration en ions H_3O^+ d'une eau minérale gazeuse² dont l'étiquette indique $\text{pH} = 6,3$. 1,5pt

PRESENTATION : 0,5pt