

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES 15 points

Exercice 1 : 5 points

I) On considère la suite des points (M_n) d'affixe z_n du plan complexe définie par M_0 d'affixe $z_0 = 0$, M_1 d'affixe $z_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left\{ \begin{array}{l} M_n M_{n+1} = \sin(\theta) M_{n-1} M_n \\ \left(\overrightarrow{M_{n-1} M_n}, \overrightarrow{M_n M_{n+1}} \right) = \theta \end{array} \right.$ où $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\sin(\theta) > 0$.

1) a) Vérifier que le complexe $\sin(\theta)e^{i\theta}$ n'est pas réel. 0,25pt

b) En déduire que $1 - \sin(\theta)e^{i\theta}$ est toujours non nul. 0,25pt

2) On pose $a_n = z_{n+1} - z_n$ où $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \sin(\theta)e^{i\theta} a_{n-1}$. 0,5pt

b) En déduire que $a_n = \sin^n(\theta)e^{in\theta}$. 0,5pt

3) a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $z_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$. 1pt

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ $z_n = \frac{1}{1 - \sin(\theta)e^{i\theta}} - \frac{\sin^n(\theta)e^{in\theta}}{1 - \sin(\theta)e^{i\theta}}$. 0,5pt

4) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 \cos^2(\alpha) - z \sin(2\alpha) + 2 - \cos^2(\alpha) = 0$ avec $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, les solutions seront données sous forme algébrique. 1pt

II) ABC est un triangle rectangle et isocèle en A et de sens direct. D est le symétrique de A par rapport à C. Déterminer le rapport k et une mesure de l'angle θ de la similitude directe S telle que $S(D) = C$ et $S(C) = B$ puis construire son centre Ω . 1pt

Exercice 2 : 5 points

A) E est un espace vectoriel de base $B = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ et C l'ensemble des nombres complexes admis ici comme un espace vectoriel de base $B' = (1, i)$ où $i^2 = -1$. On considère les applications : g de C vers C définie par $g(z) = (\theta + i)z + \bar{z}$ où $\theta \in \mathbb{R}$ et f de E vers E définie par $f(\vec{u}) = (\vec{a} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{n}$.

1) Montrer f et g sont des endomorphismes de C et E respectivement. 0,5pt

2) On donne $\vec{n} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

a) Ecrire les matrices M_g de g et M_f de f respectivement dans les bases B' et B. 1pt

b) Déterminer θ pour g soit un automorphisme, dans ce cas déterminer M_g^{-1} . 0,5pt

c) Déterminer Ker(f) et Im(f) ainsi qu'une base de chacun de ces sous espaces. 0,75pt

B) Soit a et b deux entiers naturels non nuls et E l'ensemble des entiers relatifs $z = ax + by$ tels que $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

1) Montrer que E contient au moins un entier naturel non nul. 0,25pt

2) On note d le plus petit entier naturel non nul élément de E.

a) Démontrer que tout multiple de d est un élément de E. 0,5pt

b) Démontrer que tout élément z de E est multiple de d (on pourra envisager la division euclidienne de z par d). 0,5pt

c) En déduire que E est en fait l'ensemble des multiples de d. 0,25pt

3) Démontrer que $d = \text{pgcd}(a; b)$. 0,5pt

4) Déterminer l'ensemble des entiers relatifs z tels que $z = 9801x + 11664y$. 0,25pt

Exercice 3: 5 points

On considère la fonction numérique f définie sur $[1, +\infty[$ par : $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}$.

1) a) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations. 1pt

b) Démontrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α telle que $1,5 < \alpha < 1,6$. 0,5pt

c) Tracer la courbe de f dans le repère orthonormé (O, I, J) (unité : 1cm). 0,5pt

2) Soit g la fonction définie sur $[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}[$ par $g(x) = -1 + f(\sqrt{\tan(x)})$.

a) Montrer que $\forall x \in [\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}[$ $g(x) = \sqrt{\frac{\sin(2x)}{2}}$. 0,75pt

b) Montrer que g réalise une bijection de $[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}[$ sur $]0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$. 0,75pt

3) a) Étudier la dérivabilité de g^{-1} à gauche en $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 0,5pt

b) $\forall x \in]0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ montrer que $(g^{-1})'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{1-4x^4}}$. 1pt

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES 5 points

Le jeune entrepreneur FAB qui fait dans l'élevage des poissons tilapia veut se faire construire un nouvel étang. A l'aide d'un simulateur numérique, il choisit un modèle d'étang dont le fond a la forme de l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z tel que $\arg\left(\frac{z+3-2i}{z-5-i}\right) = \frac{-2\pi}{3} + k\pi$ où k est un entier (l'unité étant l'hectomètre). En introduisant 4 alevins de tilapia par mètre carré au fond de l'étang, FAB souhaite estimer le nombre total qu'il faudrait.

FAB commence avec 4000 poissons dans ce nouvel étang, mais de manière imprévue, une épidémie de bactéries vient détruire les tilapias. Avant d'enrayer cette épidémie, FAB fait une analyse de la situation sur 3 mois consécutifs et le rapport est résumé dans le tableau ci-dessous.

Numéro du mois (x_i)	1	2	3
Nombre de poissons restant dans l'étang (y_i)	3600	3240	2916

Utilisant un laboratoire virtuel, il ressort que le nombre de poissons restant dans l'étang est modélisé par une fonction affine obtenue par la méthode des moindres carrés, FAB souhaite estimer le nombre de poissons détruits après le 5^e mois.

Par ailleurs, un biochimiste a étudié le nombre de bactéries (responsables de l'épidémie) de type coliforme dans un litre d'une culture liquide qui en contenait au départ 150. Il a constaté que chaque minute, le nombre de bactéries est approximativement multiplié par 1,02 et qu'en même temps une bactérie était détruite. Il voudrait connaître le nombre de bactéries vivantes dans le liquide au bout de quarante-cinq minutes.

Tâches :

1) Estimer ce nombre total d'alevins de tilapia qu'il faut. 1,5pt

2) Estimer ce nombre de poissons détruits. 1,5pt

3) Estimer ce nombre de bactéries vivantes dans le liquide. 1,5pt

Présentation : 0,5pt