



OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES 2026

NIVEAU : T. C & F

DURÉE : 4 heures

Exercice 1 : *Arithmétique et suites*

- Il est 17 heures 15 minutes sur l'horloge.
Quelle heure sera-t-il dans 2025²⁰²⁶ heures ?
- Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 5.
Montrer que $p^2 - 1$ est divisible par 24.
- Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, la somme :

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} k e^{kx}.$$

Exercice 2 : *Une équation fonctionnelle – Une primitive*

- I- L'objectif de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, f(x - f(y)) = 2 - x - y$.
- On suppose que la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie cette propriété.
 - Prouver que $f(0) = 1$.
 - En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x - 1) = 2 - x$.
 - En déduire une expression de $f(x)$, pour tout réel x .
 - Conclure.
- II- Déterminer les primitives sur $[0; \pi[$ de la fonction $f: x \mapsto \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$.

Exercice 3 : *Inégalité de Cauchy-Schwarz – Inégalité de Minkowski*

On considère le polynôme P défini par : $P(x) = \sum_{i=1}^n (x_i x - y_i)^2$.

- Vérifier que

$$P(x) = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) x^2 - 2 \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right) x + \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right).$$

- En déduire l'inégalité

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

3. Démontrer que pour tous réels $x_1, x_2, \dots, x_n$ et $y_1, y_2, \dots, y_n$, on a :

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

Exercice 4 : Les sommets d'un polygone régulier

Soit $n \geq 3$ un entier. On note $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ les affixes des sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle unité du plan complexe, avec $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$

pour $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. Soit A le point d'affixe $a = 2$.

Démontrer que le produit des distances du point A aux sommets du polygone est égal à $2^n - 1$:

$$\prod_{k=0}^{n-1} |a - z_k| = 2^n - 1$$

Exercice 5 : Inégalité de Jordan et logarithme

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

1. Étudier les variations de f et montrer qu'elle admet un maximum global en e .
2. En déduire que pour tous réels $a, b > 0$ tels que $a \neq b$, on a l'inégalité suivante : $a^b < b^a$ pour $e \leq a < b$.
3. **Application** : Laquelle des deux puissances est la plus grande : π^e et e^π ?