



OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES 2026

NIVEAU : 1^{ères} C & F

DURÉE : 3 heures

Exercice 1 : Trigonométrie – Équations et inéquation

1. Soit x un réel de l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ tel que $\cos x + \sin x = \frac{1}{5}$. Calculer $\tan x$.
2. On considère le polynôme P_m défini pour tout réel x par :
 $P_m(x) = x^3 - (m+2)x^2 + (2m+1)x - m$, où m est un paramètre réel.
 - a) Montrer que, pour tout réel m distinct de 1, 1 est une racine double de P_m .
 - b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P_m(x) = 0$ dans les cas suivants : $m = 1$ et $m \neq 1$.
 - c) Dans cette question, on prend $m = -1$. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
 - i) L'équation $\sqrt{P_{-1}(x)} = x - 1$.
 - ii) L'inéquation $\sqrt{P_{-1}(x)} > x - 1$.

Exercice 2 : Fonctions - Applications

A-

1. f est une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f \circ f(x) = 4x - 9$.
 - a) Calculer $f(3)$.
 - b) Montrer que f est bijective, puis déterminer, pour tout réel x , $f^{-1}(x)$.
2. g est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que pour x distinct de 3, $g\left(\frac{x+3}{x-3}\right) = x^2$.
Calculer $g(3)$.

B- Soit l'application h définie par : $h:]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[\setminus \{-5; 5\} \rightarrow \mathbb{R}$
$$x \mapsto h(x) = \frac{\sqrt{|x|-1}-1}{2-\sqrt{|x|-1}}$$

1.
 - a) L'application h est-elle injective ? Justifier.
 - b) Résoudre dans $]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[\setminus \{-5; 5\}$ l'équation $h(x) = -1$.
 - c) L'application h est-elle surjective ? Justifier.
2. Soit k la restriction de h à $D = [1; +\infty[\setminus \{5\}$.
 - a) Déterminer le plus grand sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ tel que k soit bijective de D vers E .
 - b) Déterminer $k^{-1}(x)$ pour tout $x \in E$.

Exercice 3 : Arcs capables – Points cocycliques

A et B sont deux points distincts du plan, C est le point de la médiatrice de $[AB]$ tel que $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}}) = -\frac{6131\pi}{3}$, et D le point de la médiatrice de $[BC]$ tel que $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{DB}; \overrightarrow{DC}}) = -\frac{110\pi}{3}$.

1. Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure.
2. Montrer que le triangle ABC est équilatéral.
3. Montrer que les droites (CA) et (CD) sont perpendiculaires d'une part, puis que les droites (BA) et (BD) sont perpendiculaires d'autre part.
4. Dédire que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle.
5. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{MB}; \overrightarrow{MA}}) = -\frac{\pi}{6}$.

Exercice 4 : Le projet de livraison de café

MOUSSA lance un service de livraison de café par abonnement. Grâce à une campagne publicitaire efficace, son nombre d'abonnés augmente de **10 % chaque mois**. Il commence le premier mois (mois 1) avec **100 abonnés**. Au début, il livre tout lui-même. Mais à mesure que son activité grandit, il doit engager des livreurs indépendants. Chaque mois, son coût logistique fixe augmente de **30 000 FCFA** pour couvrir les nouvelles zones de livraison. Le 1er mois, ce coût est de **100 000 FCFA**.

1. Combien d'abonnés aura MOUSSA au début du 10e mois ?
2. Quel sera le coût logistique total cumulé sur les 10 premiers mois ?