

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

BAT
S'AT-P.
~~SA~~

Partie A : Evaluation des ressources 15 points**Exercice 1 : 4 points**

On considère le polynôme complexe P de degré 3 défini par :

$$P(z) = z^3 - 2(1 + 3i)z^2 + (-13 + 12i)z + 26.$$

1. Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une racine réelle pure. 0,75pt

2.a. Déterminer les nombres complexes a, b et c tels que :

$$P(z) = (z - 2)(az^2 + bz + c). \quad \text{0,5pt}$$

b. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $P(z) = 0$. 0,75pt

3. Soient $z_A = 2$ et $z_B = 2 + 3i$ et $z_C = -2 + 3i$ trois nombres complexes dans le repère complexe $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

a. Placer ces points dans le repère. 0,75pt

b. Quelle est la nature du triangle ABC ? et déterminer l'affixe de D tel que ABCD soit un parallélogramme. 0,75pt

4. Effectuer $\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2026} \quad \text{0,5pt}$

Exercice 2 : 3,5 points

Soit (u_n) une suite telle que $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \sqrt{4 + 3u_n}$

1.a) Démontrer que la suite (u_n) est majorée par 4. 0,5pt

b) Démontrer que la suite (u_n) est croissante. 0,5pt

c) Déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite. 0,5pt

2.a) Démontrer que pour tout entier n , $4 - u_{n+1} = \frac{3(4-u_n)}{4+\sqrt{4+3u_n}}$ 0,5pt

b) Déduire que pour tout entier naturel n , $|u_{n+1} - 4| \leq \frac{3}{4}|u_n - 4|$ 0,5pt

c) Montrer que pour tout entier naturel n , $|u_n - 4| \leq 4\left(\frac{3}{4}\right)^n$ 0,5pt

d) Déduire que (u_n) converge et préciser sa limite. 0,5pt

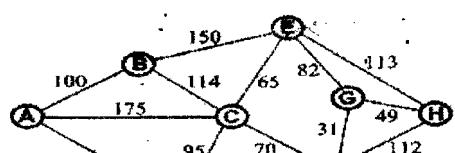
EXERCICE 3 : 3 points

MENKO se déplace du site A au site H et souhaite effectuer le moins de kilomètres possibles. Son assistant dresse un graphe qui schématisse les trajets, en km, entre les six villes de la région, notées B, C, D, E, F, G et les deux sites A et H. Comme l'indique le graphe suivant.

1) Donner la nature du graphe. 0,5pt

2) Donner l'ordre et le degré du graphe. 1pt

3) Déterminer l'itinéraire le plus court reliant les deux sites A et H. 1,5pt



Exercice 4 : 4,5 points

- 1) Soit la fonction f définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$
- Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation. 1pt
 - En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]1, 5; 2[$ une solution unique α . 0,5pt
 - Étudier la branche infinie en $+\infty$ de la courbe (C_f) de f . 0,5pt
 - Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} . 0,25pt
 - Construire dans un même repère les courbes de f et f^{-1} . 1pt
- 2) Soit la fonction g définie sur $I = [1; 2]$ par $g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$
- Montrer que $g(\alpha) = \alpha$. 0,25pt
 - Montrer que pour tout x appartenant à I , $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$. 0,5pt
 - En déduire que $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$. 0,5pt

Partie B : Evaluation des compétences 5 points

ELISE a une petite pâtisserie qui produit chaque jour x galettes compris entre 1000 et 2000. Le cout de production journalier en fonction du nombre x de galettes, $C(x)$ estimé en FCFA est donné par $C(x) = 0,004x^2 + 30x + 1000$. Elle vend ces galettes à 40 FCFA l'unité. Elle souhaite connaître le nombre de galettes qu'elle doit produire et vendre par jour pour avoir un bénéfice maximal.

Le prix d'un kg de farine augmente régulièrement sur le marché. On observe les résultats suivants sur les huit dernières années.

Année	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025
Rang x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Prix y_i en FCFA	1650	1725	1740	1750	1825	1850	1950	1960

Après la naissance de son premier fils, elle décide de placer une somme de 1 000 000 FCFA le premier janvier 2020 dans une banque pour une durée de 10 ans pour financer plus tard les études de son fils. Le banquier lui propose deux options :

Option A : placement à intérêts simples. Chaque fin d'année l'argent produira le même intérêt de 6,5% du montant placé.

Option B : placement à intérêts composés. Chaque fin d'année le capital augmente de 3% par rapport à celui de l'année précédente.

Tâches :

- Déterminer le nombre de galettes que ELISE doit produire et vendre par jour pour avoir un bénéfice maximal. 1,5pt
- Déterminer l'option la plus avantageuse que doit choisir ELISE. 1,5pt
- En supposant que le prix d'une galette gardera la même tendance, déterminer l'année où ce prix dépassera 2100 FCFA. 1,5pt

Présentation :0,5pt