

PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES : 15 points

EXERCICE 1 : 5 points

I/ On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 + 2z^2 - 16 = 0$.

1. Vérifier que $z_0 = 2$ est solution de (E). 0,25pt
2. Déterminer trois nombres complexes a , b et c tels que pour tout nombre complexe z :
 $z^3 + 2z^2 - 16 = (z - 2)(az^2 + bz + c)$. 1pt
3. En déduire les solutions de (E) sous forme algébrique,
puis sous forme exponentielle. 1pt

II/ Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points A, B et D les points d'affixes respectives $a = -2 - 2i$, $b = 2$ et $d = -2 + 2i$.

1. Placer ces points dans le repère. 1pt
2. Calculer l'axe c du point C tel que ABCD soit un parallélogramme et placer C. 1pt
3. Soient E et F les points d'affixes respectives $e = 6$ et $f = -4 + 6i$.
Montrer que $\frac{f-a}{e-a} = i$, puis en déduire la nature du triangle FAE. 0,75pt

EXERCICE 2 : 5 points

I/ Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x + 2 - \ln x$.

1. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation. 1,5pt
2. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$. 0,5pt

II/ On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$f(x) = \sqrt{x} + \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$. On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Vérifier que pour tout $x \in]0; +\infty[$: $f(x) = \sqrt{x} \left(1 + \frac{\ln x}{x} \right)$. 0,25pt
2. a) Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$. 0,5pt
b) En déduire une équation de l'asymptote à (C) . 0,25pt
c) Etudier la branche infinie à (C) . 0,25pt
3. Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$ et en déduire le sens de variation de f . 0,75pt
4. Dresser le tableau de variation de f . 0,5pt
5. Montrer que la fonction F définie par : $F(x) = 2\sqrt{x} \left(\frac{1}{3}x - 2 + \ln x \right)$ est une primitive de f
sur $]0; +\infty[$. 0,5pt

EXERCICE 3 : 5 points

t est la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $t(x) = \frac{3(x^2+2)}{x^2+6}$.

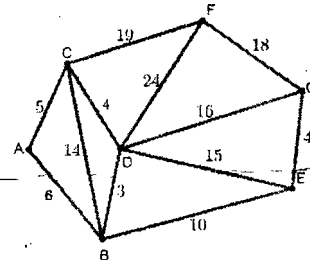
1. a) Dresser le tableau de variation de t . 0,75pt
b) Tracer avec soin la courbe (C_t) de t dans un repère orthonormé. 0,75pt
2. Soit h la restriction de t à l'intervalle $]-\infty; 0]$.

- a) Démontrer que h est une bijection de $]-\infty ; 0]$ sur un intervalle J à préciser. **0,5pt**
- b) Soit h^{-1} la bijection réciproque de h . Dresser le tableau de variation de h^{-1} . **0,5pt**
- c) Construire la courbe de h^{-1} dans le repère précédent. **0,25pt**
3. On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} = 0$.
- a) Démontrer que l'équation (E) admet une unique solution β dans $\mathbb{R}$. **0,5pt**
- b) On pose $\alpha = -\beta$. Montrer que $t(\alpha) = \alpha$ et que $\alpha \in [1; 2]$. **0,5pt**
4. a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, t''(x) = \frac{-72(x^2-2)}{(x^2+6)^3}$. **0,25pt**
- b) Dresser le tableau de variation de t' sur $[0; +\infty[$ et en déduire que $\forall x \in [1; 2]$, on a :
 $|t'(x)| \leq \frac{1}{2}$. **0,75pt**
- c) En déduire que pour tout $x \in [1; 2]$: $|t(x) - t(\alpha)| \leq \frac{2}{3}|x - \alpha|$. **0,25pt**

PARTIE B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES : 5 points

Situation :

M. Tang est le directeur d'une coopérative agro-industrielle spécialisée dans la production et la commercialisation du café et de l'ananas. Il souhaite moderniser ses infrastructures. La coopérative dispose de 7 plantations situées en différents points d'une même localité, notés A, B, C, D, E, F et G. Pour faciliter le transport des récoltes, la coopérative souhaite aménager des pistes reliant certaines plantations. Le graphe ci-contre représente les plantations et quelques distances (en hectomètres) entre elles. Le coût d'aménagement est estimé à 160 000 F par hectomètre. La coopérative cherche à minimiser le coût total des pistes tout en permettant l'accès à toutes les plantations.



La production de café (en dizaines de tonnes) est de $P_1 = 2$ la première année. Chaque année, la production P_{n+1} suit la règle suivante : $P_{n+1} = \frac{1}{3}P_n + 4$. On suppose que cette activité se poursuit sur une très longue période. Sachant que la tonne est vendue à 1 900 000 F, M. Tang souhaiterait déterminer la recette totale issue de la vente de tout le café produit.

L'ananas est vendu à 1 500 000 F la tonne. Les quantités vendues (en tonnes) au cours de certaines années sont consignés dans le tableau suivant. La coopérative envisage un projet de construction évalué à 420 000 000 F et souhaite estimer l'année à laquelle elle pourra le financer uniquement grâce aux recettes issues de la vente de l'ananas.

Année	2015	2017	2019	2021	2023
Rang de l'année	0	2	4	6	8
Quantités vendues (en t)	150	174	198	222	246

Tâches :

- Quelle est la recette totale prévisible après la vente de toute la production de café ? **1,5pt**
- Déterminer l'année au cours de laquelle la coopérative pourra réaliser son projet. **1,5pt**
- Déterminer le coût minimal d'aménagement des pistes essentielles reliant toutes les plantations. **1,5pt**

Présentation :

0,5pt