COLLEGE POLYVALENT
SAINT AUGUSTIN
BP : 15122 Yaoundé
Département de mathématiques

Année Scolaire : 2025/2026
Discipline-Travail-Efficacité
Classe : TD
Durée : 4H
Coefficient : 4

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

ÉVALUATION HARMONISEE N°4

Partie A : Évaluation des ressources (15 pts)

Exercice 1 (5 pts)

I. Une urne contient 4 boules rouges, 4 boules bleues et 8 boules vertes. On tire au hasard et simultanément 3 boules de l'urne.

1. Déterminer la probabilité de tirer trois boules de couleurs toutes différentes. **(0,5 pt)**

2. On joue à un jeu où le gain (en FCFA) du joueur est :

- $X = +2000$ FCFA si les trois boules sont de couleurs toutes différentes.
- $X = +500$ FCFA si exactement deux couleurs apparaissent.
- $X = -1000$ FCFA si une seule couleur apparaît.

a) Donner la loi de probabilité de X. **(1 pt)**
b) Calculer l'espérance mathématique E(X) et dire si le jeu est favorable au joueur. **(0,75 pt)**

II. On considère la fonction f définie sur $]-1,0[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{-x}{x+1}\right)$

a) Déterminer les limites de f aux bornes de l'intervalle $]-1,0[$. **(0,5 pt)**
b) Montrer que pour tout réel x de $]-1,0[$ $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$. **(0,5 pt)**
c) En déduire le sens de variation de f sur $]-1,0[$ et dresser son tableau de variations. **(0,75 pt)**
d) Tracer la courbe (C_f) dans un repère orthonormé d'unité 1 cm sur les axes. **(1 pt)**

Exercice 2 (5 pts)

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :
$(E) : z^3 - \left(5 + 2i\sqrt{2}\right) z^2 + \left(8 + 6i\sqrt{2}\right)z - 4 - 4i\sqrt{2} = 0.$

1. Montrer que l'équation (E) est équivalente à $(z^2 - 3z + 2)\left(z - 2 - i\sqrt{2}\right) = 0$. **(0,75 pt)**
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). **(0,75 pt)**
3. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives 2, $2 + i\sqrt{2}$, $5 + 2i\sqrt{2}$, $8 + 6i\sqrt{2}$.

a) Démontrer que le triangle OAB est rectangle. **(0,5 pt)**
b) Soit r la rotation de centre le point F et d'angle $\frac{\pi}{4}$, d'écriture complexe :

$$z' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z + \left(3 - \sqrt{2}\right) + \left(2\sqrt{2} - 1\right)i$$

Déterminer l'affixe de F et montrer que $r(C) = D$. En déduire la nature du triangle DFC. **(1,5 pt)**
c) Déterminer l'écriture complexe de l'homothétie h qui transforme O en D et B en C. **(1 pt)**
d) Déterminer l'expression complexe de la transformation $s = h \circ r$. **(0,75 pt)**

Exercice 3 (5 pts)

Soient les fonctions f et g définies sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = e^{1+\frac{1}{x}}$ et $g(x) = -x + xlnx$.

1. Démontrer que $g(x) = 1$ admet une unique solution α dans l'intervalle [3 ; 4]. **(1 pt)**

2. Démontrer que $g(x) = 1$ si et seulement si $f(x) = x$. **(0,25 pt)**

3. Démontrer que pour tout $x \in [3\,;4]$ on a $f(x) \in [3\,;4]$. **(0,5 pt)**

4. Démontrer que pour tout $x \in [3\,;4]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$. **(0,5 pt)**

5. Soit (U_n) la suite définie par : $U_0 = 3$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ avec $n \in \mathbb{N}$.

   a) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \in [3\,;4]$. **(0,5 pt)**
   b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}\,|U_n - \alpha|$. **(0,5 pt)**
   c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$. **(0,5 pt)**
   d) Démontrer que (U_n) converge et déterminer sa limite. **(0,5 pt)**

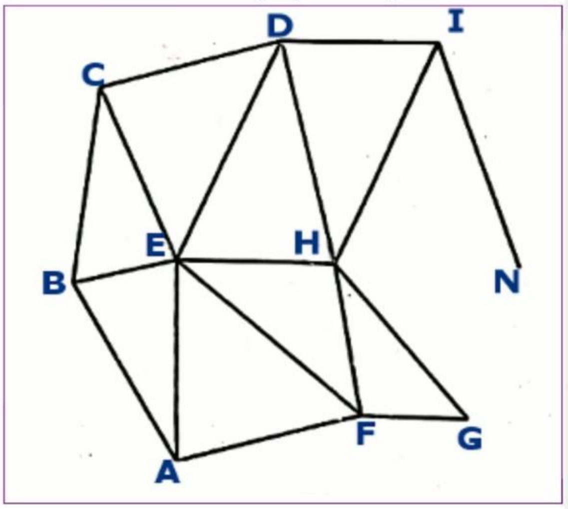
6. On pose $h(x) = \frac{g(x)}{x^2}$, pour tout $x \in\,]0, +\infty[$. Déterminer la primitive H de la fonction h qui prend la valeur 3 en 1. **(0,75 pt)**

<u>Partie B</u> : Évaluation des compétences (5 pts)

Situation :

Le tableau ci-dessous représente les distances (en km) entre différentes villes d'une région, identifiées par leur initiale.

	B	C	D	E	F	G	H	I	N
A	70			90	50				
B		70		30					
C				80					
D		60						45	
E			75		55		40		
F						40	55		
G							70		
H			75					85	57
I									71



Ce tableau correspond au graphe ci-dessus dont les arêtes sont celles indiquées dans le tableau avec leurs poids en km.

L'entreprise ENEO, dont le siège est à A, doit électrifier l'ensemble des routes reliant ces villes. Elle souhaite minimiser la longueur totale de câble à déployer pour relier toutes les villes. Par ailleurs, une réunion importante est prévue à N à 08h00. Le directeur du projet, qui habite A, part à 6h30 et son véhicule roule à 70 km/h en moyenne.

Enfin, pour des raisons techniques, l'électrification de chaque route n'est possible que si un certain contrôle de qualité est réussi. Une étude montre que pour une route choisie au hasard dans le réseau, la probabilité qu'elle soit en bon état est de 0,8. Si elle est en bon état, la probabilité que le contrôle soit réussi est de 0,9 ; sinon, cette probabilité tombe à 0,4.

Tâches :

1. Déterminer en utilisant l'algorithme de Prim ou de Kruskal, la longueur minimale de câble nécessaire pour relier toutes les villes entre elles. **(1,5 pt)**
2. Le directeur peut-il arriver à l'heure à la réunion à N ? **(1,5 pt)**
3. Calculer la probabilité qu'une route choisie au hasard dans ce réseau passe le contrôle de qualité. **(1,5 pt)**

Présentation : 0,5 pt