



L'épreuve comporte trois exercices et un problème sur deux pages numérotées de 1 à 2. La qualité de la rédaction, la présentation et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES (15 points)

EXERCICE 1: 5 POINTS

I. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3 dont une base est $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et le vecteur nul noté $\vec{0}_E$. φ désigne l'endomorphisme de E tel que :

$$\varphi(\vec{e}_1) = \varphi(\vec{e}_2), \varphi(\vec{e}_2 + \vec{e}_3) = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \text{ et } (\vec{e}_2 - \vec{e}_3) \in \ker \varphi.$$

1. Déterminer le noyau et l'image de φ . (On précisera leurs bases respectives). 1 pt
2. Démontrer que $\varphi \circ \varphi = 3\varphi$. 0,5 pt
3. Démontrer que $\text{Im} \varphi$ est l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ de E tels que $\varphi(\vec{u}) = 3\vec{u}$. 0,5 pt
4. Soit α un réel et T l'endomorphisme de E tels que : $\forall \vec{u} \in E, T(\vec{u}) = \alpha\varphi(\vec{u}) - \vec{u}$.
 - a) Montrer que pour tout $\vec{u}$ non nul de $\text{Im} \varphi$, $(T \circ T)(\vec{u}) = \vec{u}$ si et seulement si $(\alpha = \frac{2}{3} \text{ ou } \alpha = 0)$. 0,5 pt

b) Pour $\alpha = \frac{2}{3}$ écrire la matrice de T dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. 0,5 pt

II. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit $a \in \mathbb{C} - \{i\}$. On considère les points A, B, C et M d'affixes respectives i ; $1 - ai$; $a - i$ et a .

1. Montrer que $\frac{z_B - z_M}{z_C - z_M} = a(1 - i) + i$. 0,5 pt
2. En déduire l'ensemble (L) des points $M(a)$ tels que le triangle BCM soit rectangle en M . 0,5 pt
 - a) Montrer que $i \frac{z_B}{z_C} = \frac{|a|^2 - 1 + i(a + \bar{a})}{|a - i|^2}$. 0,5 pt
 - b) En déduire l'ensemble (S) des points $M(a)$ tels que les points B, C et O soient alignés. 0,5 pt

EXERCICE 2 : 5 POINTS

Le tableau suivant donne en millions de FCFA les frais x_i de publicité et le chiffre d'affaires y_j en millions de FCFA enregistrés par une entreprise au cours des 4 derniers mois. Les montants x_i sont en progression arithmétique de

raison $\frac{2}{3}$; tandis que les montants y_j sont en progression géométrique de

raison 2. Les droites de régression (D) de y en x et (D') de x en y ont pour équations respectives : $138x - 25y = 540$ et $6x - y = 24$.

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4
y_j	y_1	y_2	y_3	y_4

1. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y puis interpréter le résultat. 1 pt
2. Calculer la moyenne de chacun des deux caractères. 0,5 pt
 - a) Déterminer les modalités de chacun des caractères. 1 pt
 - b) Calculer la covariance de cette série statistique. 0,5 pt
3. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E): 10x + 33y = 889$. 0,5 pt
4. Soit l'équation $(F): 66x^3 + ux^2 + vx - 10 = 0$ ou x est l'inconnue, u et v sont des entiers relatifs.
 - a) Montrer que si $\frac{10}{33}$ est solution de (F) alors le couple (u, v) est solution de (E) . 0,5 pt
 - b) Soit $\frac{p}{q}$ une solution rationnelle de (F) .
 - i) Montrer que si p et q sont premiers entre eux, alors p divise 10 et q divise 66. 0,5 pt
 - ii) En déduire le nombre rationnel positifs non entiers solution de (F) . 0,5 pt

EXERCICE 3 : 5 POINTS

I. Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = 1 + x + \ln x$.

1. Dresser le tableau de variation de g .

0,5 pt

2. Montrer qu'il existe un unique réel α solution de l'équation $g(x) = 0$.

Vérifier que $0,2 < \alpha < 0,3$.

0,5 pt

3. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0 ; +\infty[$.

0,25 pt

4. Établir que : $\ln(\alpha) = -1 - \alpha$.

0,25 pt

II. Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{1+x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Montrer que f est continue en 0 puis étudier la continuité de f sur $]0 ; +\infty[$.

0,5 pt

2. Étudier la dérivabilité de f en 0 puis interpréter graphiquement ce résultat.

0,5 pt

3. Étudier la limite de f en $+\infty$.

0,5 pt

4. Montrer que $\forall x \in]0 ; +\infty[; f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x)^2}$. En déduire son signe sur $]0 ; +\infty[$.

0,5 pt

5. Montrer que $f(\alpha) = -\alpha$.

0,5 pt

6. Dresser le tableau de variation de f .

0,5 pt

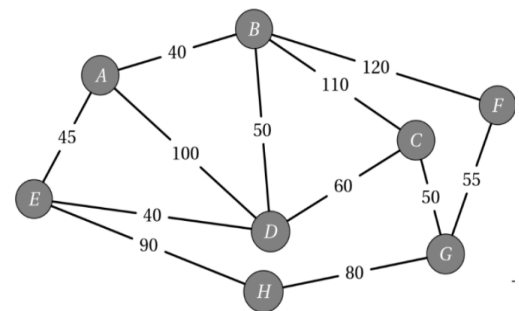
7. Construire (C_f) dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ d'unité graphique 5 cm.

On prendra $\alpha = 0,3$.

0,5 pt

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES (4,5 POINTS)

Un groupe d'élèves de terminale C effectue voyage pour aller célébrer la fête du 20 mai dans une ville hors de leur établissement scolaire. A leur arrivée dans la ville, ce groupe doit se reposer avant le jour J de la fête. Ces élèves sollicitent le service touristique de la ville qui leur présente la carte géographique des différents hôtels de la ville par le graphe ci-contre ou les sommets A, B, C, D, E, F, G et H sont les noms des différents hôtels disponibles. Les distances entre les hôtels sont en mètres. Ce groupe d'élèves est séparé en deux sous-groupes et logé dans deux hôtels A et G.



Pendant leur nuitée, dans ces deux hôtels, ces élèves révisent leur cours d'arithmétique. Le groupe logé à l'hôtel A décide de trouver l'ensemble des entiers naturels diviseurs du nombre 5929 et le groupe logé à l'hôtel G s'entraîne à trouver tous les couples (a, b) d'entiers naturels dont le PGCD et le PPCM sont solutions de l'équation $x^2 - 91x + 588 = 0$. Durant la cérémonie, le technicien du son modélise l'évolution du niveau sonore à l'aide d'une suite numérique (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \ln(u_n + 2) \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Cette suite permet de déterminer le facteur d'atténuation acoustique en fonction de la disposition des enceintes. La distance d entre les deux enceintes A et B (en mètres) est donnée par $d = u_2 + 1$. L'enceinte B est fixée au point $B(1, 0, -1)$ et l'enceinte A se trouve sur l'axe vertical passant par l'origine, soit $A = (0, 0, z_A)$. La puissance sonore perçue à l'origine O depuis une source située à la distance x est modélisée par $P(x) = 10 \ln\left(\frac{e^5}{x^2}\right)$ avec $x > 0$.

TACHES :

1. Quel est le plus court chemin emprunté par les élèves qui ont été logés à l'hôtel A lorsqu'ils ont quitté l'hôtel A pour l'hôtel G ?

1,5 pt

2. Aide les élèves logés à l'hôtel G à trouver les couples d'entiers naturels (a, b) .

1,5 pt

3. Calcule la puissance sonore $P(OB)$ perçue à O en provenance de B (donne la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-2} près).

1,5 pt

PRÉSENTATION :

0,5 pt