

EVALUATIONS HARMONISEES REGIONALES N°1
 EPREUVE ZERO DE MATHEMATIQUES

I- EVALUATION DES RESSOURCES (15pts)

Exercice 1 : 3,5 points

- 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $Z^2 - (1 + i)Z - 10 + 11i = 0$ 1pt
- 2) On considère les nombres complexes : $Z_1 = 1 + i$ et $Z_2 = \sqrt{3} - i$ 1pt
- a) Déterminer le module et l'argument principal de Z_1 et de Z_2 . 0,5pt
- b) En déduire une forme trigonométrique de $\frac{Z_1}{Z_2}$. 0,5pt
- c) Ecrire $\frac{Z_1}{Z_2}$ sous forme algébrique. 0,5pt
- d) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$. 0,5pt

Exercice 2 : 3,5 points

Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}$ où $f(x) = \frac{4x-2}{x+1}$

- 1) Démontrer que f est strictement croissante sur l'intervalle $[2; 3]$ (0,25pt)
- 2) En utilisant la croissance de f , démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq U_n \leq 3$. (0,5pt)
- 3) Montrer que $U_{n+1} - U_n = \frac{-(U_n-2)(U_n-1)}{U_{n+1}}$. En déduire le sens de variation de la suite (U_n) . (0,75pt)
- 4) Justifier que la suite (U_n) est convergente. (0,25 pt)
- 5) Montrer que pour tout $x \in [2; 3], |f'(x)| \leq \frac{2}{3}$ (0,5pt)
- 6) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1} - 2| \leq \frac{2}{3} |U_n - 2|$ (0,5pt)
- 7) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, |U_n - 2| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$. (0,5pt)
- 8) En déduire la limite de la suite (U_n) . (0,25pt)

Exercice 3 : 3pts

Une usine produit des composants : 5% sont défectueux.

Si un composant est défectueux, le test est positif à 98%.

Si un composant est sain, le test est négatif à 97%.

- 1) Montrer la probabilité que le test soit positif est $\frac{31}{400}$. (1,5 pt)

- 2) Un test est positif. Montrer que la probabilité que le test soit défectueux est $\frac{98}{155}$. (0,5 pt)
- 3) On prélève 10 composants au hasard (avec remise). Quelle est la probabilité qu'au moins un composant soit défectueux ? (1 pt)

Exercice 4 : 5pts

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x}{2} + 1 - \frac{(\ln x)^2}{x}$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat. (0,5 pt)

2) Montrer que $f(x) = \frac{x}{2} + 1 - 4 \left(\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \right)^2$ puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (0,5pt)

3) Montrer que la droite (D) d'équation $y = \frac{x}{2} + 1$ est asymptote à la courbe (C_f) en $+\infty$ et étudier la position relative de (C_f) par rapport à (D) . (0,5 pt)

4) Montrer que la dérivée de f est $f'(x) = \frac{x^2 - 4\ln x + 2(\ln x)^2}{2x^2}$. (0,5pt)

5) On suppose que pour tout réel x de $]0; +\infty[$, $x^2 - 4\ln x + 2(\ln x)^2 > 0$.

En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation. (0,75pt)

6) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0; +\infty[$ et que $0,4 < \alpha < 0,5$. (0,5pt)

7) Tracer (C_f) ainsi que son asymptote oblique. On précisera les coordonnées des points d'intersection de (C_f) avec son asymptote oblique (C_f) . (1pt)

8) Déterminer la primitive F de f sur $]0; +\infty[$ qui s'annule en 1. (0,75pt)

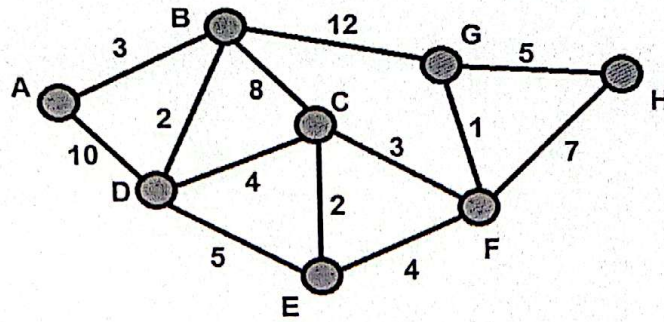
II-EVALUATION DES COMPETENCES (5pts)

Situation :

La municipalité d'une ville entreprend de grands travaux de modernisation. Trois projets distincts nécessitent une expertise mathématique pour optimiser les coûts et les infrastructures.

Projet 1 : Optimisation de la fibre optique

Une entreprise doit poser de la fibre optique entre le centre de commutation (point A) et le nouveau quartier (point H). Le réseau des gaines souterraines existantes est représenté par le graphe ci-dessous, où les sommets sont les points de jonction et les arêtes représentent les distances en centaines de mètres. L'ingénieur doit trouver le chemin le plus court pour minimiser le coût des câbles.



Projet 2 : Aménagement d'un espace vert

Un architecte paysagiste conçoit une pelouse circulaire. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé d'unité 2 mètres, le contour de cette pelouse est défini par l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant l'équation :

$$\left| \frac{z - 1 - i}{z - 4 + 2i} \right| = 2$$

Le gazon utilisé coûte 2500 FCFA le mètre carré. L'architecte doit évaluer le coût total de l'achat du gazon pour cet espace.

Projet 3 : Étude de la consommation énergétique

Le service technique étudie la relation entre la température extérieure moyenne (X , en $^{\circ}\text{C}$) et la consommation électrique du système de climatisation de l'hôtel de ville (Y , en kWh).

Les relevés sur une semaine sont les suivants :

Température X ($^{\circ}\text{C}$)	26	28	30	32	34	36
Consommation Y (kWh)	120	145	180	220	270	330

Le maire souhaite anticiper la consommation pour une journée de canicule où la température atteindra 40°C .

Tâches :

- 1) En utilisant un algorithme approprié, déterminer le trajet le plus court pour la fibre optique entre A et H et donner la longueur totale du câble nécessaire. (1,5 pt)
- 2) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques du lieu géométrique du Projet 2, puis calculer le coût total du gazon (on prendra $\pi \approx 3,14$). (1,5 pt)
- 3) Déterminer l'équation de la droite de régression de Y en X par la méthode des moindres carrés, puis estimer la consommation électrique pour une température de 40°C . (1,5 pt)

Présentation :

0,5pt