

EVALUATIONS HARMONISEES REGIONALES N°1

EPREUVE ZERO DE MATHEMATIQUES

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES 15 points

EXERCICE 1 : 5 points

- I- On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = e^2 \times \sqrt[3]{u_n} \end{cases}$ et on pose $v_n = \ln u_n - 3$.
- 1) Démontrer que la suite v_n est une suite géométrique dont on précisera la raison et son premier terme. 0,5pt
 - 2) Exprimer u_n et v_n en fonction de n . 0,5pt
 - 3) Calculer la limite de (v_n) , puis en déduire que la suite (u_n) est convergente. 0,5pt
- II- Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 1 + i$, $b = 3 + i$ et $c = 1 + 3i$. Soit (Γ) le cercle de centre A passant par C.
- 1) Calculer $\frac{c-a}{b-a}$ et en déduire la nature du triangle ABC. 0,5pt
 - 2) Soit S la similitude du plan telle que $S(B) = B$ et $S(A) = C$. 0,5pt
 - a) Montrer que l'écriture complexe de S est $z' = (1 - i)z - 1 + 3i$. 0,5pt
 - b) En déduire l'expression analytique de S . 0,5pt
 - c) Déterminer l'image (Γ') de (Γ) par S . 0,5pt
- III- Soit u un nombre complexe et f la transformation d'écriture complexe $z' = u^3 z + u - 1$.
- a) Déterminer u pour que f soit une translation. 0,5pt
 - b) On suppose que $u^3 \neq 1$. 0,5pt
 - i) Montrer que le point Ω d'affixe $\frac{-1}{1+u+u^2}$ est l'unique point fixe de f . 0,5pt
 - ii) Déterminer u pour que f soit une symétrie centrale. 0,5pt

EXERCICE 2 : 5 points

I- Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Montrer que la courbe (H) d'équation $4x^2 - y^2 = 4$ est une hyperbole de centre, de sommets et d'asymptotes à déterminer. 1pt
- 2) Soit $\theta \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, on considère l'équation $(E): Z^2 - \frac{2}{\cos \theta} Z + \frac{5}{\cos^2 \theta} - 4 = 0$. 0,75pt
 - a) Montrer que le discriminant de (E) est $\Delta = (4i \tan \theta)^2$ et en déduire les solutions de (E) . 0,75pt
 - b) Soit M' et M'' les points images de $\frac{1+2i \sin \theta}{\cos \theta}$ et $\frac{1-2i \sin \theta}{\cos \theta}$. Montrer que M' et M'' décrivent une partie de (H) lorsque θ varie dans $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. 0,75pt

II- L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points A $(2 ; -3 ; -1)$, B $(1 ; 0 ; 2)$ et C $(0 ; 1 ; 3)$.

1. a) Montrer que les points A, B, C sont non alignés. 0,5pt
- b) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) . 0,5pt

2) On considère l'ensemble (S_θ) des points $M(x; y; z)$ vérifiant :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\theta x - 2y \sin \theta + \theta^2 - 2 + \sin^2 \theta = 0.$$

- a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (S_θ) lorsque $\theta \in]-\pi; \pi[$.
b) Etudier suivant les valeurs de θ la position relative du plan (ABC) et de (S_θ) .

0,5pt
1pt

EXERCICE 3 : 5 points

I- On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E): (x+1)^2 - 9 = 5y$.

1) Montrer que si $(x; y)$ est une solution de (E) alors $x \equiv 2[5]$ ou $x \equiv 1[5]$.

1pt
0,5pt

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) .

II- On considère la fonction numérique f définie sur $[0; +\infty[$ par :
$$\begin{cases} \frac{\ln(x+1)}{x} & \text{si } x \in]0; +\infty[\\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

0,25pt

2) Démontrer que pour tout réel $t \in]0; +\infty[$, $1 - t \leq \frac{1}{t+1} \leq 1 - t + t^2$.

0,5pt

3) En déduire que pour tout réel x de $]0; +\infty[$, $x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(x+1) \leq x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$.

0,5pt

4) En déduire que la fonction f est dérivable en 0 et donner une équation cartésienne de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse zéro.

0,75pt

5) Montrer que f est dérivable sur $[0; +\infty[$.

0,5pt

6) Déterminer la dérivée f' de f et dresser le tableau des variations de f .

1pt

PARTIE B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES 5 points

À l'occasion de la CAN dans la ville de Garoua, le ministre des sports a sollicité les services d'un ingénieur des travaux publics BOUBA pour évaluer le budget de la pelouse synthétique du stade. Le stade est délimité dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ par la courbe (Δ) dont l'équation dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ est : $13X^2 + 7Y^2 + 6\sqrt{3}XY - 16 = 0$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont définis dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ par $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$ et $\vec{v} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$. Le mètre carré du gazon synthétique coûte 12000 FCFA. L'unité de longueur vaut 10 mètres et $\pi \approx 3,14$.

À côté du domicile de monsieur BOUBA, son épouse produit de l'huile d'arachide qu'elle vend dans un marché de la place. Dans ce marché on vend x litres d'arachides à 4800 FCFA où x est l'unique solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $(E) : \ln(x-5) + \ln(x+2) = \ln(2x-4)$. Elle conserve toute sa production une cuve ayant la forme d'un tétraèdre ABCD où A, B, C et D sont quatre points de l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. L'unité étant le mètre. Les points A, B, C et D sont de coordonnées respectives $(2; 4; 0), (-3; 0; 5), (0; 6; -3)$ et $(4; 5; -6)$.

Monsieur BOUBA demande à son jardinier de lui aménager un coin dans l'enceinte de son domicile pour son sport matinal; il doit y semer du gazon dont le mètre carré coûte 5000 FCFA la semence. Ce coin est l'image d'un carré de 4 m de côté par la transformation S du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z lui associe le point M' d'affixe z' tel que :
$$\begin{cases} x' = 2x - 2y + 2 \\ y' = 2x + 2y + 3 \end{cases}$$

Tâches :

- 1) Déterminer la dépense effectuée par M. BOUBA pour l'aménagement du coin de sport. 1,5pt
2) Quel budget faut-il prévoir pour le gazon synthétique de cette pelouse ? 1,5pt
3) Déterminer la somme obtenue par Mme BOUBA après la vente de sa production d'huile. 1,5pt

0,5pt

Présentation: