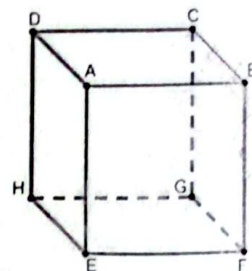


PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES

15 points

EXERCICE 1 : 5 points

II/ On considère la figure ci-contre, où ABCGEFGH est un cube d'arête 1 et le repère $(E, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EH}, \overrightarrow{EA})$.



- 1) a) Déterminer dans ce repère les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AH}$. **1pt**
- b) En déduire que l'aire du triangle ACH, puis le volume du tétraèdre ABCH. **0,75pt**
- c) Calculer la distance du point F au plan (ACH). **0,5pt**

- 2) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (ACH) est $x - y - z + 1 = 0$. **0,5pt**

III/ E est d'un espace vectoriel E de dimension 3 muni de la base canonique $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. On considère l'endomorphisme f de E défini par : $f(\vec{i}) = \vec{i}$; $f(\vec{j}) = f(\vec{k}) = \vec{j} + \vec{k}$.

- 1) Déterminer la matrice M de f dans la base $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. **0,25pt**
- 2) Déterminer le noyau $\text{Ker}(f)$ et en donner une base. **0,5pt**
- 3) Déterminer l'image $\text{Im}(f)$ et en donner une base. **0,5pt**
- 4) On pose : $\vec{e}_1 = \vec{j} + \vec{k}$; $\vec{e}_2 = \vec{j} - \vec{k}$; $\vec{e}_3 = \vec{i}$.
 - a) Montrer que $(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$ est une base de E. **0,5pt**
 - b) Déterminer la matrice M' de f dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. **0,5pt**
 - c) Pour tout entier naturel on nul n , exprimer M'^n en fonction de n . **0,5pt**

EXERCICE 2 : 5 points

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$.

- 1) a) Étudier les variations de g et dresser son tableau de variations de g . **0,5pt**
- b) En déduire le signe de $g(x)$ pour tout réel x . **0,25pt**
- 2) Démontrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera. **0,5pt**
- 3) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{4}(\sqrt{x^2+3} - x + 1)$. On note (C) sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
 - a) Vérifier que $f'(x) = \frac{1}{4}g(x)$, puis en déduire le sens de variations de f . **0,5pt**
 - b) Montrer que (C) admet deux asymptotes, dont on précisera les équations. **0,5pt**
 - c) Tracer les asymptotes, puis esquisser la courbe (C) dans le repère précédent. **1pt**
- 4) On considère la suite numérique $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$.
 - a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq 0$. **0,5pt**
 - b) Montrer que pour tous réels positifs a et b : $|f(a) - f(b)| \leq \frac{1}{2}|a - b|$. **0,5pt**

c) En déduire que $|u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2}|u_n - 1|$, puis que $|u_n - 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

0,5pt

d) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

0,25pt

EXERCICE 3

5 points

A/ Soient θ un réel de $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

l'équation (E) : $2z^3 + (1 + 4 \sin \theta)z^2 + (2 + 2 \sin \theta)z + 1 = 0$.

1) Démontrer que si z_0 est solution de (E), alors $\bar{z}_0$ est solution de (E).

0,25pt

2) Démontrer que l'équation (E) admet au moins une solution réelle.

0,5pt

3) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E') : $z^2 + 2z \sin \theta + 1 = 0$.

a) Démontrer que les solutions de (E') sont aussi les solutions de (E).

0,5pt

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E'), puis l'équation (E).

1pt

c) Ecrire les solutions de (E) sous forme trigonométrique.

0,75pt

4) En utilisant l'équation (E'), résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

(E'') : $z^2 + (2^{\theta+1} \sin \theta)z + 2^{2\theta} = 0$.

0,5pt

B/ Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on considère les points A et B d'affixes respectives $2^\theta e^{i(\frac{\pi}{2}+\theta)}$ et $2^\theta e^{-i(\frac{\pi}{2}+\theta)}$; I est le milieu de [AB]. On construit à l'extérieur du triangle OAB les carrés ODFA et OBGE.

1) Faire une figure.

0,5pt

2) Démontrer que $(OI) \perp (DE)$ et que $DE = 2OI$.

0,5pt

3) Déterminer θ pour que le triangle OAB soit rectangle isocèle en O.

0,5pt

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES

5 points

Situation :

Un centre de télécommunication souhaite optimiser la transmission du signal entre deux stations d'un réseau de relais. Le réseau est constitué de cinq stations A, B, C, D et E, modélisé par les sommets du graphe pondéré ci-contre. Chaque liaison est une arête pondérée dont le poids représente la distance (en kilomètres).

La puissance $P(d)$ du signal (en décibels) après une transmission sur une distance d (en km) est donnée par : $P(d) = P_0 - 10 \log(d)$, où P_0 est une puissance de référence.

Le signal transmis, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, est représenté par un point M d'affixe z tel que $z = re^{i\theta}$, où r est l'amplitude du signal et θ le déphasage dû à la transmission ; le déphasage initial étant $\theta_0 = 0$. À chaque relais :

- l'amplitude est multipliée par $k = 0,8$;
- le signal subit une rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$.

Tâches :

1) Montrer qu'une trop grande distance entraîne une dégradation du signal.

1,5pt

2) Montrer qu'après n relais, le signal est donné par $z_n = r_0 k^n e^{i \frac{n\pi}{6}}$.

1,5pt

3) Déterminer le chemin de distance minimale entre les stations A et E.

1,5pt

Présentation :

0,5pt

