

COLLEGE SAINTE THERESE DE MVA'A

Département de Mathématiques		Année scolaire : 2025-2026
Classe : Tle C		Durée : 04h
Examineur : M. NDONGO		Coefficient : 7
Composition harmonisée du deuxième trimestre		

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES (15pts)

Exercice 1 : (2pts)

n désigne un entier naturel supérieur à 1. Une urne contient $2n$ boules numérotés de 1 à $2n$. Toutes indiscernables au toucher. On tire successivement et sans remise 02 boules de cette urne. Un joueur mise 800Fcfa pour jouer à ce jeu. Si les boules tirées portent des numéros pairs, on lui donne 1 600Fcfa. Si les boules tirées sont de parités différentes, on lui donne 1 200Fcfa et on ne lui donne rien si elles portent des numéros impairs. On désigne par X la variable aléatoire qui associe le gain algébrique du joueur à l'issue de chaque épreuve.

- Déterminer la loi de probabilité de X en fonction de n . **(1,25pt)**
- Calculer l'espérance mathématique de X en fonction de n et conclure. **(0,5pt)**
- Quel doit être la composition de l'urne (le nombre de boule dans l'urne) pour que l'espérance de gain du joueur soit de 240Fcfa ? **(0,25pt)**

Exercice 2 : (04,25pts)

On considère les fonctions g et f de variable réelle x définies sur $D =]1; +\infty[$ par

$$g(x) = x - 2 + \ln \sqrt{x-1} \text{ et } f(x) = \frac{2x-2-\ln \sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}}. \text{ Le plan est rapporté à un repère orthonormé } (o; \vec{i}; \vec{j}).$$

- Dresser le tableau de variation de g sur D . **(0,75pt)**
- a- Montrer l'équation $g(x) = 0$ admet une solution dans D . **(0,5pt)**
b- Calculer $g(2)$ puis déduire suivant les valeurs de x le signe de $g(x)$. **(0,5pt)**
- Calculer les limites de f aux bornes de D . **(0,5pt)**
- Montrer que pour tout $x \in]1; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$ puis en déduire les variations de f . **(0,25pt)**
- a) Dresser le tableau de variation de f . **(0,75pt)**
b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. **(0,25pt)**
- Tracer (Cf) la courbe représentative de f dans le repère $(o; \vec{i}; \vec{j})$. **(0,75pt)**

Exercice 3 : (04,5pts)

L'espace E est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. On considère les droites (D) et (L) définies par

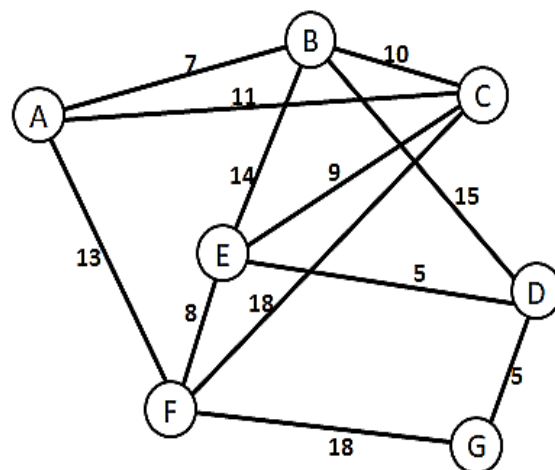
$$(D) = \begin{cases} x + y = 3 \\ y + z = 2 \end{cases} \text{ et } (L) = \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t - 1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}). S_{(D)} \text{ et } S_{(L)} \text{ sont les demi-tours d'axe respectifs } (D) \text{ et } (L).$$

- a. Démontrer que (D) et (L) sont perpendiculaires en un point dont on précisera les coordonnées. **(1pt)**
b. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'application $S_{(D)} \circ S_{(L)}$. **(0,5pt)**
- Déterminer l'expression analytique de $S_{(D)}$. **(0,75pt)**
- Dans V l'espace vectorielle de E , on considère les vecteurs $\vec{e}_1 = \vec{i} - 2\vec{j}$ et $\vec{e}_2 = 2\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$. Soit f un endomorphisme de V défini par $f(\vec{i}) = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$;
 $f(\vec{j}) = 2\vec{i} - 4\vec{j}$ et $f(\vec{k}) = \vec{j}$
a- Montrer que f est un endomorphisme de V . **(0,5pt)**
b- En déduire $\text{Im} f$ de $\text{Ker} f$. **(0,5pt)**
- a) Montrer que $(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{j})$ est une base de V . **(0,5pt)**
b) En déduire la matrice de f dans la base $(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{j})$. **(0,75pt)**

Exercice 4 : (4,25pts)

I- Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$. On considère l'équation $(E): Z^2 + (-3\cos\alpha - 1 + i(3 - 5\sin\alpha))Z + 5\sin\alpha - 2i(-3\cos\alpha - 1) = 0$ d'inconnue complexe Z où α est un nombre réel.

- 1- Montrer que $-i$ est une solution de (E) . **(0,5pt)**
- 2- En déduire l'autre solution de (E) . **(0,5pt)**
- 3- Soient B et C deux points d'affixes respectives $-i$ et 3 et Ω le point d'affixe $1 - 2i$.
 - a) Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe S de centre Ω qui transforme C en B . **(0,5pt)**
 - b) Déterminer les éléments caractéristiques de S . **(0,5pt)**



- II- Un livreur de pain prépare sa livraison. Il doit livrer un certain nombre de ses clients A, B, C, D, E, F et G . les livraisons possibles sont représentés sur le graphe ϑ ci-contre pondéré par les durées en minutes des trajets.
- 1- Déterminer le degré de chaque sommet de ce graphe. **(0,5pt)**
 - 2- Le graphe ϑ est-il connexe ? justifier. **(0,5pt)**
 - 3- En utilisant l'algorithme de DIJKSTRA, propose à ce livreur un trajet le plus court de A à G et donne la durée de trajet. **(1,25pt)**

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES **(05pts)**

Situation :

Les élèves de Tle C du collège Sainte Thérèse de MVA'A décident d'offrir une maquette et un tableau d'art à leur professeur de mathématiques. Sur la maquette, il sera dessiné un cercle (C) dans le quelle un texte de reconnaissance sera écrit.

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$, le cercle (C) est circonscrit à un triangle particulier ABC dont les sommets sont les points d'affixes $Z_A = 6 - 4\sqrt{3} + 4i$; $Z_B = 6 - 4\sqrt{3} - 4i$ et $Z_C = 6$. Le tableau sera réalisé à partir de la courbe de la primitive de la fonction $f: x \mapsto 2x + \cos^4(x)$ qui prend la valeur $\left(\pi^2 + \frac{3\pi}{8}\right)$ en π . Deux élèves artistes, Biloa et MOGO de cette classe ont été choisis pour la réalisation de la maquette du tableau d'art.

Pour identifier parmi les deux celui qui se chargera de la maquette, les responsables de la classe ont organisé un jeu qui consiste à tirer successivement avec remise trois boules dans une urne contenant quatre boules indiscernables au toucher. Portant respectivement les nombres -1 ; 0 ; 0 ; 1 .

On désigne par a, b et c les nombres obtenus respectivement au premier, au deuxième et au troisième tirage. A chaque tirage de trois boules, associe dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ le point $M(a; b; c)$. La maquette sera réalisée par l'artiste qui, à l'issue du jeu, obtiendra un point appartenant au plan (P) perpendiculaire à la droite $(D): x - 1 = y + 1 = z + 1$ et passant par l'origine O du repère.

Tâches :

- 1- Déterminer les éléments caractéristiques du cercle (C) qui sera dessiné sur la maquette. On pourra calculer $\frac{Z_C - Z_B}{Z_C - Z_A}$. **(1,5pt)**
- 2- Déterminer la primitive de la courbe qui va servir dans la réalisation du tableau d'art. **(1,5pt)**
- 3- Déterminer la probabilité de gagner la réalisation de la maquette. **(1,5pt)**

Présentation : (0,5pt)