Cette épreuve, étalée sur deux pages, est notée sur 20 points. Toutes les questions sont obligatoires.

PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES : (15 points)

EXERCICE 1 : (3 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. On considère les points $A(1,1,3)$, $B(-3,1,1)$, $C(3,-2,1)$, $D(3,5-1)$ et $I(2,3,1)$. Soit (S) l'ensemble des points $M\ (x,y,z)$ de l'espace tels que : $x^2+y^2+z^2-4x-6y-2z+5=0$.

1. **(a)** Calcule $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ puis déduis-en que les points A,B et C détermine un plan (P). **0,5pt**
   (b) Montre qu'une équation cartésienne de (P) est $x+2y-2z+3=0$. **0,25pt**
   (c) Vérifie que $ABCD$ est un tétraèdre et calcule son volume $\mathscr{V}$. **0,5pt**
2. **(a)** Donne la nature et les éléments géométriques de (S). **0,5pt**
   (b) Etudie l'intersection de (S) et (P). **0,5pt**
3. Ecris l'expression analytique de la réflexion φ de plan (P). **0,75pt**

EXERCICE 2 : (5 points)

On considère la fonction f définie sur $I=[0;+\infty[$ par : $f(x)=\begin{cases} x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \text{ si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

1. Montre que f est dérivable à droite en 0. **0,25pt**
2. **(a)** Montre que pour tout $x\geq 0$, on a : $x-\dfrac{x^2}{2}\leq\ln(x+1)\leq x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$. **0,5pt**
3. **(b)** Calcule $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$. **0,25pt**
   (c) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et étudie la branche infinie de C_f au voisinage de $+\infty$. **0,5pt**
4. **(a)** Montre que pour tout $x>0$, on a : $f'(x)=2x\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{2(x+1)}\right)$. **0,5pt**
   (b) Montre que f' est continue sur I. **0,5pt**
   (c) En utilisant le théorème des accroissements finis, montre que pour tout $x>0$, on a : $\dfrac{1}{x+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)<\dfrac{1}{x}$, puis déduis-en le tableau de variations de f sur I. **0,75pt**
5. Trace la courbe C_f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. (trace la demi-tangente en O). **0,5pt**
6. On considère la suite (U_n) définie par $U_0>0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}, U_{n+1}=f(U_n)$.
   (a) Montre que pour tout $n\in\mathbb{N}: U_n>0$ et que pour tout $x>0$, on a : $f(x)<x$. **0,5pt**
   (b) Déduis-en que la suite (U_n) est convergente et détermine sa limite. **0,5pt**

EXERCICE 3 : (4 points)

A) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$. $A(1+i)$ et $B\left(-1+i\sqrt{3}\right)$ sont les points de ce plan. Soit l'équation $(E): z^2-i\left(1+\sqrt{3}\right)z+(1+i)\left(-1+i\sqrt{3}\right)=0$.

1. Montre que le discriminant Δ de (E) est $\Delta=\left(z_B-z_A\right)^2$. **0,25pt**
2. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). **0,5pt**

3. **(a)** Donne l'écriture algébrique, puis l'écriture trigonométrique de $\frac{z_B}{z_A}$. **0,5pt**

(b) Déduis-en les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et de $\sin\frac{5\pi}{12}$. **0,5pt**

4. Donne l'écriture complexe de la similitude directe S de centre O qui transforme A en B. **0,5pt**

B) 1. Résous dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $12x-5y=3$. **0,75pt**

2. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres complexes définie par $z_0=i$ et $z_{n+1}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)z_n$.

On désigne par M_n le point image de z_n dans le plan complexe précédent.

(a) Démontre par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}, z_n=e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)}$. **0,5pt**

(b) Déduis-en l'ensemble des entiers naturels n tels que $M_n\in[Ox)$. **0,5pt**

<u>EXERCICE 4</u> : (3 points)

E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont une base est $\mathscr{B}=\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Soit φ l'endomorphisme de E qui à tout vecteur $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ associe le vecteur $\varphi(\vec{u})=(-x+2y)\vec{i}+(2x-4y+z)\vec{j}+x\vec{k}$.

1. Ecris la matrice M de φ dans la base $\mathscr{B}$. **0,5pt**
2. Montre que φ est un automorphisme de E , puis déduis-en $\operatorname{Im}\varphi$ et $\ker\varphi$. **1pt**
3. On considère les vecteurs $\vec{e_1}=\vec{i}-2\vec{j}$ et $\vec{e_2}=2\vec{j}-4\vec{k}$.

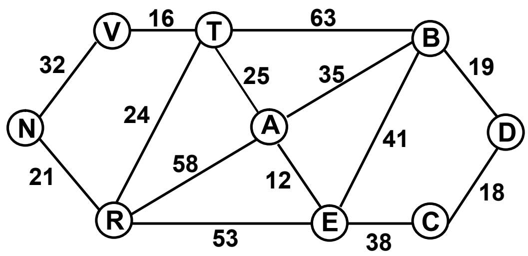
(a) Montre que $\mathscr{B}'=\left(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{j}\right)$ est une base de E. **0,5pt**

(b) Ecris la matrice de φ dans la base $\left(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{j}\right)$. **1pt**

<u>PARTIE B</u> : EVALUATION DES COMPETENCES (5 points)

<u>SITUATION</u> : *On prendra* $\sqrt{3}\simeq 1,7$

Année	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6
Prix du kg de cacao y_i	400	460	520	560	640	720



Le tableau ci-dessus présente l'évolution du prix du kg de cacao en FCFA au Cameroun de 2015 à 2020. M. NANGA, jeune cultivateur, produit en moyenne $4000kg$ de cacao par an. Il ne compte que sur la vente de 2026 pour tôler sa maison dont le devis s'élève à $3.760.000$ FCFA.

Lors d'une campagne électorale, son épouse, femme politique doit partir de sa ville D à $7h25\min$ pour se rendre à un meeting prévu à $9h$ dans la ville N. Elle utilise le réseau autoroutier donné par le graphe $\mathscr{G}$ ci-dessus qui représente les différentes villes A,B,C,D,E,T,V,R ainsi que les tronçons de route (en km) reliant ces villes. Son chauffeur roule à une vitesse constante de $80km/h$.

Le séchoir à cacao de M. NANGA est délimité par le quadrilatère $IJKL$ où I,J,K et L sont les points images de 4 solutions non réelles de l'équation $(E): z^5+2z^4+2z^3-z^2-2z-2=0$ dans un repère orhonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ d'unité $1dam$. z_I et z_L sont 2 racines cubiques de l'unité et $\operatorname{Im}(z_I)>0$.

<u>Tâches</u> :

1. M. NANGA pourra-t-il tôler sa maison en 2026 comme prévu ? **1,5pt**
2. Mme NANGA peut-elle arriver avant l'heure de début du meeting électoral ? **1,5pt**
3. Une bâche de $90m^2$ peut-elle entièrement recouvrir le séchoir à cacao de M. NANGA? **1,5pt**

Présentation générale : 0,5pt