LYCEE DE NKOLMESSENG		
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES	**Travaux dirigés**	**2025 - 2026**
EXAMINATEUR : Serge TCHIO	**CIBLE : Fonctions logarithmes**	**CLASSE : TD**

EXERCICE 1 :

I. Simplifier chacune des écritures suivantes :

$\boldsymbol{A} = \ln 27 + 2\ln 8 - 3\ln 108$ $\qquad$ $\boldsymbol{B} = 6\ln 4 + 3\ln\sqrt{8} - \ln\left(\frac{1}{16}\right)$

$\boldsymbol{C} = \frac{1}{4}\ln 81 + 4\ln\sqrt{3} - \ln\left(\frac{1}{27}\right)$ $\qquad$ $\boldsymbol{D} = \ln\left(\sqrt{2}+1\right)^{2026} + \ln\left(\sqrt{2}-1\right)^{2026}$

$\boldsymbol{E} = 2\ln\sqrt{e} + \ln\left(e\sqrt{e}\right) - \frac{1}{3}\ln(e^9)$ $\qquad$ $\boldsymbol{F} = log_2\left(\frac{1}{5}\right) + log_2(10) + log_{\frac{1}{3}}\left(\sqrt[5]{3}\right)$

II. On pose $\alpha = \ln a$ et $\beta = \ln b$. Exprimer en fonction de α et β les réels suivants :

$\boldsymbol{A} = \ln(a^3b^5)$ $\qquad$ $\boldsymbol{B} = \ln\left(\frac{a^2}{b^7}\right)$ $\qquad$ $\boldsymbol{C} = \ln\left(\frac{1}{\sqrt[6]{a^6b^3}}\right)$

EXERCICE 2 :

Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \ln(2-4x)$ $\qquad$ **b)** $f(x) = \ln|2-4x|$ $\qquad$ **c)** $f(x) = \ln(3x-2) + \ln(5x-2)$

d) $f(x) = \ln\left(\frac{3x-2}{5x-2}\right)$ $\qquad$ **e)** $f(x) = \frac{\ln x+1}{\ln x-1}$ $\qquad$ **f)** $f(x) = \ln(x^2+3x-4)$

g) $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{\ln(\ln x)}$ $\qquad$ **h)** $f(x) = \frac{\ln x}{x-2}$

EXERCICE 3 :

I. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

a) $\ln(x-2) + \ln(x+1) = \ln(3x-5)$ $\qquad$ **b)** $\ln^3 x - 2\ln^2 x - \ln x + 2 = 0$

c) $\ln\left(\frac{2x-3}{5x-1}\right) \leq 0$ $\qquad$ **d)** $\ln^2 x + 2\ln x - 15 < 0$ $\qquad$ **e)** $(0{,}8)^n \leq 0{,}1$

f) $\ln x + \ln(2-x) + \ln(x+4) \geq \ln 5x$ $\qquad$ **g)** $log_3\left(\sqrt{x}\right) + \frac{1}{2}log_9(4x+15) = 0$

h) $log_{\frac{1}{2}}(2x+1) > log_{\frac{1}{2}}(x+4)$

II. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$\begin{cases} x+y=65 \\ \ln x + \ln y = 6\ln 2 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} \ln(xy^5) = -2 \\ \ln\left(\frac{x^2}{y^3}\right) = 9 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x^2+y^2 = 29 \\ \ln x + \ln y = \ln 10 \end{cases}$

$\begin{cases} xy = 243 \\ log_x(y) + log_y(x) = \frac{17}{4} \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} 2^{x+1} - 3log_2(y) = -11 \\ 2^{x+1} + 7log_2(y) = 43 \end{cases}$

III. On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln(ax+b)$. Déterminer les réels a et b pour que la courbe de f passe par le point $A(2,0)$ et ait en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation $y = 2x$

EXERCICE 4 :

I. MAGNY a placé la somme de 500 000 FCFA dans une tontine à taux d'intérêts annuels composés de 6%. Après combien d'années de placement le capital initial sera-t-il d'au moins 800 000 FCFA

II. Une entreprise fabrique et vend des objets dont le coût de productions en milliers de FCFA est donné en fonction du nombre $x \in [5;40]$ d'objets vendus par $C(x) = 20\ln(3x+1)$. Un objet est vendu à 3000 FCFA. Le directeur souhaite connaitre le nombre minimum d'objets à vendre pour que l'entreprise réalise un bénéfice tout en sachant que toute la production est vendue

EXERCICE 5 :

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+2-4\ln x)$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5\ln x+1}{2\ln x+3}$ **c)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{2x-7}{x+1}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)\ln x$ **e)** $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x\ln x}\right)$ **f)** $\lim\limits_{x\to-1^+}\left(\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)\right)$

EXERCICE 6 :

I. Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle I

a) $f(x)=\frac{4x+2}{x^2+x+1}$ $I=\mathbb{R}$ **b)** $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ $I=]1;+\infty[$ **c)** $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ $I=]0;+\infty[$

II. On définit la fonction f sur $I=\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$ par $f(x)=\frac{3x^2+2x-2}{3x-1}$

Déterminer la primitive de f sur I qui s'annule en 1

III. On définit la fonction f sur $I=]2;+\infty[$ par $f(x)=\frac{2x-5}{(x-2)(1-x)}$

a) Trouver deux réels a et b tels que pour tout $x\in I$, $f(x)=\frac{a}{1-x}+\frac{b}{x-2}$

b) En déduire les primitives de f sur I

IV. On définit la fonction f sur $I=]1;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x(x^2-1)}$

a) Trouver trois réels a, b et c tels que pour tout $x\in I$, $f(x)=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+1}$

b) Déterminer toutes les primitives de f sur I

EXERCICE 7 :

Soit f la fonction définie sur $]-1;5]$ par $f(x)=x+1-\ln(x+1)$. On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité sur les axes 2cm

1) Calculer la limite de f à droite de 1

2) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations

3) Déterminer une équation de la tangente (T) au point d'abscisse $-\frac{1}{2}$

4) Construire soigneusement la courbe (C_f) et la tangente (T)

5) a) Calculer f'' puis dresser le tableau de variations de f'

b) En déduire que $\forall x\in[0;5]$, $0\le f'(x)\le\frac{5}{6}$ puis que $1\le f(x)\le\frac{5}{6}x+1$

EXERCICE 8 :

A) Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=1-x^2-\ln x$

1) Dresser le tableau de variations de g

2) Calculer g(1) puis déduire le signe de g suivant les valeurs de x

B) On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=-x+3+\frac{\ln x}{x}$

1) Calculer les limites aux bornes du domaine de définition de f

2) Montrer que la droite $(\triangle)$ d'équation $y=-x+3$ est asymptote à (C_f)

3) Déterminer les coordonnées du point A de (C_f) ou la tangente est parallèle à $(\triangle)$

4) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in[3;4]$ puis exprimer $f(\alpha)$ en fonction de α

5) Construire la courbe (C_f)

EXERCICE 9 :

Soit f la fonction de la variable réelle définie par $f(x)=2x+1+\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$

1) Calculer les limites aux bornes de D_f

2) Montrer que (C_f) admet une asymptote dont on donnera une équation

3) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variations

4) Construire soigneusement (C_f)