COLLÈGE F-X. VOGT		Année scolaire 2025-2026
Département de Mathématiques	**CONTROLE**	**Situation Scolaire N°3** Date : 17 Janvier 2026

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Niveau : **Tle C** Durée : **03 heures 45 minutes** Coef: 7

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES 15,5 POINTS

Exercice 1 : 04,00 Points

ABCD est un carré direct du plan. I et K sont les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[CD]$. On se propose d'étudier la similitude directe s telle que $s(A) = I$ et $s(C) = K$. On fera une figure en prenant $AB = 4\ cm$.

1- Déterminer le rapport et l'angle de s. ***0,75pt***

2- Démontrer que le centre Ω de s est le point d'intersection autre que I des cercles de diamètre $[AD]$ et $[IC]$. Placer Ω sur la figure. ***0,75pt***

3- Donner l'écriture complexe de s dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$. ***0,75pt***

4- On suppose à présent que le point A a pour coordonnées $(12; 18)$, P est le point de coordonnées $(x; 0)$ et Q le point de coordonnées $(0; y)$ tel que $mes\left(\widehat{\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ}}\right) = -\frac{\pi}{2}$. On se propose dans cette question de chercher les couples (P, Q) ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs.

a) Montrer que x et y vérifie l'équation : $(E): 2x + 3y = 78$. ***0,5pt***

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation (E). ***0,75pt***

c) Combien ya-t-il de couples de points (P, Q) ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs tels que : $-6 \leq x \leq 21$ et $-5 \leq y \leq 14$? ***0,5pt***

Exercice 02 : 03,5 Points

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On considère les points $A(3, -2, 2)$; $B(6, 1, 5)$; $C(6, -2, -1)$ et $D(0, 4, -1)$. Soit I le milieu de [AC] et J celui de [BD]. On désigne par (P) l'ensemble des points M de l'espace tel que $MA^2 - MB^2 + MC^2 - MD^2 = -5$. (Γ) est la droite passant par B et de vecteur directeur $\vec{u}$; H désigne le projeté orthogonal de A sur (D).

1- Montrer que $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \left(\frac{\overrightarrow{BA}.\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\right)\vec{u}$. ***0,5pt***

2- Montrer que le point D n'appartient pas au plan (ABC). ***0,5pt***

3- Montrer que la droite (AD) est orthogonale au plan (ABC). ***0,5pt***

4- Calculer le volume du tétraèdre ABCD. ***0,5pt***

a) Montrer que $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{JI}$. ***0,5pt***

b) Montrer qu'un point M appartient à (P) si et seulement si $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{IJ} = 4$. ***0,5pt***

c) Déterminer alors l'ensemble (P). ***0,5pt***

Exercice 3 : 04,50 Points

Pour chaque entier n strictement positif, on définit une fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}$. On désigne par $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de f_n.

1- Démontrer que toutes les courbes $(\mathcal{C}_n)$ passent par deux points fixes dont on précisera les coordonnées. ***0,5pt***

2- Montrer que la dérivée $f_n{}'$ de f_n est du signe de x^{n-1}.Puis en déduire le sens de variation de f_n.

3- **a)** Étudier, en discutant suivant les valeurs de $n \geq 1$, les limites de f_n en $+\infty$ et en $-\infty$. ***0,75pt***

b) Dresser, suivant les valeurs de n, les différents tableaux de variations de f_n. ***0,5pt***

4- Étude de f_0.

a) Étudier les variations de f_0 et dresser son tableau de variation. ***0,5pt***

b) Montrer que l'équation $f_0(x) = x$ admet sur $\left[\frac{1}{2};1\right]$ une solution unique α. ***0,5pt***

c) Montrer que pour tout $x \in \left[\frac{1}{2};1\right]$, $|f'_0(x)| \leq \frac{4}{5}$. ***0,5pt***

d) Montrer que pour tout $x \in \left[\frac{1}{2};1\right]$, $|f_0(x) - \alpha| \leq \frac{4}{5}|x - \alpha|$. ***0,5pt***

<u>Exercice 4</u> : 03,5 Points

Soit E un espace vectoriel réel et $B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base de E. On désigne par f l'automorphisme de E dont la matrice dans la base B est $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; On pose $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice unité.

1- Déterminer le noyau Ker$f$ et l'image Imf de f. ***0,75pt***

2- Justifier que M est inversible et que son inverse est $M^{-1} = \frac{1}{2}(M - I)$. ***0,75pt***

3- Soit D la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{e}_1 = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$ et $D^{\perp}$ le sous espace vectoriel orthogonal à D.

a) Montrer que $D^{\perp}$ est le plan vectoriel d'équation $x + y + z = 0$. ***0,5pt***

b) Déterminer une base de $D^{\perp}$. ***0,5pt***

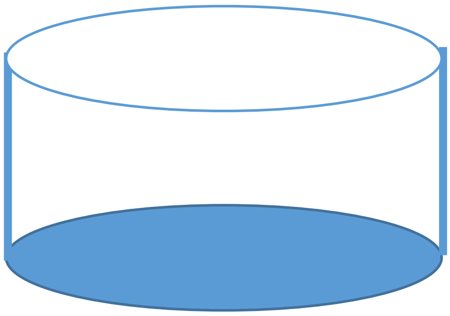
c) Montrer que $D \cap D^{\perp} = \{\vec{0}\}$. ***0,5pt***

d) Démontrer que D et $D^{\perp}$ sont deux sous espaces vectoriels supplémentaire de E. ***0,5pt***

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES 04,5 POINTS

Dans la ville de Yakba, M. Nkana possède une grande ferme où il pratique l'élevage des poulets et aussi la pisciculture, on peut observer trois objets G, H et J que l'on peut repérer par leur coordonnées dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on a alors $G\left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right)$, $H\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ et $J(0, 1, 0)$. La ferme dispose de deux caméras de surveillances, fixées à l'intersection de l'ensemble des points M de l'espace tels que $\|\overrightarrow{MG} \wedge \overrightarrow{MH}\| = \|\overrightarrow{MJ}\|$ et de la droite d'équations cartésiennes $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

M. Nkana utilise ***un grand fut cylindrique*** de 2,5 mètres de hauteur. Ce fut devra être carreler (le fond et le bord intérieur uniquement) avec des carreaux coutant 10000 francs le mètre carré avant d'y mettre les poissons. Pour ce fut, si un point M est placé au bord alors il pourra être repéré par ses coordonnées $(x; y)$ tels que $\boldsymbol{x + iy = \frac{1}{i + (1-i)t}}$ avec x, y, t des nombres réels et i le complexe tel que $i^2 = -1$.



Fût cylindrique de hauteur 2,5 m et de rayon de base r. Son aire totale est : $\mathcal{A} = \pi r(2h + r)$.

La cellule de crise du suivi de la grippe aviaire de l'INS a publié les données du tableau ci-dessous, où x_i est le nombre de cas confirmés et y_i le nombre de guérisons, pour les mois de février à juillet 2025 et en rappelant que le nombre de guérisons dans cette ville en octobre 2025 était de 27.

Mois	***Février***	***Mars***	***Avril***	***Mai***	***Juin***	***Juillet***
$\boldsymbol{x_i}$	450	480	495	510	525	540
$\boldsymbol{y_i}$	26	27	29	31	32	35

M. Nkana voudrait retrouver (***par la méthode des moindres carrés***) une estimation du nombre de guérisons durant ce mois d'octobre 2025.

1- Après avoir vérifié que les coordonnées du point M sont telles que $x^2 + y^2 = x - y$, déterminer la dépense de M. Nkana pour l'achat des carreaux. ***1,5pt***

2- Déterminer la position des deux caméras de surveillance dans la ferme de M. Nkana. ***1,5pt***

3- Aider M. Nkana à retrouver cette estimation du mois d'octobre. ***1,5pt***