Exercice 1 : 5,5 points

On considère le polynôme P de la variable complexe z défini par :

$$P(z) = z^3 - (6 + i\sqrt{3})z^2 + (11 + i4\sqrt{3})z - 6 - i3\sqrt{3}\ ,$$

1.a) Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet deux solutions réelles . 1pt

b) Calculer $P(2 + i\sqrt{3})$; en déduire dans $\mathbb{C}$ l'ensemble solution de l'équation (E) : $P(z) = 0$. 1pt

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$; on prendra 1 cm comme unité graphique.

On considère les points A, B, C, E, I et G d'affixes $z_A = 3, z_B = 2 + i\sqrt{3}, z_C = -1, z_E = 7, z_I = 1$ et $z_G = 11 + i4\sqrt{3}$.

a) Démontrer que le triangle IAB est équilatéral. 0,75pt

b) Démontrer que les points B, C et G sont alignés. 0,75pt

b) Placer les points A, B, C, E et G dans ce repère. 1 pt

3. Calculer l'affixe du point F de l'axe des abscisses tel que le triangle EFG soit équilatéral. 1pt

Exercice 2 : 4,75 points

A.On considère les intégrales $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos^2 x\, dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin^2 x\, dx$

1) Calculer I+J 0,75pt

2) Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$f(x) = \frac{1}{4} e^{2x} (\cos 2x + \sin 2x)$$

a) Montrer que f est dérivable sur R et calculer f '(x). 0,75pt

b) En déduire I – J. Puis les valeurs exactes de I et J. 1,5pt

B. 1) Parmi les triplets suivants (1;4;6) et (0,5;4;7), choisir celui qui n'est pas solution dans $\mathbb{R}^3$ du système (S) : $\begin{cases} 2x + y + z = 12 \\ 2x - y + z = 4 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$; on justifiera son choix. 0,5pt

2) En déduire les triplets de réels, solutions des systèmes suivants :

(S_1) : $\begin{cases} 2e^x + e^y + e^z = 12 \\ 2e^x - e^y + e^z = 4 \\ 2e^x + e^y - e^z = 0 \end{cases}$ 1,25pt

Problème : 9,75points

Ce problème comporte deux parties A et B liées.

PARTIE A : 3points

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $h(x) = -3 + x^2 + 2\ln x$

1. Calculer la fonction dérivée de h et étudier son signe. 1pt
2. Dresser le tableau des variations de h. 0,75pt

3. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0; +\infty[$ et $\alpha \in]1; 2[$. 0,75pt
4. Donner le signe de h sur $]0; +\infty[$. 0,5pt

PARTIE B : **6,75points**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{1}{x} - 2\frac{\ln x}{x}$ et (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, d'unité graphique 1 cm.

1. a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^>} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat. 0,5pt

   b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. 0,25pt
2. a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote oblique a (C_f) en +∞ . 0,5pt

   b) Etudier les positions relatives de (C_f) par rapport à (D). 0,75pt
3. a) Montrer que, pour tout $x \in]0; +\infty[$,

   $f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$ où f' est la fonction dérivée de f. 1pt

   b) En déduire le tableau des variations de f. 0,75pt
4. Tracer (C_f) et (D) dans le repère orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Prendre $\alpha = 1,5$. 1,25pt
5. a) En remarquant que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $\frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x} \times \ln x$, montrer que $I = \int_1^\alpha \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} ln^2 \alpha$. 0,75pt

   b) Calculer alors $J = \int_1^\alpha f(x)\, dx$; interpréter graphiquement le résultat. 1pt