REPUBLIQUE DU CAMEROUN
MINESEC / DRLT / DDSM
COLLEGE POLYVALENT GEORGES SCHWAB

Samedi 24 janvier 2026

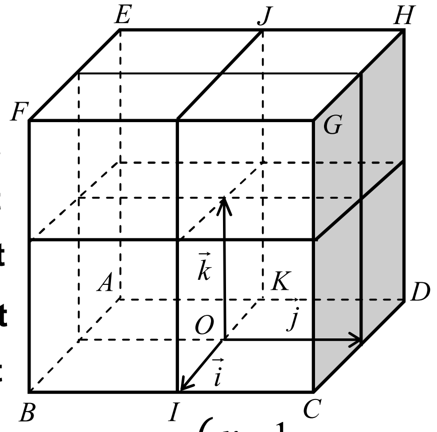
Année scolaire : 2025-2026
Classe : T^{le}C
Durée : 4h Coefficient : 7
Prof : T. N. AWONO MESSI

Cette épreuve, étalée sur deux pages, est notée sur 20 points. Toutes les questions sont obligatoires.

PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES : (15 points)

EXERCICE 1 : (3 points)

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 2. On choisit le repère orthonormé direct $\mathscr{R} = \left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ où O est le centre du carré $ABCD$. On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[EH]$ et $[AD]$.



1. On donne $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{AJ}$.
   - **(a)** Montre que $\overrightarrow{N} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$. **0,75pt**
   - **(b)** Écris une équation cartésienne du plan (AIJ). **0,5pt**
   - **(c)** Calcule l'aire $\mathscr{A}$ du triangle AIJ. **0,5pt**
2. **(a)** Montre que $AFIJ$ est un tétraèdre et calcule son volume. **0,75pt**
   - **(b)** Déduis-en la hauteur h du tétraèdre $AFIJ$ issue de F. **0,5pt**

EXERCICE 2 : (5 points)

A) Soit g et f les fonctions définies sur $[1;+\infty[$ par $g(x) = x\ln x - x + 1$ et $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{\ln x} & \text{si } x > 1 \\ f(1) = 1 \end{cases}$.

1. Étudie les variations de g et déduis-en le signe de $g(x)$ pour $x \in [1;+\infty[$. **0,5pt**
2. Montre que f est continue en 1. **0,25pt**
3. **(a)** Montre que pour tout réel $t \in [1;+\infty[$, on a : $t - 1 - (t-1)^2 \leq 1 - \dfrac{1}{t} \leq t - 1$. **0,5pt**
   - **(b)** Déduis-en que pour tout $x \geq 1$: $\dfrac{(x-1)^2}{2} - \dfrac{(x-1)^3}{3} \leq x - 1 - \ln x \leq \dfrac{(x-1)^2}{2}$. **0,5pt**
   - **(c)** Détermine $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x-1-\ln x}{(x-1)^2}$ et déduis-en que f est dérivable à droite en 1. **0,5pt**
4. **(a)** Étudie les variations de f et dresse son tableau de variations. **0,75pt**
   - **(b)** Trace la courbe $\mathscr{C}$ de f dans le repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. **0,5pt**

B) On considère la fonction F définie sur $[1;+\infty[$ par : $F(1) = \ln 2$ et $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,dt$ si $x > 1$.

1. **(a)** Montre que pour tout x de $]1;+\infty[$ et pour tout t de $[x;x^2]$, on a :
   $\dfrac{x}{t\ln t} \leq \dfrac{1}{\ln t} \leq \dfrac{x^2}{t\ln t}$ et déduis-en que pour tout $x > 1$: $x\ln 2 \leq F(x) \leq x^2 \ln 2$. **0,75pt**
   - **(b)** Montre alors que F est continue en 1. **0,25pt**
2. Montre que F est dérivable sur $]1;+\infty[$ et calcule $F'(x)$ pour tout $x > 1$. **0,5pt**

EXERCICE 3 : (3,5 points)

A) L'espace vectoriel E est rapporté à une base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, φ est l'endomorphisme de E défini par :
$\varphi\left(\vec{i}\right) = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\varphi\left(\vec{j}\right) = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ et $\varphi\left(\vec{k}\right) = 3\vec{j} - 3\vec{k}$.

1. Ecris la matrice de φ dans cette base. **0,25pt**

2. Détermine une base de $\ker\varphi$, puis justifie que φ n'est pas bijectif. **0,75pt**

3. **(a)** Montre que $\operatorname{Im}\varphi$ est un plan vectoriel de E. **0,5pt**

(b) Vérifie que $\varphi\left(\vec{k}\right)=2\varphi\left(\vec{i}\right)-\varphi\left(\vec{j}\right)$, puis déduis-en une base de $\operatorname{Im}\varphi$. **0,5pt**

B) 1. Montre par récurrence que pour tout $n\geq 1$, on a : $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)(-1)^{k-1}=n(-1)^{n-1}$. **1pt**

2. Déduis-en la somme $S=29-31+33-35+\cdots+61$. **0,5pt**

EXERCICE 4 : (3,5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. Soient A et B les points d'affixes respectives $z_A=1-i$ et $z_B=7+\frac{7}{2}i$. On considère la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $4x+3y=1$.

1. Montre que l'ensemble des points de $(\mathscr{D})$ à coordonnées entières est l'ensemble des points $M_k(3k+1;-4k-1)$ où $k\in\mathbb{Z}$. **1pt**

2. Soit S la similitude directe de centre A qui transforme B en $M_{-1}(-2;3)$.

(a) Détermine le rapport k et l'angle θ de S. **0,5pt**

(b) Donne l'écriture complexe de S. **0,5pt**

3. On pose $B_1=S(B)$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*, B_{n+1}=S(B_n)$.

(a) Exprime AB_{n+1} en fonction de AB_n , puis l'angle $\left(\overrightarrow{AB_1},\overrightarrow{AB_n}\right)$ en fonction de n. **0,75pt**

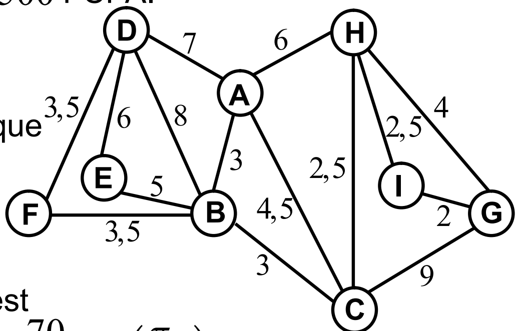
(b) Détermine l'ensemble des entiers n pour lesquels A, B_1 et B_n sont alignés. **0,75pt**

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES (5 points)

SITUATION :

Sur un terrain communal de forme rectangulaire, un maire décide de lancer un projet de culture de tomates. Les dimensions du champ (en hm) sont les modules des deux nombres complexes z_1 et z_2, solutions du système d'équations : $\begin{cases} iz_1-z_2=-1+i \\ 0,5\overline{z_1}+(1+i)\overline{z_2}=2+5i \end{cases}$. Le rendement du sol est de $500kg$ de tomates à l'hectare. Un cageot de $2,5kg$ de tomates est vendu à 6500 FCFA.

Parti du parking G, un camion de la mairie collecte les ordures dans les quartiers A,B,C,D,E,F,H et I. Le graphe ci-contre indique les voies et les distances, en km , entre ces différents quartiers. Ce camion consomme $1,5l$ de gasoil au km et le litre coûte 840 FCFA.



Dans cette commune, la température (en °C) t heures après $9h$ est approximativement donnée par la fonction T définie par $T(t)=\frac{80}{9}+\frac{70}{9}\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)$. Un ingénieur agronome affirme que si la température moyenne de cette commune entre $9h$ et $21h$ est en dessous de 14 °C, la production de tomates sera bonne.

Tâches :

1. Le maire pourra-t-il acheter un camion de $8.200.000$ FCFA après la vente des tomates ? **1,5pt**

2. Quel est le coût minimal en gasoil de ce camion pour aller du parking G au quartier D ? **1,5pt**

3. La production de tomates de cette commune sera-t-elle bonne? **1,5pt**

Présentation générale : 0,5pt