RÉPUBLIQUE DU CAMEROUN

Paix-Travail-Patrie

*****

UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ 1

*****

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

*****

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

REPUBLIC OF CAMEROON

Peace-Work-Fatherland

*****

UNIVERSITY OF YAOUNDE 1

*****

HIGHER TEACHER'S TRAINING COLLEGE

*****

DEPARTEMENT OF MATHEMATICS

INTRODUCTION SUR LA THEORIE DES GRAPHES POUR LE SECOND CYCLE AU CAMEROUN

Mémoire rédigé en vue de l'obtention du diplôme de professeur des lycées d'Enseignement Secondaire deuxième grade (D.I.P.E.S II) en mathématiques

Par

NDAYOU KOUOTOU SANDRINE

Matricule : 12Y296

Licence en Mathématiques

Sous la direction de :

Pr ANDJIGA NICOLAS GABRIEL

Professeur

Année académique : 2020 - 2021

Dédicace

Je dédie ce mémoire à mon époux Giresse NGOUOKO.

Remerciements

En préambule à ce mémoire, j'adresse mes sincères remerciements à mon encadreur le Pr ANDJIGA NICOLAS GABRIEL qui a bien voulu assurer la direction de ce travail, pour sa disponibilité, sa patience et son aide.

Des remerciements particuliers à l'endroit du Dr LOUMGAM KAMGA VICTOR et du Dr TCHANTCHO HUGUE, pour les précieuses corrections qu'ils ont apportées à ce travail.

Je remercie également tous les enseignants du département de mathématiques de l'École Normale Supérieure de Yaoundé, pour leur disponibilité et la qualité des enseignements qu'ils nous ont apportées.

Des remerciements vont à mon époux GIRESSE NGOUOKO pour son amour inconditionnel, ses encouragements et son soutien, ainsi qu'à ma fille NÉHÉMIA NGOUOKO qui à été pour moi une source de motivation et de détermination.

Je ne saurais oublier tous mes camarades avec qui nous avons fondé une nouvelle famille, DIEFIE FLORENCE, SAMIHA MOUHAMAD, FAISSAL ABDELAZIZ, DJALA ZEMBES, NSEN MARIO, NDONTSOP CABREL,MBON RUBEN, NGASSA STEPHANE, FEZEU FREDY, ONANA FLORENT, TEDONGMENE LANDRY, mes filles TSOGMO CYBELE, KEUFACK LIDWINE et MAFFO ANGE.

J'adresse enfin des remerciements à tous ceux qui de près ou de loin ont contribué à la réalisation de ce mémoire.

Déclaration sur l'honneur

Le présent document est une œuvre originale du candidat et n'a été soumis nulle part ailleurs en partie ou en totalité, pour une autre évaluation. Les contributions externes ont été dûment mentionnées et recensées en bibliographie

Signature du candidat

NDAYOU KOUOTOU SANDRINE

Table des matières

Résumé

Ce travail a pour objectif de proposer un bon cours d'introduction à la théorie des graphes pour les classes de premières et terminales scientifiques. En effet depuis 2019, le programme officiel des classes de premières Scientifiques au Cameroun, a été enrichie de cette notion. Nous présentons un chapitre pour la classe de première divisé en trois leçons : Généralités sur les graphes, types de graphes et degré d'un sommet dans un graphe. Puis un chapitre pour la classe de Terminale divisé également en trois leçons : graphes et sous graphes pondérés, graphes connexes et applications, graphes eulériens et graphes hamiltoniens. Le cours est proposé dans le respect de l'approche par compétences, méthode d'enseignement actuellement en vigueur au Cameroun.

Mots clés : Graphes, Sommets, Arêtes, cycle.

Abstract

This work aims at proposing a good introductory course on graph theory for the "Première" and "Terminale" classes of science. Indeed, since 2019, the official curriculum of the classes of "Première" in Cameroon has been enriched with this notion. We present a chapter for "Première" class divided into three lessons : Generalities on graphs, types of graphs and degree of a vertex in a graph. Then we present a chapter for the "Terminale" class, also divided into three lessons : graphs and weighted subgraphs, related graphs and applications, Eulerian graphs and Hamiltonian graphs. The course is proposed in accordance with the competency-based approach, a teaching method currently in use in Cameroon.

Keywords : Graphs, vertices, edges, cycle.

Table des figures

Introduction

Le Cameroun a connu en 2014, une réforme de son système éducatif. Cette réforme a abouti à l'adoption de l'approche par compétences comme méthode d'enseignement au secondaire. Cette approche a pour but de permettre aux enfants d'acquérir des compétences pratiques pour qu'une fois sortis du système scolaire, ils soient en mesure de s'insérer dans la vie socio-professionnelle.

Dans cette optique de renouveau, le programme de mathématiques des classes de premières et terminales scientifiques se sont enrichis depuis 2019, d'un nouveau chapitre sur la théorie des graphes. En effet, la théorie des graphes est une théorie mathématique relative aux ensembles de nœuds et de liens (Elliot,2012). Le terme « graphe » désigne la représentation visuelle d'un tel ensemble. Les graphes modélisent de nombreuses situations concrètes où interviennent des objets en interaction. Ils s'appliquent quasiment dans tous les domaines de la vie. Nous pouvons en citer quelques-uns : la logistique et le transport, les enquêtes, les inter-connections routières ou ferroviaires, entre différentes agglomérations, les liens entre les composants d'un circuit électrique, le plan d'une ville et de ses rues, les échanges de ressources entre les filiales d'une organisation. . .

Le programme officiel de mathématiques conformément à l'approche par compétences présente les différentes notions sous trois grands axes : le cadre de contextualisation (Famille de situations et exemples de situations), l'agir compétent(catégories d'actions et exemples d'actions) et les ressources(savoirs, savoir-faire, savoir être et autres ressources).

Ainsi, Le chapitre de l'introduction à la théorie des graphes en classe de première scientifique a dans son cadre de contextualisation comme famille de situations : l'organisation des données et estimation des quantités dans tous les domaines de la vie et comme exemple de situations : les déplacements quotidiens, la pratique d'une activité de loisir ou sportive, la planification de repas ou d'activités agricoles, la participation à une activité de formation à l'école ou en milieu de travail... Les catégories d'actions liées à ce chapitre sont : l'estimation des quantités et la collecte, le traitement et l'exploitation des données et comme exemples d'actions : évaluer la fréquence des déplacements quotidiens, étudier des perfomances sportives, étudier les perfomances scolaires d'un établissement... Enfin, ce chapitre a pour objectif général de familiariser les apprenants avec les notions spécifiques de la théorie des graphes. Et comme objectifs spécifiques : définir les termes graphe, ordre d'un graphe, degré d'un sommet, sommets adjacents, sommet isolé, graphe simple, graphe orienté graphe complet, formuler et appliquer la relation entre la somme des degrés d'un graphe et son nombre total d'arêtes.

En ce qui concerne classe de terminale scientifique, le cadre de contextualisation a comme famille de situations : l'organisation des données et estimation des quantités dans tous les domaines de la vie et comme exemple de situations : l'optimisation des coûts de construction d'un réseau(transport, informatique...), la détermination d'un chemin de coût minimum dans un réseau. Les catégories d'actions liées à ce chapitre sont : modéliser des situations du monde réel par des graphes, exécuter des algorithmes de parcours de graphes, interpréter les résultats obtenus des algorithmes de parcours et comme exemples d'actions : modéliser un réseau routier sous forme d'un graphe, trouver à l'aide d'un algorithme un plus court chemin entre deux localités reliés par des routes. Les savoirs à développer dans ce chapitre sont : les rappels et définitions de quelques notions tels que graphes et sous-graphes, chaines, chemins et cycles, graphes connexes, arbres et arbres couvrants, graphes et sous-graphes valué(pondére). De même que des algorithmes tels que l'algorithme de Parcours en largeur(BFS), celui de Kruskral, de Prim et enfin de Dijkstra. Et comme savoir-faire : identifier un arbre couvrant de poids minimum, identifier/déterminer un arbre couvrant de poids minimum, déterminer un chemin de poids minimum (plus court chemin) entre deux sommets d'un graphe pondéré.

Il sera question dans notre mémoire de proposer un bon cours sur l'introduction à la théorie des graphes en classe de Première scientifique et sur les graphes en classe de Terminale scientifique en utilisant la méthode de l'approche par les compétences. Ce cours sera utile aussi bien aux enseignants présents sur le terrain qu'aux élèves.

Chapitre Un

COURS DE THÉORIE DES GRAPHES EN PREMIÈRE SCIENTIFIQUE

1.1 Leçon 1 : Généralités sur les graphes

Objectif pédagogique opérationnel : A la fin de cette leçon, chaque élève doit être capable de reconnaitre et définir un graphe simple.

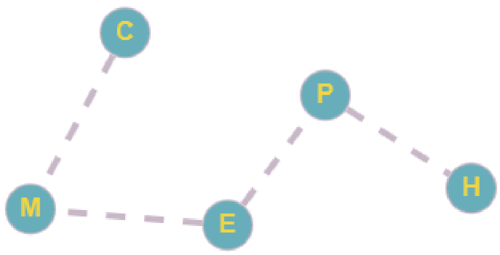
Motivation : Cette leçon est utile pour modéliser les interactions pouvant exister entre des personnes, des objets, des villes...

Situation problème :

Le chef d'un village aimerait avoir sur une carte un trajet pour quitter de la chefferie pour l'hôpital. Un topographe lui propose un trajet qui passe par le marché, le cours d'eau et la place publique.

FIGURE 1.1 – Image d'un village moderne

Le chef aimerait avoir d'autres propositions. Aidez le.



Activité d'apprentissage

1. Construisez le trajet proposé par le topographe.
2. Proposez d'autres trajets au chef du village ayant des itinéraires différents de celui du topographe.

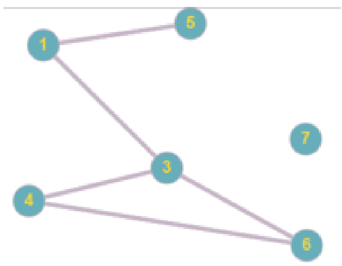
Résumé

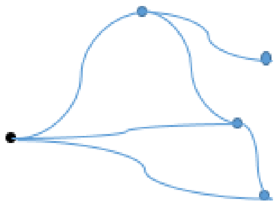
Définition 1.1.1

— **Un graphe fini** G est constitué d'un ensemble fini $V(G)$ dont les éléments sont appelés sommets et d'un ensemble $E(G)$ disjoint de $V(G)$ dont les éléments sont appelés arêtes, tels qu'à chaque arête $a \in E(G)$ est associé une paire $\{u, v\}$ de sommets éléments de $V(G)$. Le cas échéant, les sommets u et v sont appelés **extrémités** de a.

— Pour représenter graphiquement un graphe l'on représente les sommets par des points et les arêtes par des lignes (pas nécessairement droites) connectant les extrémités des arêtes.

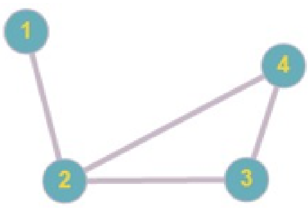
Exemple 1.1.1. *Les figures suivantes sont des représentations graphiques de graphes.*

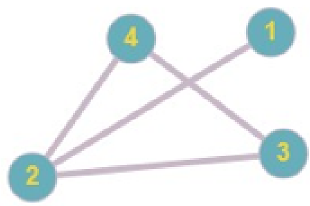




Remarque 1.1.1. *Il existe une infinité de représentations graphiques pour un graphe.*

Exemple 1.1.2. *Les figures ci-dessus sont deux représentations graphiques d'un graphe G. 1, 2, 3 et 4 sont les sommets du graphe.* $\{1; 2\}$, $\{2; 3\}$, $\{2; 4\}$ *et* $\{3; 4\}$ *sont les arêtes.*



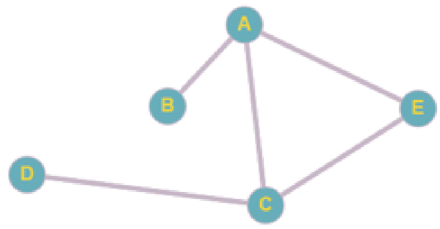


Définissons à présent des notions élémentaires pour les graphes.

Définition 1.1.2

On appelle **ordre d'un graphe** le nombre de sommets de ce graphe.

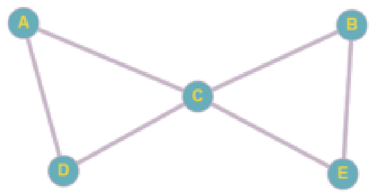
Exemple 1.1.3. *L'ordre du graphe ci-dessous est 5.*



Définition 1.1.3

Deux sommets sont dits **adjacents** s'ils sont reliés par une arête.

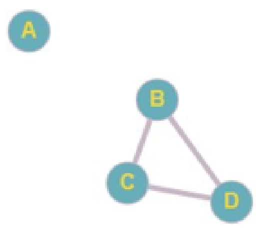
Exemple 1.1.4. *Les sommets A et C du graphe ci-dessous sont adjacents, de même que les sommets C et D, C et B, B et E, C et D, A et D.*



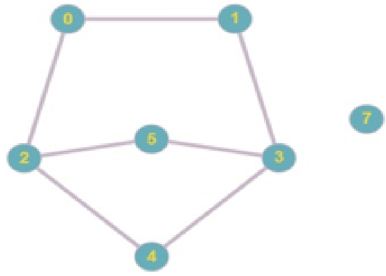
Définition 1.1.4

Un sommet est dit **isolé** lorsque aucune arête ne le relie aux autres sommets.

Exemple 1.1.5. *Le sommet A du graphe ci-dessous est isolé.*



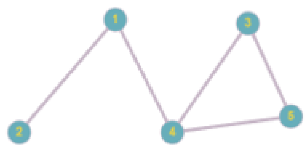
Exercice d'application 1.1.1. *Soit le graphe suivant :*



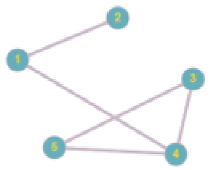
1. *Combien d'arêtes possède-t-il ?*
2. *Combien de sommets possède t-il ?*
3. *Quel est l'ordre de ce graphe ?*
4. *Parmi les sommets quels sont ceux qui sont : isolés ? adjacents ?*

Devoir 1.1.1. ***Exercice 1*** $*$

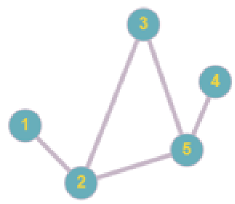
Parmi les représentations suivantes, quelles sont celles qui représentent le même graphe.



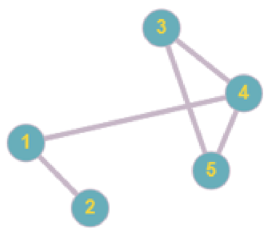
Graphe 1



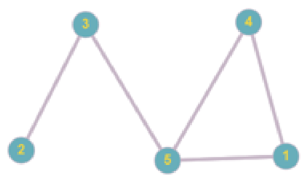
Graphe 2



Graphe 3



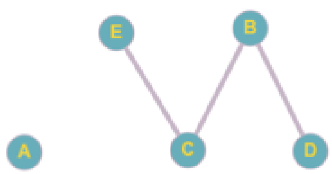
Graphe 4



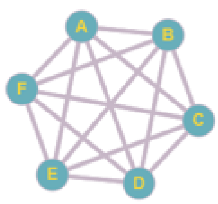
Graphe 5

Exercice 2 $*$

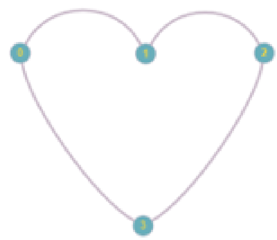
Déterminez l'ordre des graphes suivants :



Graphe 1



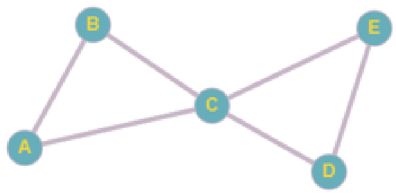
Graphe 2



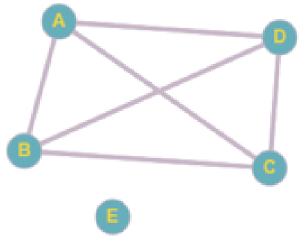
Graphe 3

Exercice 3 $*$

Déterminez parmi les sommets des graphes suivants ceux qui sont adjacents. Y'a-t-il des sommets isolés ?



Graphe 1

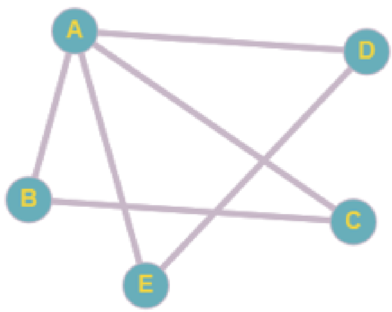


Graphe 2

Exercice 4 $**$

Le graphe suivant représente les relations d'amitié qui existe entre 05 personnes. Anna, Boris, Claire, Diane et Éric. Commentez ces relations.(Exemple : Anna est amie avec Claire).

Qui a le plus d'amis ?



Exercice 5 $**$

Un tournoi d'échecs oppose 06 personnes. Chaque joueur doit affronter tous les autres. Construisez un graphe représentant toutes les parties possibles.

1.2 Leçon 2 : Types de graphes

Objectif pédagogique opérationnel : A la fin de cette leçon, chaque élève doit être capable de justifier qu'un graphe est simple, orienté ou complet et résoudre des problèmes simples de la vie courante pouvant se modéliser en termes de graphes.

Motivation : Cette leçon peut être utiliser pour résoudre des énigmes ou enquêtes en les modélisant sous forme de graphe.

Situation problème :

Une ligue de football veut organiser un championnat ayant 04 équipes. Aidez la ligue à repartir les différents matches.

Activité d'apprentissage

On suppose que chaque équipe est représentée par un numéro.

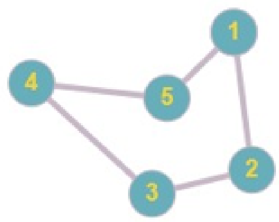
1. Construisez un graphe représentant tous les matches possibles.
2. Combien y'a t'il de matches à jouer ?

Résumé

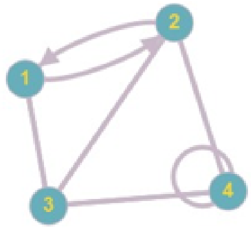
Définition 1.2.1

Un graphe est **simple** si au plus une arête relie deux sommets et s'il n'y a pas de boucle sur un sommet. Dans le cas contraire on parle de **multigraphe**.

Exemple 1.2.1. a) *Le graphe suivant est simple.*



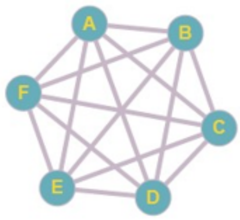
b) Le graphe suivant est un multigraphe.



Définition 1.2.2

Un graphe simple est dit **complet** si chaque sommet du graphe est relié à tous les autres sommets.

Exemple 1.2.2. *Le graphe ci-dessous est un graphe complet.*

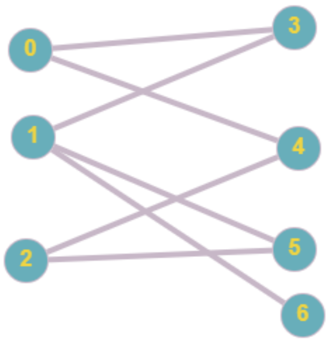


Définition 1.2.3

Un graphe est dit **biparti** lorsque l'ensemble S des sommets peut-être partagé en deux sous ensembles disjoints S_1 et S_2 tels que les éléments de S_1 (resp. S_2) ne sont reliés entre eux par aucune arête.

Exemple 1.2.3. *Le graphe ci-dessous est un graphe biparti* $S_1 = \{0, 1, 2\}$ *et* $S_2 = \{3, 4, 5, 6\}$

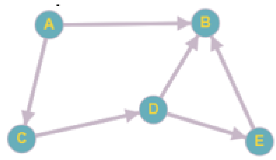
.



Définition 1.2.4

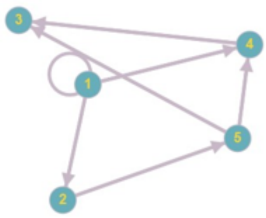
Un **graphe orienté fini** ou **digraphe** est un graphe dont les arêtes ont une orientation. Celle-ci sont alors représentées par des arcs en forme de flèche, tel que chaque arc est défini par une paire ordonnée de sommets.

Exemple 1.2.4. *Le graphe ci-dessous est un graphe orienté. Les différents arcs sont : (A,B) ; (A,C), (C,D), (D,B) , (D,E) et (E,B).*



Remarque 1.2.1. *Une **boucle** est un arc dont l'origine et l'extrémité sont identiques.*

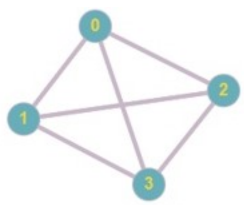
Exemple 1.2.5. *G est un multigraphe orienté, il y'a une boucle sur le sommet 1.*



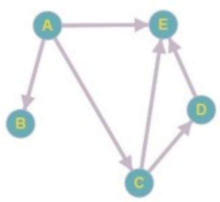
Exercice d'application 1.2.1. *Construisez un graphe orienté dont les sommets sont les entiers compris entre 1 et 12 et dont les arcs représentent la relation « être diviseur de ».*

Devoir 1.2.1. ***Exercice 1*** $*$

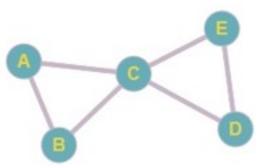
Parmi les graphes suivants existent t'ils des graphes orientés ou complet ?



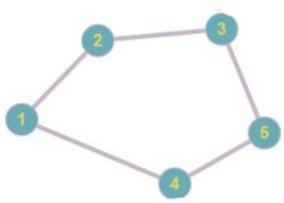
GRAPHE 1



GRAPHE 2



GRAPHE 3



GRAPHE 4

Exercice 2 $*$

Dessinez un graphe complet ayant respectivement : 03 sommets,04 sommets et 06 sommets.

Exercice 3 $**$

Lors d'un entrainement de basket Ball, les 05 joueurs s'entrainent à se faire des passes; chaque joueur doit recevoir la passe d'au moins un joueur, on précise que si un joueur a déjà reçu le ballon d'un autre joueur, celui-ci ne peux pas le lui renvoyer. Tous les joueurs doivent avoir été en contact avec un autre joueur (soit en tant que recevoir, soit en tant que passeur). Représentez la situation sous forme de graphes; quel type de graphe obtenez-vous ?

Exercice 4 $**$

Dans un tournoi de football, L'équipe E_1 *a battu les équipes* E_2, E_3 *et* E_4*; L'équipe* E_2 *a battu les équipes* E_3 *et* E_4*; et* E_3 *a battu* E_4.

1. *Représentez le graphe du tournoi.*
2. *De quel type de graphe s'agit-il ?*

Exercice 5 $***$

Une chèvre, un chou et un loup se trouvent sur la rive d'un fleuve; un passeur souhaite les transporter sur l'autre rive mais, sa barque étant trop petite, il ne peut transporter qu'un seul d'entre eux à la fois. Comment doit-il procéder afin de ne jamais laisser ensemble et sans surveillance le loup et la chèvre, ainsi que la chèvre et le chou ?

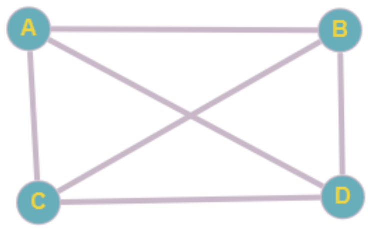
1.3 Leçon 3 : Degré d'un sommet dans un graphe

Objectif pédagogique opérationnel : A la fin de cette leçon, chaque élève doit être capable de résoudre des problèmes simples de la vie courante en utilisant le lemme des poignées des mains.

Motivation : Cette leçon permet de résoudre le problème d'existence de relations entre deux entités différentes(personnes, pays,entreprises..)

Situation problème :

Une ligue de football comporte 4 équipes A, B, C, D : elle organise un week-end d'entraînement. Un graphe peut représenter les matchs joués. Un segment qui relie 2 points représente un match joué entre les 2 équipes nommées par les sommets. On aimerait connaître le nombre de match disputé le week-end.



Activité d'apprentissage

En vous servant du graphe précédent,

1 Combien de matchs a disputé chaque équipe ?

2 Combien de matchs ont été disputés au cours de ce week-end ?

Résumé

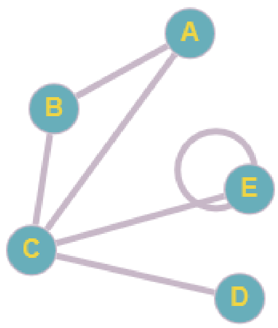
Définition 1.3.1

1 Soit G un graphe, on appelle **degré du sommet** v et on note $d(v)$, le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet.

NB : Une boucle sur un sommet compte double.

2 On appelle **taille** d'un graphe le nombre de ses arêtes.

Exemple 1.3.1. *Dans le multigraphe ci-contre, on a les degrés :* $d(A) = 2; d(B) = 2; d(C) = 4; d(D) = 1; d(E) = 3$.



Nous introduisons à présent une propriété très utile pour la théorie des graphes. Elle est un résultat prouvé, par le mathématicien suisse Paul L. Euler.

Propriété 1.3.1 (Lemme des poignées de mains)

Dans tout graphe G, la somme des degrés de tous les sommets est égale au double du nombre de ses arêtes.

On note : $\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2\,|E(G)|$

Où $|E(G)|$ représente la taille du graphe ou encore le nombre de ses arêtes.

Preuve. *[1]*

Nous procédons par récurrence sur la taille du graphe.

Posons l'énoncé à prouver :

$(\forall \in N)$, E_m *: Tout graphe G de taille m satisfait :* $\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2m$

— *Pour* $m = 0$, *G n'a aucune arête. Par conséquent, tout sommet de G a un degré nul* $(\forall v \in V(G), d_G(v) = 0)$ *et* E_0 *est donc vrai.*

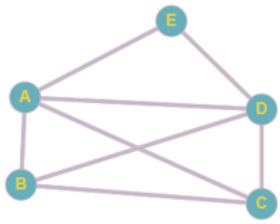
— *Soit k un entier non nul, supposons que* E_k *est vrai. Soit G un graphe de taille* $k + 1$, *et soit e une arête de G, d'extrémités x et y. Alors* $|E(G)| = |E(G - e)| + 1$. *D'où* $|E(G - e)| = k$, *or par hypothèse de récurrence* $\sum_{v \in V(G-e)} d_G - e(v) = 2k$. *Par ailleurs,* $d_G - e(v) = d_G(v) - 1$ *pour* $v \in \{x, y\}$ *et* $d_G - e(v) = d_G(v)$ *pour* $v \in V(G) - \{x, y\}$. *Par conséquent* $\sum_{v \in V(G-e)} d_G - e(v) = \sum_{v \in V(G)} d_G(v) - 2 = 2k$. *On en déduit que* $\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2(k + 1)$. *Ce qui veut dire que* $E_k + 1$ *est vrai.*

En conclusion E_m *est vrai pour tout* $n \in N$

Cette conséquence du lemme des poignées de mains, est utilisé dans la résolution de nombreux problèmes.

Conséquence 1.3.1. *Dans un graphe simple G, le nombre de sommets de degré impair est pair*

Exemple 1.3.2. *Soit le graphe suivant :*



Il y'a 08 *arêtes au total.* $d(E) = 2$, $d(A) = 4$, $d(D) = 4$, $d(B) = 3$, $d(C) = 3$

$d(E) + d(A) + d(D) + d(B) + d(C) \ = \ 2 + 4 + 4 + 3 + 3 \ = \ 16 \ = \ 2x8$

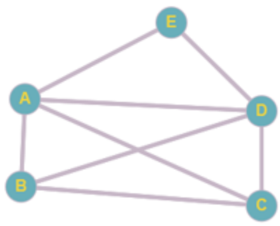
Le nombre de sommets de degré impair est 2.

Définissons à présent la notion de séquence de degré d'un graphe et de suite graphique.

Définition 1.3.2

La séquence de degré d'un graphe est la suite décroissante constituée des degrés de ses sommets.

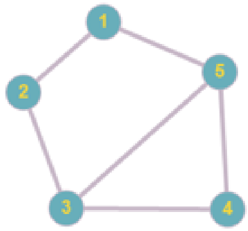
Exemple 1.3.3. *La séquence de degré du graphe ci-dessous est : 4-4-3-3-2*



Définition 1.3.3

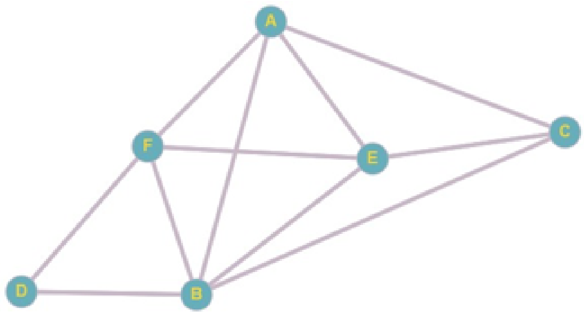
Une suite décroissante d'entiers naturels est dite graphique s'il existe un graphe ayant cette suite pour séquence de degré.

Exemple 1.3.4. *a) La suite 3-3-2-2-2 est la séquence de degré du graphe suivant :*



b) La suite 4-3-3-2-1 n'est pas une suite graphique car elle a trois valeurs impaires et un graphe contient toujours un nombre pair de sommets de degré impair.

Exercice d'application 1.3.1. ***Exercice 1*** *Soit le graphe ci-dessous :*



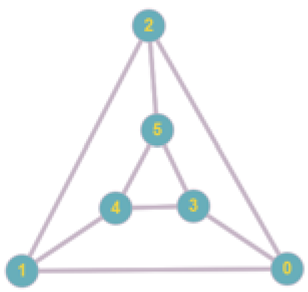
1. *Déterminez le degré de chaque sommet.*
2. *Donnez la séquence de degré de ce graphe.*
3. *Le lemme des poignées des mains est-il vérifié ?*

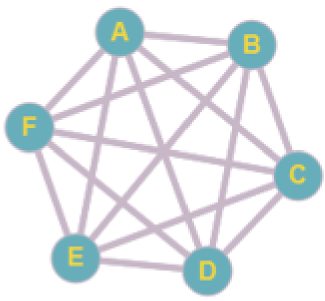
Exercice 2

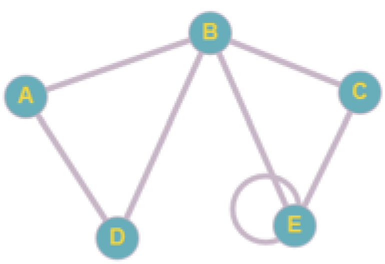
1. *Résolvez la situation problème.*
2. *Dans une réunion de 5 personnes, on suppose que tout le monde salue tout le monde, combien de poignées de mains ont été échangés ? Même question pour 35 personnes.*

Devoir 1.3.1. ***Exercice 1*** $*$

Déterminez les degrés de chaque sommet et la séquence de degré des graphes suivants :







Exercice 2 $*$

a) Déterminez en expliquant votre logique, lesquelles des suites suivantes sont graphiques.

(a) (6,5,4,3,2,1,0) (b) (2,2,2,2,2,2) (c) (5,3,3,3,3,3) (d) (1,1,1,1,1,1)

b) Trouvez deux graphes correspondant à la suite (3, 2, 2, 2, 1).

Exercice 3 $*$

Dans chacun des cas suivants dites s'il est possible de construire un graphe et construisez-le le cas échéant.

a) Les sommets ont pour degré respectif (4, 4, 5, 5, 5, 5, 6)

b) Les sommets ont pour degré respectif (3, 3, 5, 4, 2)

c) Les sommets ont pour degré respectif (2, 2, 1, 4, 3)

Exercice 4 $*$

Construisez un graphe d'ordre 8, ayant 13 arêtes, 2 sommets de degré 5, deux sommets de degré 3, 1 sommet de degré 4 et les trois autres sommets de même degré.
Construisez un graphe d'ordre 8, ayant 13 arêtes, 2 sommets de degré 4, deux sommets de degré 3 et les quatre autres sommets de même degré pair.

Exercice 5 $**$

Les sept maires des sept mairies de la ville de Yaoundé se sont rencontrés lors d'un conseil municipal. A cette occasion, chaque maire serre la main de tous les autres maires. Quel est le nombre de poignées de mains échangées.

Exercice 6 $**$

Dans un groupe de vingt enfants, est-il possible que sept d'entre eux aient chacun exactement trois amis, neuf d'entre eux en aient exactement quatre, et quatre d'entre eux exactement cinq ?

Exercice 7 $***$

Les sept collèges de la ville possèdent chacun une équipe de hand-ball. Les professeurs d'EPS souhaitent organiser des rencontres entre ces équipes dans le courant du mois de mai, de telle sorte que chaque équipe en rencontre trois autres. Peut-on proposer un planning de rencontres ?

Exercice 8 $***$

Une ligue de football comporte 5 équipes.

— *Il est décidé par le bureau de la ligue que lors d'un week-end d'entraînement, chaque équipe jouera quatre matches (deux équipes ne peuvent pas se rencontrer plus d'une fois). Comment l'organiser (chacun est libre de ses règles d'organisation) ?*

— *Le calendrier étant trop chargé, les organisateurs décident que chaque équipe ne jouera que trois matches. Comment l'organiser ?*

Exercice 9 $***$

Dans un tournoi de football le premier tour est organisé sous forme de poule *de 4 équipes où chaque équipe doit rencontrer toutes les autres.*

1. *Représentez la situation par un graphe. Combien de matchs joue chaque équipe ? Combien de matchs y a-t-il en tout ?*
2. *Que deviennent ces résultats avec des poules de 5 équipes ?*
3. *Dans une des poules les cinq équipes ont gagné respectivement 3, 2, 2, 1, 1 matchs. Combien y a-t-il eu de match(s) nul(s) ?*

Chapitre Deux

COURS DE THÉORIE DES GRAPHES EN TERMINALE SCIENTIFIQUE

2.1 Leçon 1 : Graphes Connexes et applications

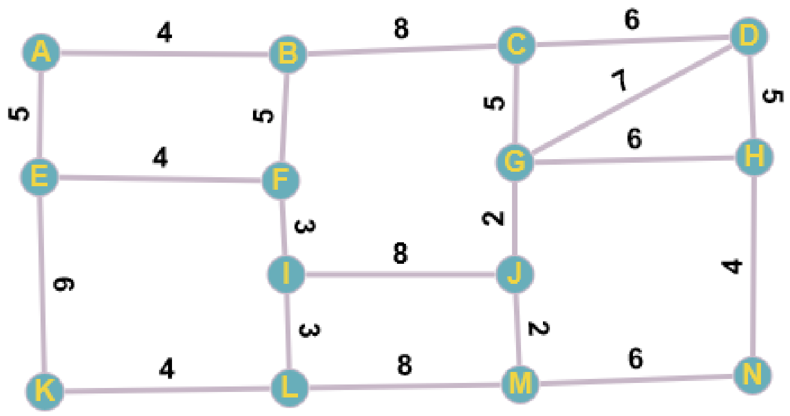
Objectif pédagogique opérationnel :

A la fin de cette leçon l'élève doit être capable de déterminer un arbre couvrant d'un graphe et déterminer un arbre couvrant de poids minimum d'un graphe pondéré.

Motivation : Dans l'établissement d'un réseau de communication ou d'interconnexion, on cherche souvent à réaliser un réseau de cout minimum.

Situation problème :

Les ordinateurs dans chaque bureau du ministère de l'enseignement secondaires du Cameroun doivent être connectés par câble. Le graphe ci-dessous donne le coût de chaque connexion en milliers de francs CFA. Quel est le coût minimal pour connecter les 14 postes de travail ?



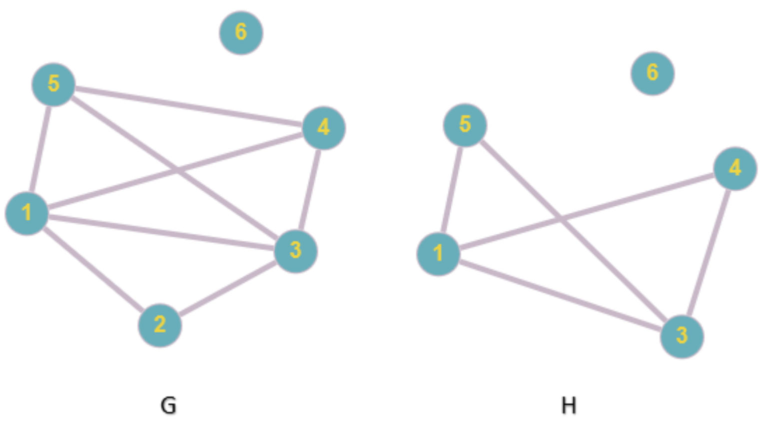
Pour résoudre ce problème nous utiliserons les notions de sous-graphes, de chemin, d'arbre couvrant et de connexité. Commençons donc par définir ces notions.

Résumé

Définition 2.1.1

Un graphe H est appelé **sous-graphe** d'un graphe G, si H est identique à G ou si H est obtenu de G par suppression de sommets et/ou arêtes.

Exemple **2.1.1.** *Le graphe H est un sous-graphe de G.*



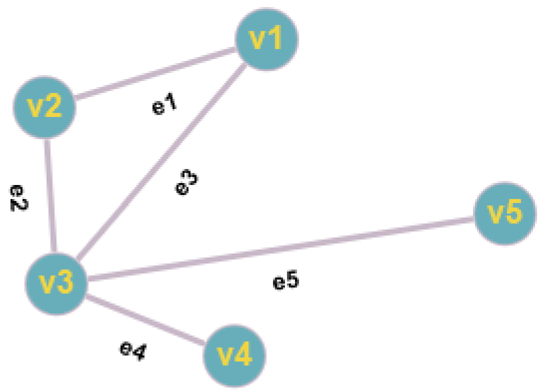
Définition 2.1.2

Une chaîne dans un graphe G , est une suite $\left(v_1, e_1, \cdots, v_q - 1, e_q, v_q\right)$ ayant pour éléments alternativement des sommets et des arêtes, commençant et se terminant par un sommet, et telle que chaque arête est encadrée par ses extrémités.

Une chaine est **simple** si les arêtes $\left(e_1, \cdots, e_q\right)$ sont deux à deux distinctes. Une chaine est **fermée** lorsque $v_1 = v_{q+1}$.

Exemple **2.1.2.** *Le graphe ci dessous contient entre autres les chaines* $(v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_5, v_5)$ *et* $(v_4, e_4, v_3, e_2, v_2, e_1, v_1)$.

La chaine $(v_3, e_2, v_2, e_1, v_1, e_3, v_3)$ *est fermée.*



Définition 2.1.3

— **Un chemin** est une chaine dans laquelle aucun sommet ni arête n'est répété.

— **Un cycle** est une chaine simple fermée.

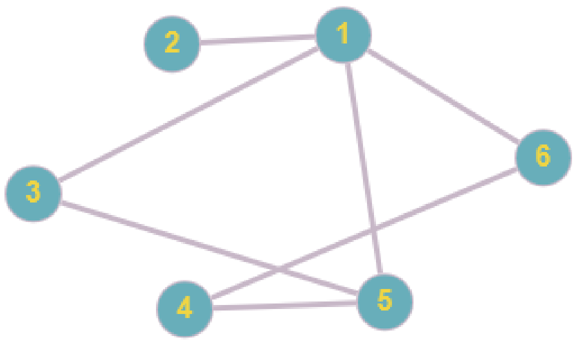
Exemple 2.1.3. *Les chaines* $(v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_5, v_5)$ *et* $(v_4, e_4, v_3, e_2, v_2, e_1, v_1)$ *de l'exemple précédent sont des chemins.*

La chaine $(v_3, e_2, v_2, e_1, v_1, e_3, v_3)$ *est un cycle.*

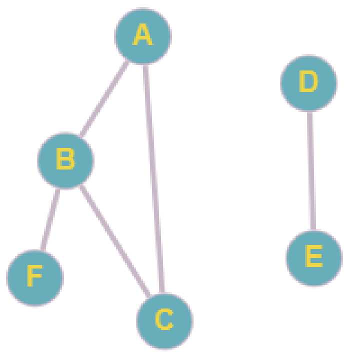
Définition 2.1.4

Un graphe est dit **connexe** si pour toute paire u et v de sommets, il existe un chemin dans le graphe contenant u et v.

Exemple 2.1.4. *Le graphe suivant est connexe.*



Le graphe suivant n'est pas connexe.



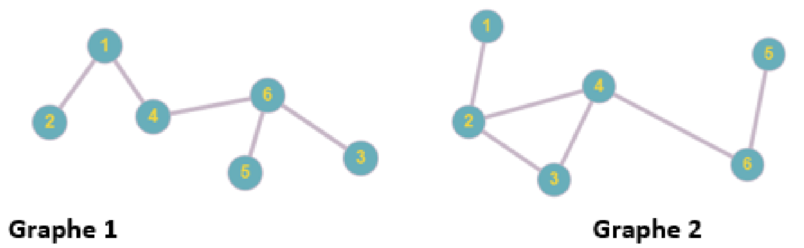
Définition 2.1.5

Un **arbre** est un graphe connexe ne contenant aucun cycle.

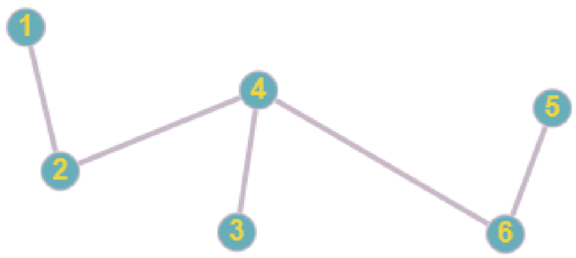
Un arbre couvrant d'un graphe connexe G est un arbre qui est un sous-graphe de G et qui contient chaque sommet de G.

L'arbre couvrant est dit pondéré si chaque arête est affecté d'un poids.

Exemple **2.1.5.** *Le graphe 1 est connexe, c'est un arbre car il ne contient pas de cycle. Le graphe 2 est connexe, ce n'est pas un arbre car il contient un cycle 2-3-4-2.*



Un arbre couvrant du graphe 2 est représenté par :



Le théorème suivant donne la relation qui existe entre la notion de connexité et celle d'arbre couvrant.

Théorème 2.1.1

Un graphe est connexe si et seulement si il contient un arbre couvrant.

Il existe de nombreux algorithmes permettant de construire un arbre couvrant d'un graphe et un arbre couvrant de poids minimum. Nous allons étudier quelques uns.

2.1.1 Algorithme de parcours en largeur (BFS : Breadth-First Search en anglais)

Il permet de construire un arbre couvrant d'un graphe ou d'établir qu'il n'en existe pas un. En fonction du résultat de cet algorithme, le théorème précédent permet de conclure sur la connexité du graphe.

1 Choisissez un sommet de départ, S, et étiquetez-le 0.

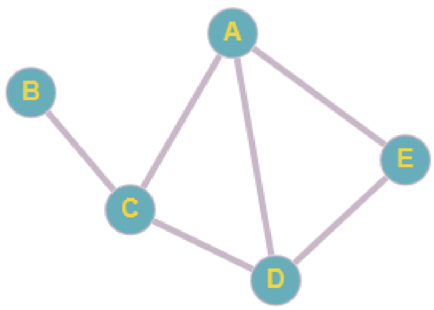
2 Trouvez tous les sommets adjacents à S et étiquetez-les 1.

3 Pour chaque sommet marqué d'un 1, trouvez une arête qui le relie au sommet étiqueté 0. Assombrir ces arêtes.

4 Recherchez les sommets non étiquetés adjacents à ceux avec l'étiquette 1 et étiquetez-les 2. Pour chaque sommet étiqueté 2, trouvez une arête qui le relie à un sommet étiqueté 1. Assombrissez cette arête. S'il existe plus d'une arête, choisissez-en une arbitrairement.

5 Continuez ce processus jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de sommets sans étiquette adjacents à ceux étiquetés. Si tous les sommets du graphe ne sont pas étiquetés, alors il n'existe pas d'arbre couvrant pour le graphe. Si tous les sommets sont étiquetés, alors les sommets et les arêtes assombries forment un arbre couvrant du graphe.

Application 2.1.1. *Déterminons un arbre couvrant du graphe suivant en utilisant l'algorithme de parcours en largeur.*



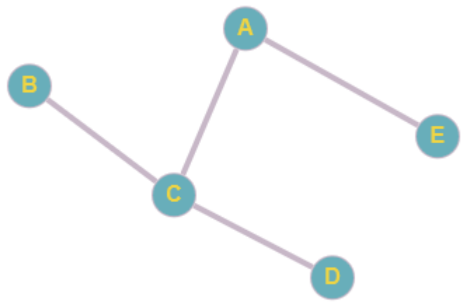
À l'étape 1 *: Nous choisissons le sommet B pour être notre sommet de départ, étiquetons-le* 0.

Pour l'étape 2 *: Nous pouvons voir que le seul sommet adjacent à B est C, nous pouvons donc les étiqueter* 1.

L'étape 3 *: Nous instruit d'assombrir l'arête BC.*

À l'étape 4 *: Nous étiquetons* 2 *les sommets A et D, car ils sont adjacents au sommet étiqueté* 1*, notamment C. Nous pouvons donc assombrir les arêtes CA et CD.*

À l'étape 5 *: Étiquetons* 3 *le sommet E,il est le seul qui reste et il est adjacent aux sommets A et D, nous avons donc le choix entre assombrir l'arête DE ou alors l'arête AE.Nous choisissons l'arête AE. Nous achevons ainsi la construction de l'arbre couvrant. Si vous* *appliquez les mêmes étapes avec un sommet différent, ou choisissez une arête différente lorsque vous avez le choix, vous construirez un arbre couvrant différent.*



2.1.2 Algorithme de Prim

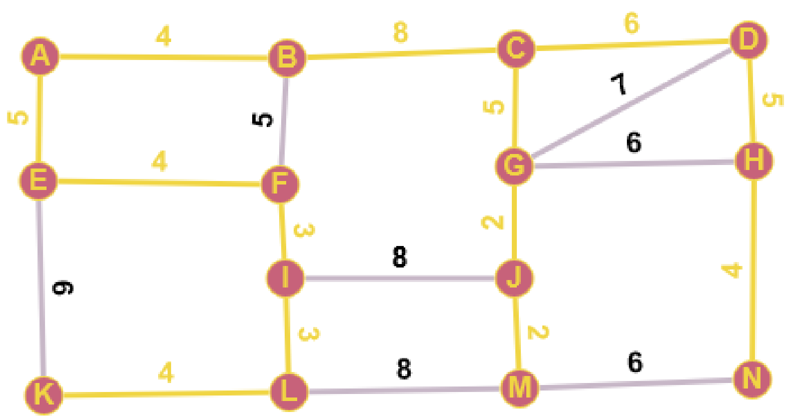
Il permet de déterminer un arbre couvrant de poids minimum.

1. Trouvez l'arête avec les plus petits poids dans le graphe. L'assombrir et encerclez ses deux sommets. Les liens sont rompus arbitrairement.
2. Trouvez l'arête avec le plus petit poids parmi les arêtes non assombris restants ayant un sommet encerclé et un sommet non encerclé. Assombrir cette arête et son sommet non encerclé.
3. Répétez l'étape 2 jusqu'à ce que tous les sommets soient encerclés.

Application **2.1.2.** *Résolvons la situation problème. Déterminons l'arbre couvrant de poids minimum. En effet, une solution optimale à ce problème est un graphe sans cycle, tous les coûts étant positifs, si une solution comportait un cycle, on obtiendrait une solution plus économique en supprimant une arête ou un cycle. De plus la suppression d'un cycle ne peut pas déconnecter un graphe connexe.*

A l'étape 1 *: Nous pouvons voir qu'il y a deux arêtes de poids minimal; l'arête JM et l'arête JG ont un poids de* 2*. Nous choisissons l'arête JG que nous assombrissons, puis nous encerclons les sommets J et G.*
A l'étape 2 *: Nous pouvons voir que l'arête JM de poids* 2*, est le plus petit poids parmi les arêtes non assombris restants dont un sommet est encerclé et l'autre pas. Par conséquent, nous pouvons assombrir l'arête JM et encercler le sommet M.*
L'étape 3 *: Indique que nous devons répéter l'étape* 2*, ainsi nous pouvons assombrir l'arête GC de poids* 5 *et encercler le sommet C. Notez que nous avons maintenant le choix, l'arête*

CD de poids 6*, l'arête GH de poids* 6 *et l'arête MN de poids* 6 *sont tous des choix possibles. Assombrissons l'arête CD et encerclons le sommet D. Nous pouvons voir que l'arête DH de poids* 5*, est le plus petit poids parmi les arêtes non assombris restants dont un sommet est encerclé et l'autre pas. Par conséquent, nous pouvons assombrir l'arête DH et encercler le sommet H. De même, nous assombrissons l'arête HN et encerclons le sommet N. Ensuite nous avons encore le choix, l'arête CB de poids* 8*, l'arête JI de poids* 8 *et l'arête ML de poids* 8 *sont tous des choix possibles. Assombrissons l'arête CB et encerclons le sommet B. Nous pouvons voir que l'arête AB de poids* 4*, est le plus petit poids parmi les arêtes non assombris restants dont un sommet est encerclé et l'autre pas. Par conséquent, nous pouvons assombrir l'arête AB et encercler le sommet A. Ensuite nous avons encore le choix, l'arête AE de poids* 5*, l'arête BF de poids* 5 *sont tous des choix possibles. Assombrissons l'arête AE et encerclons le sommet E. Nous pouvons voir que l'arête EF de poids* 4*, est le plus petit poids parmi les arêtes non assombris restants dont un sommet est encerclé et l'autre pas. Par conséquent, nous pouvons assombrir l'arête EF et encercler le sommet F. De même, nous assombrissons l'arête FI et encerclons le sommet I. Puis nous assombrissons l'arête IL et encerclons le sommet L. Enfin, nous assombrissons l'arête LK et encerclons le sommet K.*



Tous les sommets ont été encerclés et sont connectés, nous avons donc un arbre couvrant minimum avec un poids minimal de $2+2+5+6+5+4+8+4+5+4+3+3+4 = 55$*. Ainsi le coût minimal pour connecter les 14 postes est de* $55000FCFA$*.*

2.1.3 Algorithme de Kruskal

Cette algorithme permet également de déterminant un arbre couvrant de poids minimum dans un graphe connexe non orienté et pondéré. Contrairement à l'algorithme de Prim, l'algorithme de Kruskal nécessite auparavant le tri des arêtes. Cette condition permet de simplifier grandement le fonctionnement de l'algorithme.

1 Triez les Arêtes en ordre croissant.

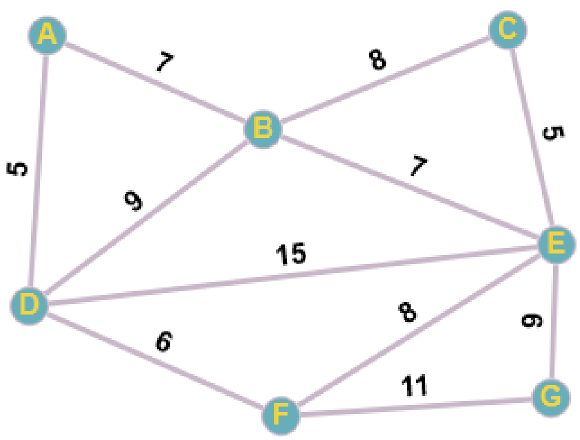
2 Répétez : Ajoutez l'arête de poids minimum parmi les arêtes disponibles

— Si l'arête ajoutée forme un cycle, recommencez avec la prochaine arête.

— S'il ne reste plus d'arêtes, l'arbre couvrant de poids minimum est déterminé avec succès.

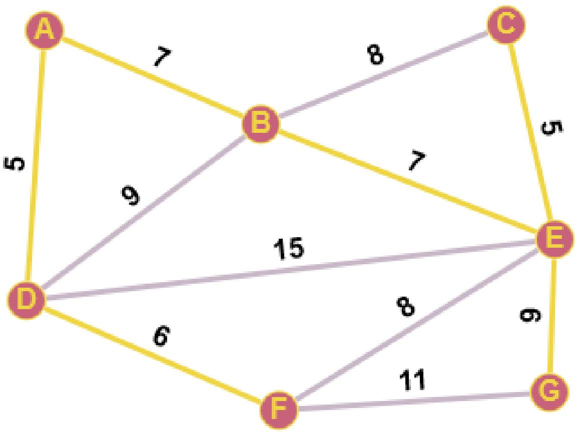
— Si tous les sommets sont atteints par des arêtes et que tous les sommets sont dans un seul ensemble disjoint, l'algorithme s'arrête, car l'arbre couvrant de poids minimum est déterminé.

Application 2.1.3. *Déterminons un arbre couvrant de poids minimum pour le graphe suivant :*

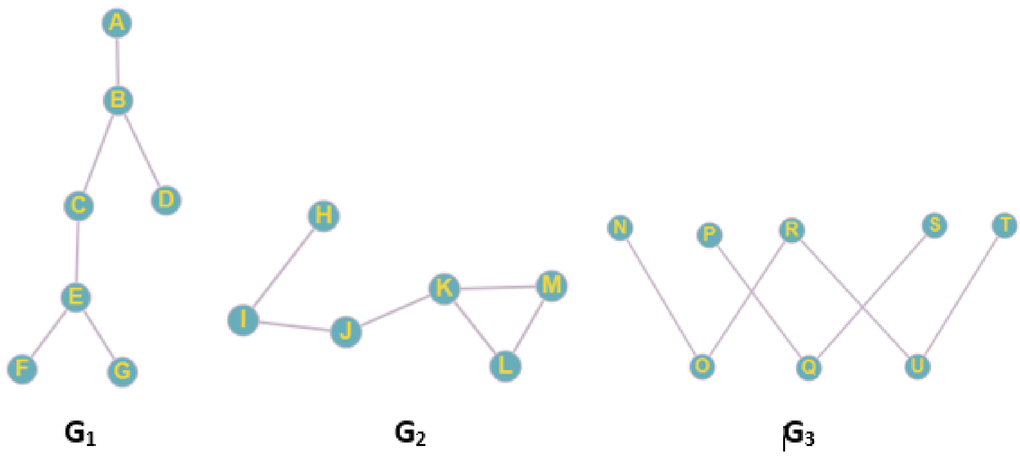


A l'étape 1 *: Nous constatons que AD et CE sont les arêtes de poids les plus faibles, ici* 5. *AD est sélectionnée de manière arbitraire.*

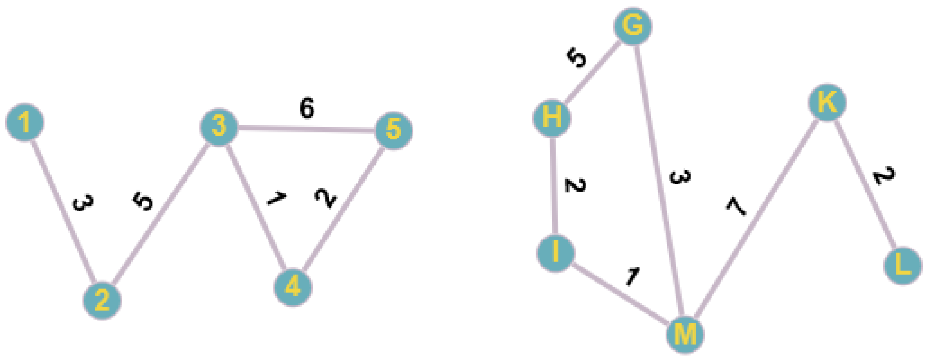
A l'étape 2 *: CE est l'arête suivante de poids le plus faible. Elle est sélectionnée car elle ne forme pas de cycle. L'arête DF de poids* 6 *est ensuite choisie. Les arêtes de poids faibles* (7) *suivantes sont AB et BE. AB est choisie de manière arbitraire. L'arête BD ne sera jamais sélectionnée car il existe un chemin entre B et D, et ce qui peut former le cycle BDA. La prochaine arête considérée est BE de poids* 7. *BC ne sera jamais choisie car la choisir formerait le cycle BCE. De même DE formerait le cycle DEBA et FE formerait le cycle FEBAD. Finalement, l'arête EG de poids* 9 *est choisie et un arbre couvrant de poids* *minimum est trouvé.*



Exercice d'application 2.1.1. — *Identifiez en le justifiant lesquels des graphes suivants sont des arbres ?*

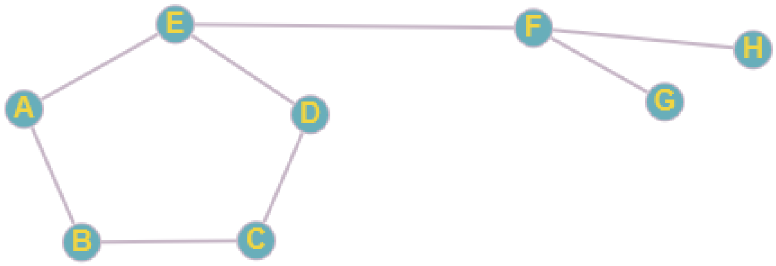


— *Pour chacun des graphes suivants, détermine un arbre couvrant et calcule son poids.*

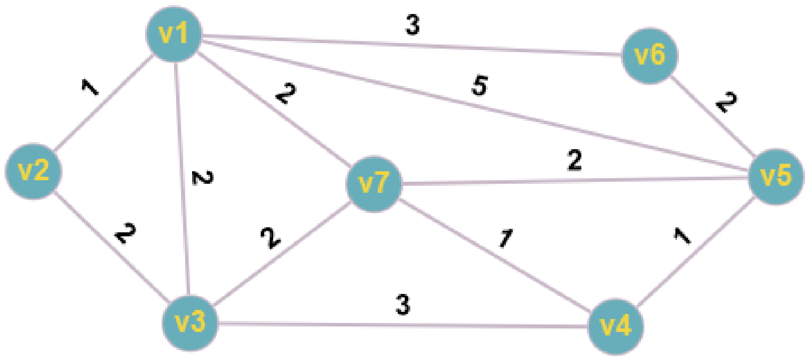


Devoir **2.1.1.** ***Exercice 1*** $*$

Détermine tous les arbres couvrants du graphe suivant en utilisant l'algorithme BFS :

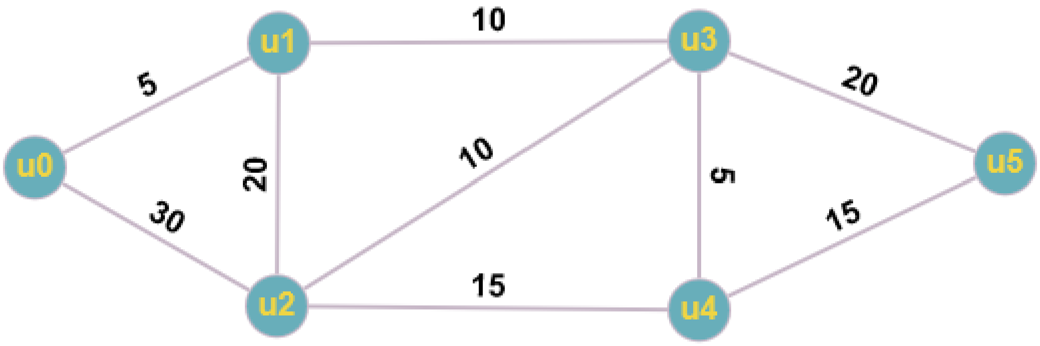


Exercice 2 $**$ *Détermine un arbre couvrant de poids minimal du graphe suivant en utilisant l'algorithme de Prim et l'algorithme de Kruskal.*



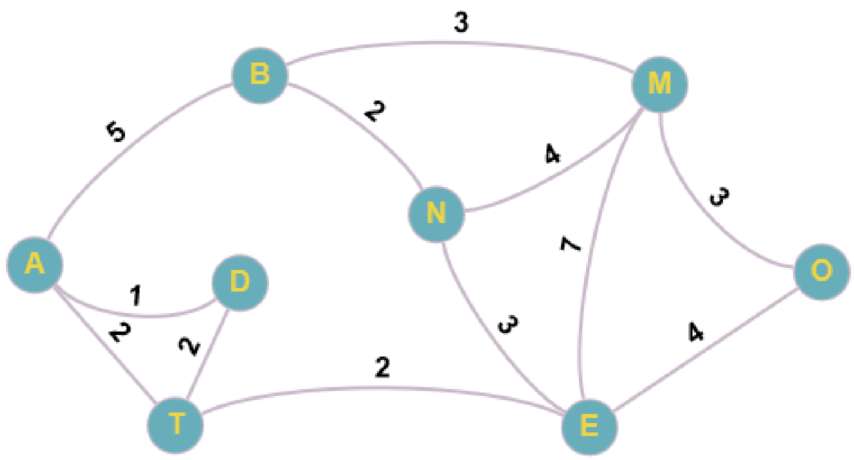
Exercice 3 $***$

Dans un village, 6 nouveaux poteaux électriques doivent être installés. Les différentes possibilités de connexions entre les poteaux sont donnés par le graphe ci dessous.Avec les coûts d'installations en centaines de milliers de Francs CFA. Quel est le coût minimal de ces installations ?



Exercice 4 $***$

La communauté urbaine de Yaoundé veut desservir un ensemble de quartiers(Melen, Obili, Bonas, Acacia, Tamtam, Etoug-Ebe, Damas) en eau potable à partir d'un château d'eau placé dans le quartier Ngoa-Ekelle(N). Selon des paramètres législatifs, géologiques, etc., le coût d'installation (en dizaine de milliers de francs CFA) des canalisations pour transporter l'eau est estimé pour certaines paire de quartiers. Certains quartiers ne peuvent pas être reliés directement à cause du relief. On suppose que les capacités des canalisations sont illimitées. Il faut déterminer un réseau qui puisse acheminer de l'eau dans chaque quartier, et ce au moindre coût. Quel est ce coût ?



2.2 Leçon 2 : Graphes et sous graphes pondérés, plus court chemin

Objectif pédagogique opérationnel : A la fin de ce chapitre l'élève doit être capable de déterminer le plus court chemin entre deux sommets d'un graphe pondéré.

Motivation : Cette leçon peut être utilisé pour l'optimisation d'itinéraires dans les réseaux routiers.

Situation problème :

Une femme enceinte aimerait connaitre le plus court chemin pour se rendre à l'hôpital central de Yaoundé pour son accouchement. Elle habite le quartier Etoug-Ebe. Pour cela, elle consulte la carte de la ville de Yaoundé suivante :

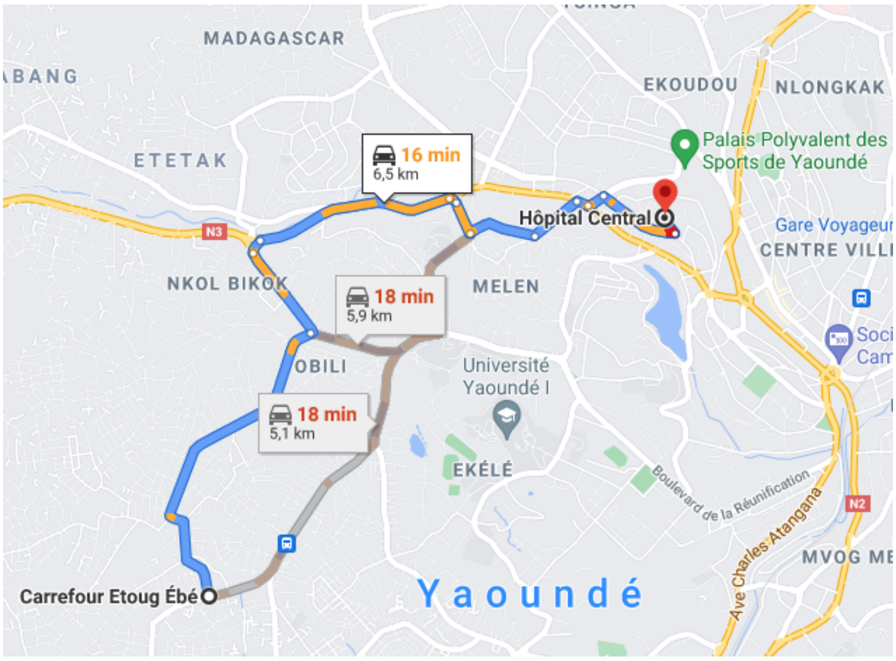
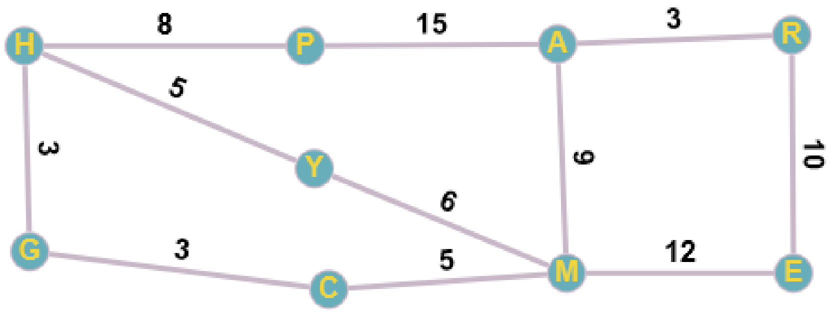


FIGURE 2.1 – Extrait de la carte de Yaoundé pris sur Google Map

Pour être plus efficace, elle représente ses différentes trajectoires possibles avec le temps moyen mis par un taximan pour aller d'un point à un autre par le graphe suivant :



H : Hôpital central A : Carrefour Acacia G : Gendarmerie nationale E : carrefour Etoug-Ebe M : Total Melen C : Carrefour EMIA P : poste centrale R : Rond-point Express Y : Camp YEYAP.

Quel est le plus court chemin que cette femme devra emprunter ?

Pour pouvoir résoudre le problème de plus court chemin entre deux sommets d'un graphe, commençons par définir ces notions qui nous seront utiles pour la suite.

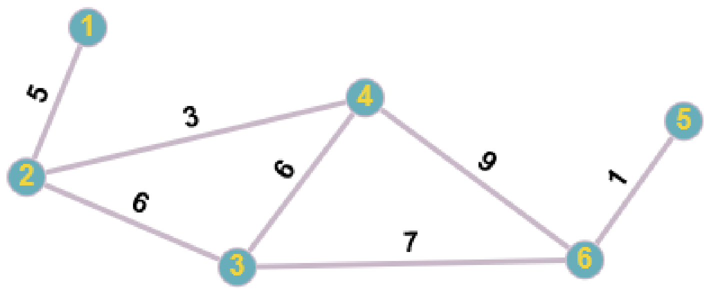
Résumé

Définition 2.2.1

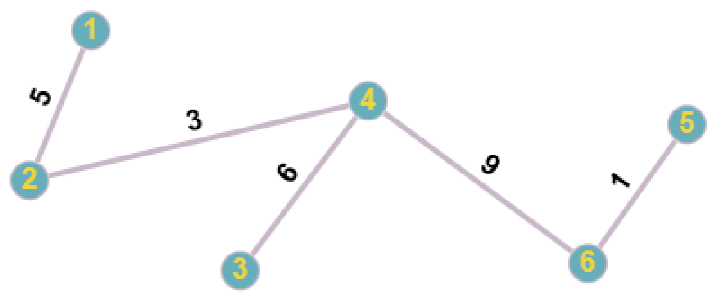
Un graphe **valué** est un graphe pour lequel chaque arête est associée à un nombre réel appelé poids. Si ce nombre est positif, on parle alors de **graphe pondéré**.

Le **poids d'un sous graphe** (resp. d'un chemin) dans un graphe valué est la somme des poids des arêtes composant ce sous graphe (resp. ce chemin).

Exemple 2.2.1. *Le graphe suivant est un graphe valué.*



Le sous-graphe ci-dessous de ce graphe a pour poids :$5 + 3 + 6 + 9 + 1 = 24$



Pour résoudre le problème du plus court chemin entre deux sommets d'un graphe , il existe de nombreux algorithmes . Nous présentons ici celui du mathématicien Dijkstra.

2.2.1 Algorithme de Dijkstra

Il permet de déterminer un chemin de poids minimum entre deux sommets d'un graphe.

1. Sélectionner le sommet de départ u et fixer son poids à 0.
2. Attribuer provisoirement un poids ∞ aux autres sommets.
3. Tant qu'il reste des sommets dont les poids ne sont pas définitivement fixés, répéter les instructions suivantes :
   — Parmi les sommets dont le poids n'est pas définitivement fixé, choisir un sommet X dont le poids p est minimal, puis fixer définitivement p comme poids.
   — Pour tous les sommets Y dont le poids n'est pas définitivement fixé et qui sont adjacents au dernier sommet fixé X, calculer la somme s du poids de X et du poids de l'arête reliant X à Y.
      — Si la somme s est inférieure au poids provisoirement affecté au sommet Y, affecter provisoirement à Y le nouveau poids s et indiquer en indice le sommet X pour se souvenir de sa provenance.
      — Si la somme s est supérieure au poids provisoirement affecté au sommet Y, on ne change rien.
4. Quand le sommet d'arrivé v est définitivement fixé : Le chemin de poids minimum se lit à l'envers, de v à chacun de ses prédécesseurs successifs.

Application 2.2.1. *Résolvons la situation problème en utilisant l'algorithme de Dijkstra. Il s'agit de déterminer le plus court chemin allant du sommet E au sommet H.*

A l'étape 1 *: On affecte le sommet E de* 0.

A l'étape 2 *: On peut aller à R (poids de* 10*) ou M (poids de* 12*). Les autres sommets restent inchangés. La valeur minimale est* 10 *lorsque l'on vient de E. On sélectionne R.*

A l'étape 3 *: Depuis R , on peut aller uniquement en A (poids de* $10 + 3 = 13$*). La valeur minimale est* 13 *lorsque l'on vient de R. On sélectionne A.*

A l'étape 4 *: Depuis A, on peut aller en P (poids de* $13 + 15 = 28$*). La valeur minimale est* 17 *lorsque l'on vient de M. On sélectionne C.*

A l'étape 5 *: Depuis C, on peut aller à G (poids de* $17 + 3 = 20$*). La valeur minimale est* 20 *lorsque l'on vient de C. On sélectionne G. A l'étape* 6 *: Depuis G, on peut aller à H,(poids de* $20 + 3 = 23$*). La valeur minimale est de* 23 *venant de G ou de Y. On peut sélectionner l'un ou l'autre. On aura deux plus courts chemins.*

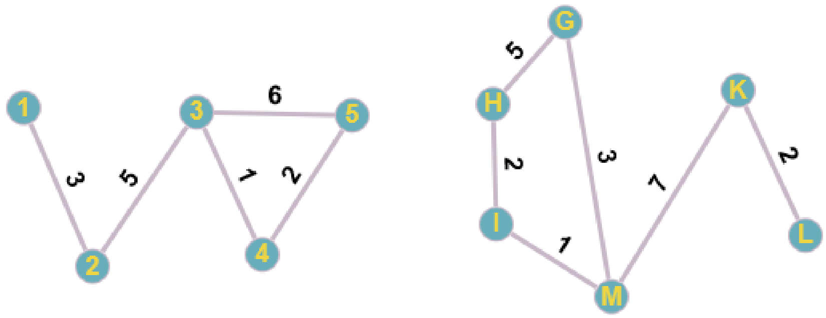
On peut résumer tous ces étapes dans le tableau suivant : Où l'écriture $10 - E$ *signifie qu'on vient du point E avec un poids de* 10.

E	R	M	A	P	Y	C	G	H	Etape
0	10-E	12-E	∞	∞	∞	∞	∞	∞	1
	10-E		13-R	∞	∞	∞	∞	∞	2
		12-E	21-M	∞	18-M	17-M	20-C	∞	3
			13-R	28-A				∞	4
						17-M		∞	5
					18-M			23-Y	6
							20-C	23-G	7

Tous les sommets ayant été fixés, on lit « à l'envers » la solution : H, qui vient de G, qui vient de C, qui vient de M, qui vient de E ou encore H, qui vient de Y, qui vient de M, qui vient de E.

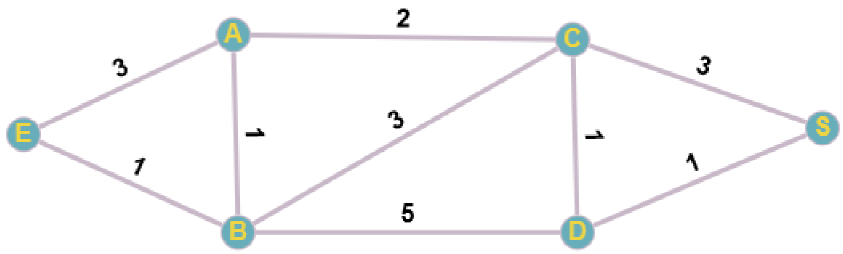
D'où le trajet le plus rapide est celui de ***Carrefour Etoug-Ebe- Total Melen - Carrefour EMIA - Gendarmerie Nationale- Hôpital Central*** *ou encore celui de* ***Carrefour Etoug-Ebe- Total Melen - Camp YEYAP - Hôpital Central****. Avec pour temps minimal* 23 *minutes.*

Exercice d'application **2.2.1.** *Pour chacun des graphes suivants, déterminez un sous graphe et calculez son poids.*



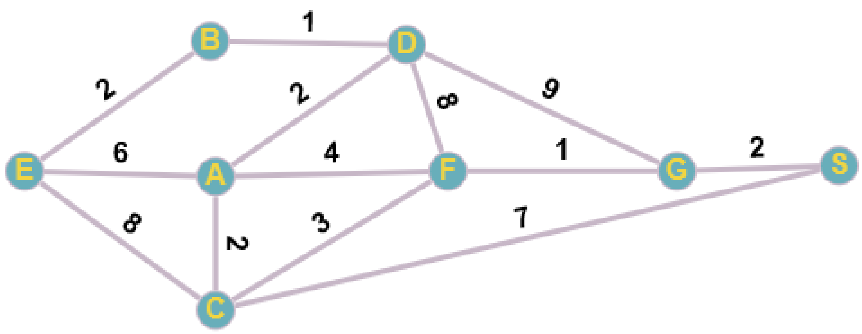
Devoir **2.2.1.** ***Exercice 1*** $**$

Déterminez le plus court chemin allant du point E au point S dans le graphe suivant et calculez son poids.



Exercice 2 $**$

Un voyageur de commerce prépare sa tournée. Il doit visiter un certain nombre de clients A, B, C, D, F et G en partant de E pour arriver en S. Les liaisons possibles sont représentes ci-dessous avec la durée des trajets qui sont les poids des arêtes du graphe. Ce voyageur de commerce souhaiterait savoir si un ordre de visite qui minimise la durée totale du trajet de E à S lui permettrait de rencontrer tous ses clients. Est-ce possible ?



Exercice 3 ∗∗∗

Sur les arêtes du graphe suivant, représentant un réseau autoroutier, on a marqué les distances entre deux étapes et, entre parenthèses, les prix des péages. Entre D et A, déterminez :

— *la chaîne la plus courte ;*
— *la chaîne qui minimise la somme dépensée en péage.*

Exercice 4 ∗∗∗

Sur le tableau suivant sont indiqués les temps moyens (en minutes) mis par un automobiliste pour relier deux lieux de la ville de Yaoundé. On souhaite aller d'un point R (Rond-point Express) au point M (Marché central). Déterminez un chemin qui soit le plus rapide à l'aide de l'algorithme de Dijkstra.

	R (Rond-point Express)	A (Assemblé nationale)	C (Carrefour ENAM)	U (Université Yaoundé I)	H (Hilton Hotel)	M (Marché central)
R		9		12		
A			5	7		
C				9	8	14
U					11	
H						7
M						

2.3 Leçon 3 : Graphes eulériens et graphes hamiltoniens

Objectif pédagogique opérationnel :

A la fin de cette leçon l'élève doit être capable de déterminer s'il est possible de dessiner un graphe sans lever le crayon et sans passer deux fois sur la même arête.

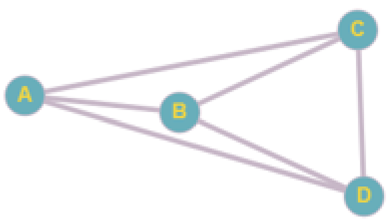
Motivation : Cette leçon permet de résoudre le problème qui consiste à visiter une ville en passant dans un lieu une et une seule fois.

Situation problème :

Un livreur de journaux dans la ville de Yaoundé veut assurer sa livraison du jour dans 04 sous-préfectures de la ville, pour des raisons d'économies de carburant, il ne veut pas passer par la même route deux fois.

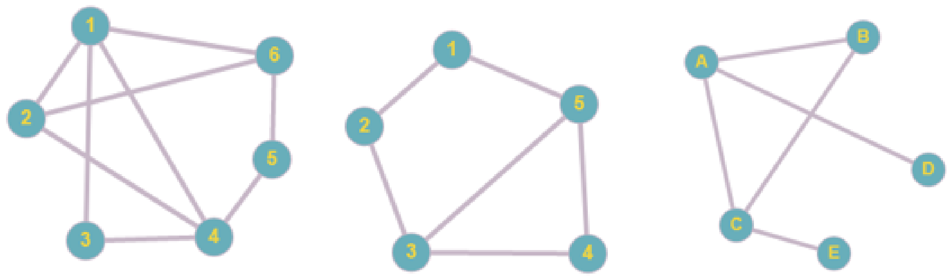
FIGURE 2.2 – Plan des sous-préfectures de la ville de Yaoundé

Il représente La position des différentes sous-préfectures par le graphe ci-dessous. Ce livreur pourra t'il réaliser son souhait ?



Activité d'apprentissage

1 Soit les graphes suivants, calculer le degré de chaque sommets ?



2 Pour chaque graphe, combien y'a-t-il de sommets de degré pair ? Impair ? Que constates-tu ?

Résumé

Nous allons définir les notions de graphes eulériens et de graphes hamiltoniens, qui ont des applications particulièrement utiles dans la résolution d'un grand nombre de problèmes concrets. Par exemple, ces notions sont utiles pour résoudre une énigme ayant la naissance de la théorie des graphes :"les sept ponts de la ville de Königsberg".

Définition 2.3.1

On appelle **cycle eulérien** d'un graphe G un cycle contenant une et une seule fois toutes les arêtes de G.

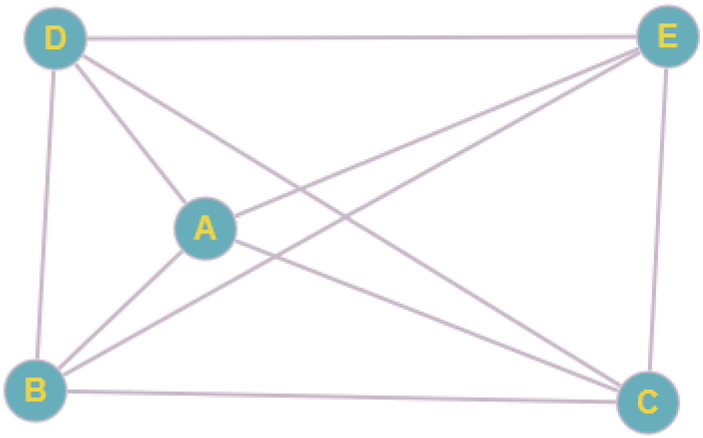
Un graphe est dit **eulérien** s'il possède un cycle eulérien.

On appelle **chaîne eulérienne** d'un graphe G une chaîne passant une et une seule fois par chacune des arêtes de G.

Un graphe ne possédant que des chaînes eulériennes est **semi-eulérien**.

Remarque : On peut dire qu'un graphe est eulérien (ou semi-eulérien) s'il est possible de dessiner le graphe sans lever le crayon et sans passer deux fois sur la même arête.

Exemple 2.3.1. *Le graphe suivant possède plusieurs cycles eulériens :par exemple* $A-C-E-D-B-C-D-A-B-E-A$*. C'est donc un graphe eulérien.*



Ce théorème donne une caractérisation simple des graphes eulériens.

Théorème 2.3.1 (EULER)

Un graphe connexe possède un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.

Preuve. *[5]*

Soit G un graphe. Supposons G eulérien, soit alors c un cycle eulérien et x un sommet de G. Le cycle c contient toutes les arêtes de G, donc toutes les $d(x)$ arêtes ayant x comme extrémité. Lors d'un parcourt de c on arrive en x autant de fois qu'on en repart, chaque arête de G étant présente une et seule fois dans c, $d(x)$ est nécessairement un nombre pair. Réciproquement, supposons que tous les sommets de G soient de degré pair. Formons une chaîne simple c_1, aussi longue que possible, à partir d'un sommet arbitraire x_0. Cette chaîne c_1 est en fait un cycle, sinon, son extrémité finale serait de degré impair. Si ce cycle c_1 contient toutes les arêtes du graphe G, c_1 est le cycle eulérien cherché. Dans le cas contraire, on considère le sous-graphe H obtenu à partir de G en éliminant les arêtes de c_1 et ses sommets qui ne sont incidents à aucune des arêtes restantes. Comme G est connexe, H possède au moins un sommet commun avec le cycle c_1. Soit x_1 un tel sommet. Les sommets de H sont encore de degré pair. Construisons alors, de la même manière que précédemment, un cycle c_2 dans H à partir de x_1. Rallongeons le cycle c_1 en insérant à partir du sommet x_1 le cycle c_2 pour former un cycle c_1' de x_0 à x_0. Si ce cycle c_1' possède toutes les arêtes de G, c_1' est *le cycle eulérien cherché. Sinon, on continue ce processus, qui se terminera car les sommets du graphe G sont en nombre fini.*

Définition 2.3.2

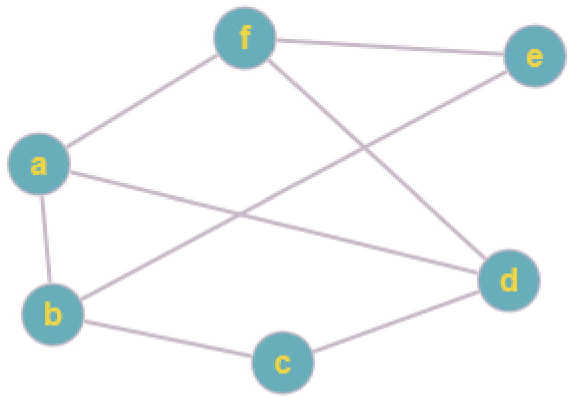
Un **chemin hamiltonien** est un chemin qui visite chaque sommet d'un graphe exactement une fois.

Un cycle hamiltonien est un chemin hamiltonien qui commence et se termine au même sommet.

Un graphe est dit **hamiltonien** s'il possède un cycle hamiltonien.

Un graphe ne possédant que des chaînes hamiltoniennes est **semi-hamiltonien**.

Exemple 2.3.2. *Le graphe suivant possède plusieurs cycles hamiltoniens, par exemple :* $a-b-e-c-d-f-a$ *et* $d-f-e-c-b-a-d$*. C'est donc un graphe hamiltonien.*



Remarque : Une condition nécessaire et suffisante pour visiter tous les sommets d'un graphe **sans lever le crayon** est que le graphe soit hamiltonien.

Il n'existe pas une façon simple permettant de déterminer si un graphe a un cycle hamiltonien. Cependant, des mathématiciens ont pu trouver des conditions nécessaires et des conditions suffisantes qui garantissent pour certains types de graphes, l'existence de cycle hamiltonien.

Propriété 2.3.1 (Conditions Nécessaires)

— Un graphe possédant un sommet de degré 1 ne peut pas être hamiltonien.

— Si un sommet dans un graphe est de degré 2, alors les deux arêtes incidentes à ce sommet doivent faire partie du cycle hamiltonien.

— Les graphes complets sont hamiltoniens.

Théorème 2.3.2 (ORE : Condition Suffisante)

Soit G un graphe simple d'ordre $n \geq 3$. Si pour toute paire $\{x, y\}$ de sommets non adjacents, on a $d(x) + d(y) \geq n$ alors G est hamiltonien.

Preuve. *Soit G un graphe simple d'ordre $n \geq 3$.*

Par l'absurde, supposons que pour toute paire $\{x, y\}$ de sommets non adjacents de G , on a $d(x) + d(y) \geq n$, mais que G ne soit pas Hamiltonien. Quitte à rajouter des arêtes, on peut supposer que G soit non hamiltonien maximal, autrement dit il suffit de rajouter une arête à G pour qu'il devienne hamiltonien.

Supposons que l'arête manquante soit $(A_n - A_1)$. Alors il existe déjà dans G une chaîne $A_1 - A_2 ... A_n$. Le but est de montré qu'il existe un certain $i \in \{2, ..., n-1\}$ tels que les arêtes $(A_1 - A_{i+1})$ et $(A_i - A_n)$ existent. On aura un cycle hamiltonien $A_1 - A_2 - ... - A_i - A_n - A_{n-1} ... A_{i+1} - A_1$. Ce qui fournira la contradiction.

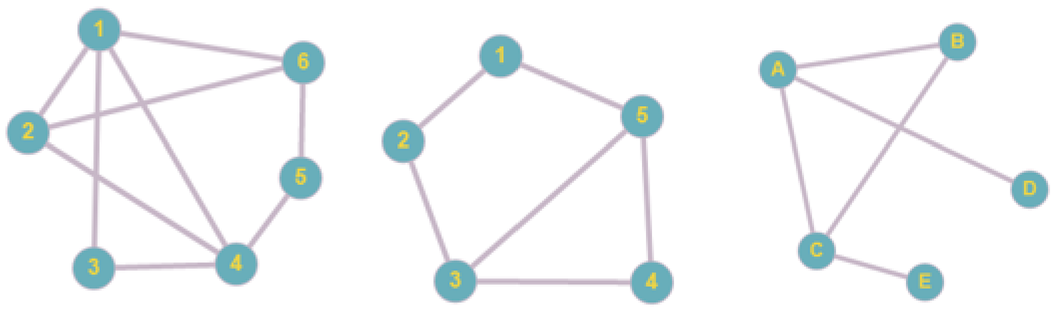
Supposons qu'il n'existe aucun i tel que $A_i + 1$ soit adjacent à A_1 et A_i à A_n. Notons k le degré de A_n. Les sommets adjacents forment une suite $A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_k}$ avec $2 \leq i_1 < ... < i_k < n-1$. D'après la condition précédente, les sommets $A_{i_1+1}, ..., A_{i_k+1}$ ne sont pas adjacents à A_1. Donc le degré de A_1 est inférieur à $(n-1) - k$. Donc $d(A_1) + d(A_n) \leq n - 1 - k + k \leq n - 1$ ce qui est faux.

Corollaire 2.1 (Dirac)**.** *Soit G un graphe simple d'ordre $n \geq 3$. Si pour tout sommet x de G, on a $d(x) \geq \frac{n}{2}$ alors G est hamiltonien.*

Preuve. *La preuve du corollaire est évidente d'après le théorème. En effet, un tel graphe vérifie les conditions du théorème précédent. Si x et y sont deux sommets non adjacents, on a bien : $d(x) + d(y) \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$. D'où ce graphe est hamiltonien.*

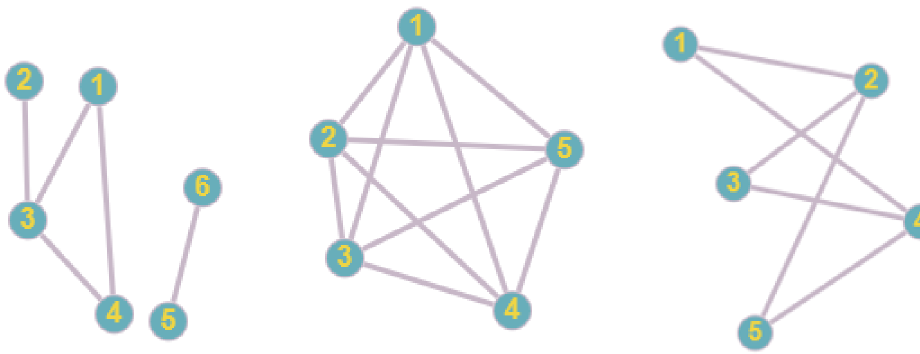
Exercice d'application 2.3.1. **1** *Résoudre la situation problème.*

2 *Parmi les graphes suivants, lesquels contiennent un chemin eulérien ou chemin hamiltonien ? Lesquels sont des graphes eulériens ou graphes hamiltoniens ?*



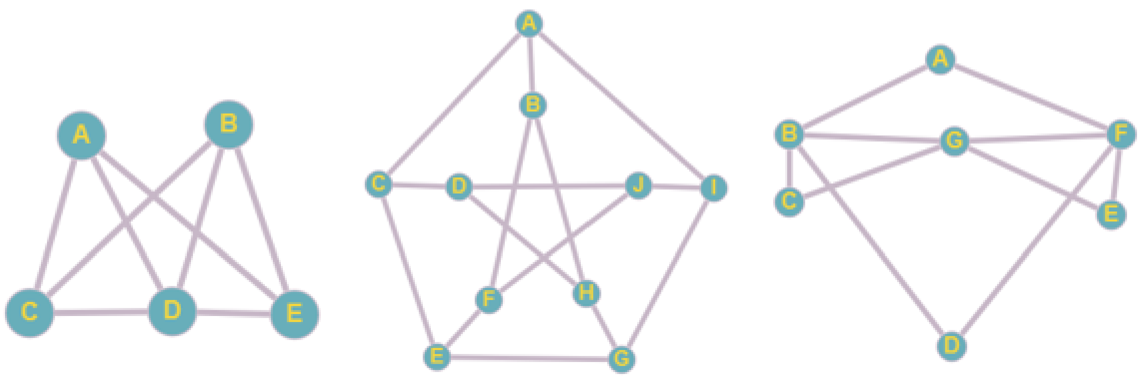
Devoir 2.3.1. ***Exercice 1*** $*$

Les graphes suivants sont-ils eulériens(ou semi-eulériens) ?



Exercice 2 $**$

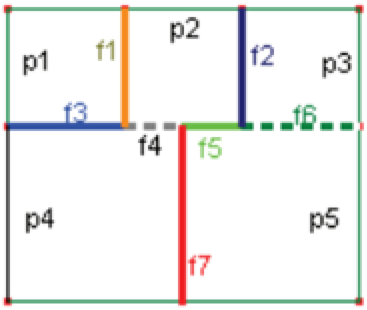
Déterminez si les graphes suivants contiennent un cycle hamiltonien. Si le graphe ne contient pas de cycle hamiltonien, contient-il un chemin hamiltonien ?

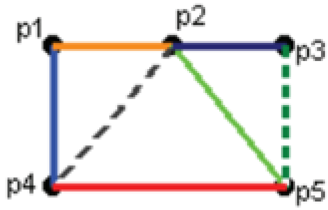


(a) (b) (c)

Exercice 3$***$

Cinq pays sont représentés ci-dessous avec leurs frontières. Est-il possible de partir d'un pays et d'y revenir en franchissant chaque frontière une fois et une seule ?





CONCLUSION

L'objectif de ce travail était de proposer un bon cours sur l'introduction de la théorie des graphes pour le secondaires au Cameroun. Nous basant sur le programme officiel en vigueur au Cameroun, nous avons proposer deux chapitres, un pour les premières scientifiques et un autre pour les terminales scientifiques. Nous avons également proposés une série d'exercices avec leurs corrigés. Nous constatons que la notion de théorie des graphes a beaucoup d'applications dans la vie courante. Cette spécificité, pourrait susciter l'intérêt des élèves pour les mathématiques. Elle offre également un choix conséquent de situation de vie au enseignant devant s'arrimer à la nouvelle méthode d'enseignement au Cameroun, l'approche par les compétences.

Bibliographie

[1] Andjiga N. G., Loumngam K. V (2020). **Introduction à la théorie des graphes et à ses applications**. .Université de Yaoundé 1. Inédit. 59 p.

[2] Brauner N. **Exercices de graphes**. Université Grenoble Alpes. 6 p.

[3] Didier Muller(2012). **Introduction à la théorie des graphes**. Cahier de la CRM. 52 p.

[4] Edmond La Chance, B.Sc(2014). **Algorithmes pour le problème de l'arbre couvrant minimal**. Université du Québec à Chicoutimi. p. 21-22.

[5] Eric Sigward (2002). **Introduction à la théorie des graphes**. Université Paris Saclay. 47 p.

[6] Éric Sopena (2002). **Éléments de théorie des graphes quelques exercices d'application (Avec solutions).** 32 p.

[7] Pierre Arnoux et Al. (2002). **Graphes pour la Terminale ES**. IREM de Luminy. p. 1-19.

Annexe

A.4 Indication des exercices

A.4.1 chapitre 1

Leçon 1

Exercice 4

le sommet qui est relié a un plus grand nombre d'arêtes représente la personne qui a le plus d'amis.

Leçon 2

Exercice 3

Un joueur est représenté par un point et une passe par un arc.
Le graphe est orienté.

Exercice 4

La relation "a battu" est représenté par un arc.

Leçon 3

Exercice 2

Une suite décroissante d'entiers naturels est dite graphique s'il existe un graphe ayant cette suite pour séquence de degré. Il suffit donc de vérifier s'il est possible de construire un graphe avec cette suite. Pour cela on utilise la conséquence du lemme des poignées de mains.

Exercice 5

On considère que chaque maire représente un sommet d'un graphe. Il suffit de calculer le nombre de sommets de degré impair et de conclure suivant la parité de ce nombre en utilisant la conséquence du lemme des poignées.

Exercice 6

C'est impossible. IL suffit d'utiliser la conséquence du lemme des poignées de main. Chaque enfant est représenté par un sommet et le nombre d'amis représente les degrés de chaque sommet.

Il suffit de compter le nombre de sommets de degré impair,et conclure suivant la parité de ce nombre en utilisant la conséquence du lemme des poignées de main.

A.4.2 Chapitre 2

Leçon 1

Exercice 1

On utilise l'algorithme de Dijkstra. Le plus court chemin est : $E-B-C-D-S$.

Exercice 2

On utilise l'algorithme de Dijkstra. Le plus court chemin est $E-B-D-A-F-G-S$.

Leçon 3

Exercice 1

Le graphe 1 n'est pas eulérien.

Le graphe 2 est eulérien car il est connexe et tous ses sommets sont de degré pair. De même pour le graphe 3.

Exercice 2

On utilise le théorème d'Ore et son corrolaire. On a : le graphe (a) est hamiltonien, les graphes (b) et (c) ne le sont pas.

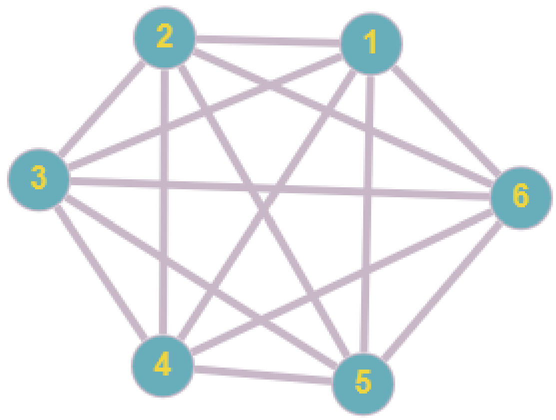
A.5 Correction des exercices

A.5.1 chapitre 1

Leçon 1

Exercice 5

1 Le graphe obtenu est le suivant :



2 En comptant le nombre d'arêtes du graphe on obtient 15 matchs. On aura donc besoin de 05 jours terminer le tournoi. Chaque jour 03 matchs se jouent avec les 06 équipes.

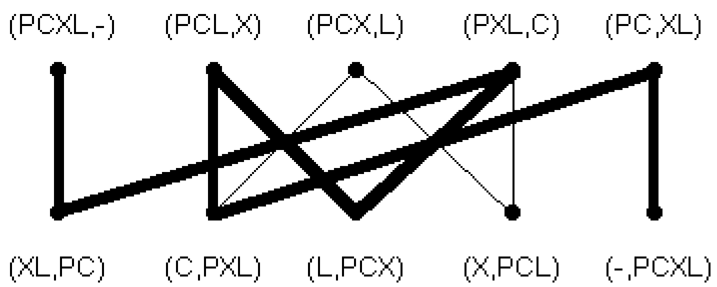
Leçon 2

Exercice 5 [3]

Désignons par P le passeur, par C la chèvre, par X le chou et par L le loup. Les sommets du graphe sont des couples précisant qui est sur la rive initiale, qui est sur l'autre rive. Ainsi, le couple (PCX, L) signifie que le passeur est sur la rive initiale avec la chèvre et le chou (qui sont donc sous surveillance), alors que le loup est sur l'autre rive. Une arête relie deux sommets lorsque le passeur peut passer d'une situation à l'autre. En transportant la chèvre, le passeur passe par exemple du sommet (PCX, L) au sommet (X, PCL). Le graphe ainsi obtenu est biparti : les sommets pour lesquels le passeur est sur la rive initiale ne sont reliés qu'aux sommets pour lesquels le passeur est sur l'autre rive...

Naturellement, on ne considèrera pas les sommets dont l'une des composantes est CX ou LC car ces situations sont interdites.

Il suffit ensuite de trouver un chemin entre la situation initiale $(PCXL, -)$ et la situation finale souhaitée $(-, PCXL)$. La figure suivante donne un tel chemin :



— Le passeur traverse avec la chèvre et revient sur la rive initiale.

— Puis il fait traverser le loup et revient avec la chèvre.

— Il dépose la chèvre et fait traverser le chou et revient seul.

— Enfin il fait traverser la chèvre.

Leçon 3

Exercice 5

Si l'on présentait cette situation par un graphe dont les maires seraient représentés pas les sommets et les poignées de mains échangées par les arêtes, on aurait : 7 sommets, chacun de degré 6, donc la somme des degrés des sommets est de $7 \times 6 = 42$. Le nombre d'arêtes vaut donc $42 \div 2 = 21$.

Exercice 6

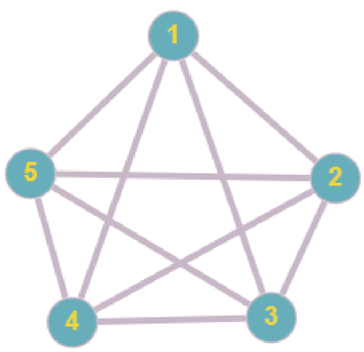
Considérons le graphe dont les sommets sont les enfants et il y a une arête entre deux sommets si les enfants sont amis. Ce graphe a $7 + 9 + 4 = 20$ sommets, pour déterminer le nombre d'arêtes, on calcule la somme des degrés $7 \times 3 + 9 \times 4 + 4 \times 5 = 77$ est impaire. Par la lemme des poignées de mains, ce nombre doit être égal à deux fois le nombres d'arêtes ce qui est donc impossible.

Exercice 7

Il est impossible de proposer un planning car il y'a 07 établissements. Si on représente un établissement par un sommet d'un graphe, chaque sommet aura pour degré 03. Or d'après la conséquence des lemmes des poignées des mains , le nombre de sommets de degré impair doit être pair. D'où l'impossibilité.

Exercice 8

1 Chaque équipe est représenté par un sommet d'un graphe et un match par une arête. On obtient un graphe complet d'ordre 5.

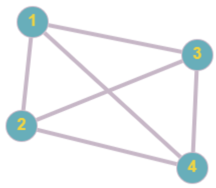


La taille du graphe indique le nombre de matches soit en tout 10 matches. On peut donc organiser ces 10 matchs de cette manière : $1-2; 1-3; 1-4; 1-5; 2-3; 2-4; 2-5; 3-4; 3-5$ et $4-5$.

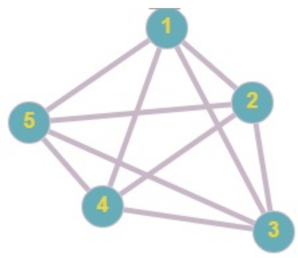
2 Il est impossible d'organiser ces séances d'entrainements si chaque équipe doit jouer 03 matches. Car en représentant chaque équipe par les sommets d'un graphe, on aura un graphe ayant 05 sommets de degrés impairs,ce qui est impossible d'après la conséquence du lemme des poignées de mains.

Exercice 9

1 Il y'a en tout 6 matchs, chaque équipe joue 3 matchs.



2 Avec 5 il y'a 10 matchs.



3 Étant donné que deux équipes ne peuvent pas gagné le même matchs, On a en tout $3+2+2+1+1 = 9 matchs$, donc il y'a un match nul.

A.5.2 Chapitre 2

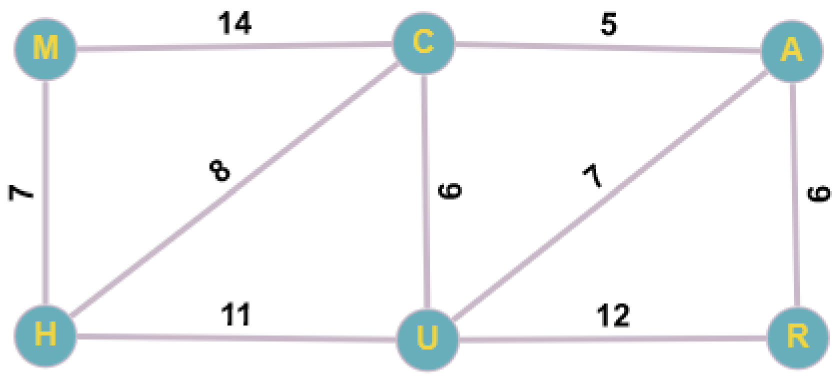
Leçon 1

Exercice 3

En utilisant l'algorithme de Dijkstra, la chaine la plus courte est : $D-C-B-A$ avec une distance de 515 km.

Exercice 4

La situation peut être représenté par le graphe suivant :



Nous utilisons l'algorithme de Dijkstra pour trouver la plus petite distance.

A l'étape 1 : Nous sommes au sommet R et nous lui attribuons la valeur arbitraire 0 et nous ne reviendrons plus sur ce sommet. Ensuite on peut partir au sommet A avec le poids 9(nous notons $9 - R$ dans la case du tableau correspondant pour indiquer qu'on viens de R, on procédera ainsi dans la suite.) ou au sommet U avec le poids 12 (on note $12 - R$). Nous choisissons le sommet A(Nous ne pouvons plus revenir sur un sommet déjà choisi).

A l'étape 2 : Nous sommes au sommet A et on peut aller soit à C avec le sommet $9 + 5 = 14$ (on note $14 - A$), soit au sommet U avec le sommet $9 + 7 = 16$, soit alors partir du point R pour le sommet U avec le poids 12. On choisit le sommet U.

A l'étape 3 : Nous sommes au sommet U et on peut aller soit au sommet C avec le poids 12+9=21 (on note $21 - U$) soit au sommet H avec le sommet $12 + 11 = 23$ (on note $23 - U$),ou aller en C avec le poids 14 ($14 - A$). On choisit le sommet C.

A l'étape 4 : Nous sommes au sommet C, On peut aller soit au sommet H avec le poids $14 + 8 = 22$(on note $22 - C$), soit au sommet M avec le poids $14 + 14 = 28$ (on note $28 - C$). On choisit le sommet H.

A l'étape 5 : Nous sommes au sommet H, on peut aller au sommet M avec le poids $22 + 7 = 29$ (on note $22 - H$), ou alors avec le poids 28 venant de C. On choisit le sommet M avec le poids 28.

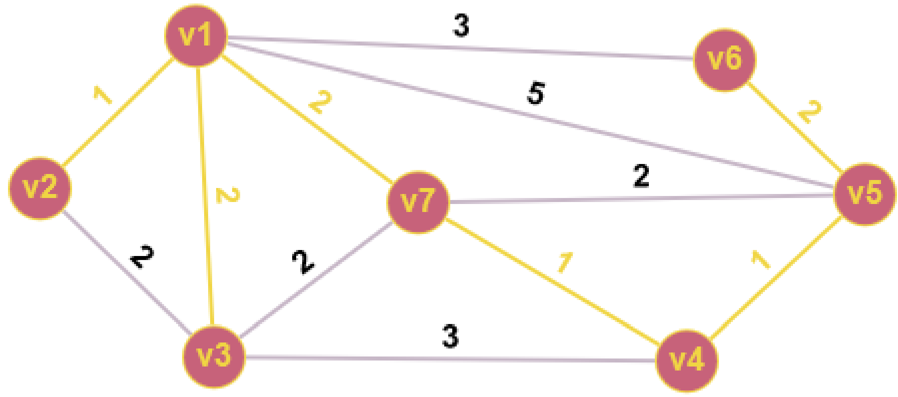
Fin de l'algorithme.

Tous les sommets ayant été fixés, on lit « à l'envers » la solution : $M - C - A - R$. Le plus court chemin est donc : **Rond-point Express - Assemblée nationale - Carrefour ENAM - Marché central**.

Leçon 2

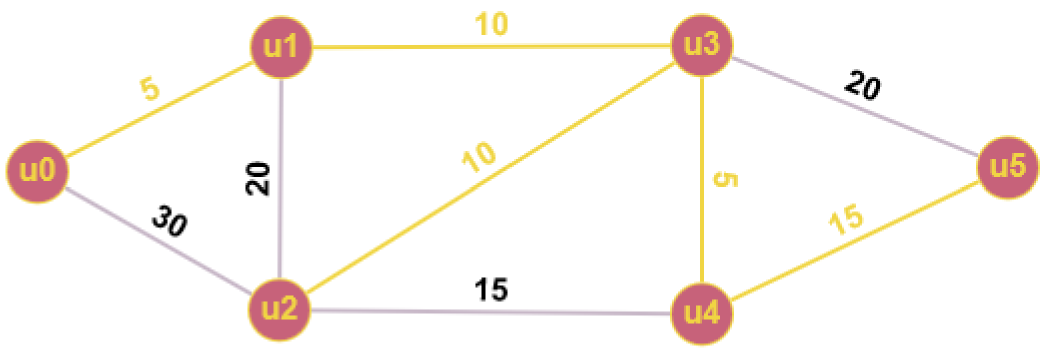
Exercice 2

En utilisant L'algorithme de Prim, on obtient un arbre couvrant de poids 9.



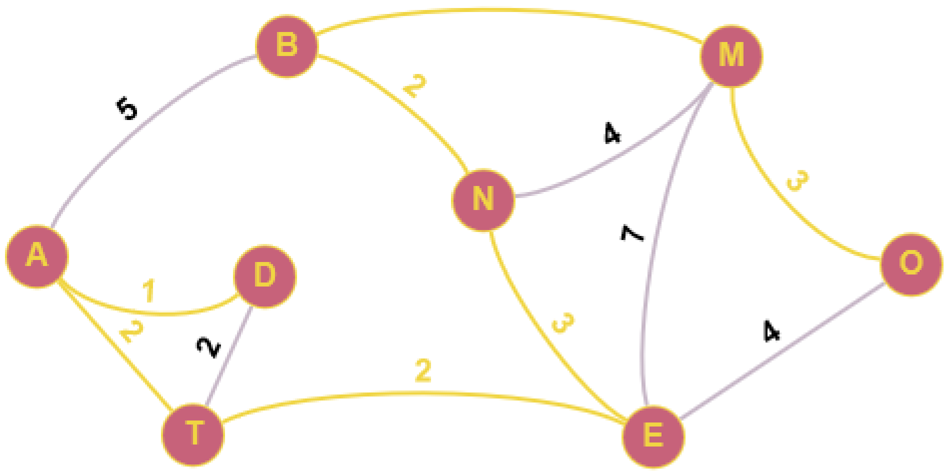
Exercice 3

L'arbre couvrant de poids minimal a pour poids 5 + 10 + 10 + 5 + 15 = 45 milliers de FCFA. Le coût minimal des installations est donc de 45000 FCFA.



Exercice 4

Le coût minimal pour l'installation des canalisations est 160000$fcfa$.



Leçon 3

Exercice 3

Si on considère cette figure comme un graphe, On constate qu'il est connexe et que chaque sommet est de degré pair. Donc c'est un graphe eulérien, par conséquent il est possible de tracer une courbe sans lever le crayon et qui coupe chacun des 16 segments.

Exercice 4

On constate que ce graphe est sémi-eulérien car il a tous ses sommets de dégré pair sauf deux sommets. Il est donc impossible de partir d'un pays et d'y revenir en franchissant chaque frontière une fois et une seule fois car le graphe n'est pas eulérien.

A.6 Extrait des programmes d'études

CADRE DE CONTEXTUALISATION		AGIR COMPÉTENT		RESSOURCES			
Famille de situations	**Exemples de situations**	**Catégories d'actions**	**Exemples d'actions**	**Savoirs**	**Savoir-faire**	**Savoir -être**	**Autres ressources**
				III. INTRODUCTION A LA THEORIE DES GRAPHES			
Organisation des données et estimation des quantités dans tous les domaines de vie.	Déplacements quotidiens. Usage de médicaments. Pratique d'une activité de loisir ou sportive. Achat ou vente d'un bien de consommation. Planification de repas ou d'activités agricoles. Participation à une activité de formation à l'école ou en milieu de travail. Recensement : d'un cheptel, d'une population. Relevé de température. Scrutin.	Estimation des quantités. Traitement des informations comportant des nombres ou des pourcentages. Collecte, traitement et exploitation des données.	Evaluer la fréquence des déplacements quotidiens ; Étudier des performances sportives ; Étudier le chiffre d'affaire d'un commerçant ; Étudier les performances scolaires d'un établissement, d'une classe etc ; Étudier les résultats d'un scrutin… Interpréter des relevés météorologiques (température, pluviométrie etc)	○ Graphe : • Présentation • Ordre d'un graphe. • Degré d'un sommet. • Sommets adjacents. • Sommet isolé. • Graphe simple. • Graphe orienté. • Graphe complet. ○ ***Propriété : Dans un graphe, la somme des degrés des sommets est égale au double du nombre de ses arêtes.***	¤ Justifier qu'une représentation graphique est un graphe. ¤ Justifier qu'un graphe est simple ou orienté ; complet. ¤ Déterminer l'ordre d'un graphe ; ¤ Déterminer le degré d'un sommet. ¤ Reconnaître deux sommets adjacents. ¤ Résoudre des problèmes concrets de la vie courante à l'aide des graphes.	Développer : l'esprit critique, le sens de l'ordre et de la méthode, la curiosité lors de la lecture d'un texte comportant des nombres, le sens de la rigueur et de la concision.	•Documentation. •Calculette. •Tableurs. •TICE

Figure 2.3 – Extrait du programme d'étude de Première C au Cameroun

CADRE DE CONTEXTUALISATION		AGIR COMPÉTENT		RESSOURCES			
Famille de situations	**Exemples de situations**	**Catégories d'actions**	**Exemples d'actions**	**Savoirs**	**Savoir-faire**	**Savoir -être**	**Autres ressources**
				III. THEORIE DES GRAPHES			
Organisation des données et estimation des quantités dans tous les domaines de vie.	Optimisation des coûts de construction d'un réseau (transport, informatique, …) Détermination d'un chemin de coût minimum dans un réseau (de transport, informatique, …)	Modéliser des situations du monde réel par des graphes Exécuter des algorithmes de parcours de graphes Interpréter les résultats obtenus des algorithmes de parcours	Modéliser un réseau routier sous forme d'un graphe Trouver à l'aide d'un algorithme un plus court chemin entre deux localités reliées par des routes. Déterminer dans un réseau routier le coût minimum pour la réhabilitation de certaines voies de façon à désenclaver toutes les localités.	○ **Rappels et définitions** • Graphes et sous-graphes • Chaines, chemin et cycles (longueur) • Graphes connexes • Arbres et arbres couvrants • Graphes et sous-graphes valué (pondérés) • Poids d'un sous-graphe ○ **Propriété** *Un graphe est connexe si et seulement si il contient un arbre couvrant.* ○ **Algorithmes** • Parcours en largeur (BFS) • Kruskal et Prim • Dijkstra	○ Identifier / Déterminer un arbre couvrant d'un graphe connexe (BFS) ○ Identifier / Déterminer un arbre couvrant de poids minimum d'un graphe pondéré (Prim) ○ Déterminer un chemin de poids minimum (plus court chemin) entre deux sommets d'un graphe pondéré (Dijkstra)	Développer : - La capacité à l'abstraction et à la modélisation - L'intuition et la capacité à la résolution des problèmes - La rigueur, le sens de l'ordre et de la méthode	- Documentation - TICE

Figure 2.4 – Extrait du programme d'étude de Terminale C au Cameroun