Ministère des Enseignements Secondaires
GROUPE « AGIR COMPETENT »
LYCEE CLASSIQUE D'EDEA
Tel : 697 26 38 45 / 682 80 90 67
Responsable : T. N . AWONO MESSI

Année scolaire : 2025-2026
Classe : T^le C, TI
Durée : 4h Coefficient : 7/4
Prof : T. N. AWONO MESSI

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGES N° 7 : CLASSE DE T^le C, TI

ESPACES VECTORIELS ET APPLICATIONS LINÉAIRES EN DIMENSION 3 [3]

EXERCICE 1

E est espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont une base est $\mathscr{B}=\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Soit f l'endomorphisme de E défini par $f\left(\vec{i}\right)=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$; $f\left(\vec{j}\right)=2\vec{i}-\vec{k}$; $f\left(\vec{k}\right)=2\vec{j}-5\vec{k}$.

1. Détermine la matrice A de f dans la base $\mathscr{B}$.
2. Montre que $\ker f$ est une droite vectorielle dont tu préciseras une base.
3. Montre que $\operatorname{Im} f$ est un plan vectoriel dont tu préciseras une base.
4. Soit $\mathscr{B}'=\left(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\right)$ avec $\vec{e_1}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{e_2}=-\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$ et $\vec{e_3}=4\vec{i}-2\vec{k}$.
   - **(a)** Montre que $\mathscr{B}'$ est une base de E.
   - **(b)** Montre que $\vec{e_1}\in\ker f$ et que $\left(\vec{e_2},\vec{e_3}\right)$ est une base de $\operatorname{Im} f$.
   - **(c)** Montre que $f\left(\vec{e_2}\right)=-3\vec{e_2}-\frac{1}{2}\vec{e_3}$ et $f\left(\vec{e_3}\right)=-8\vec{e_2}-\vec{e_3}$.
   - **(d)** Déduis-en la matrice A' de f dans la base $\mathscr{B}'$.

EXERCICE 2

On considère les matrices $M=\begin{pmatrix}0&0\\0&-2\end{pmatrix}$ et $A=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-3&4&-3\\-1&1&0\end{pmatrix}$

1. Calcule M^2 et M^3.
2. Montre par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a : $M^n=\begin{pmatrix}0&0\\0&(-2)^n\end{pmatrix}$.
3. **(a)** Vérifie que $A^2-3A+2I_3=0_3$.
   - **(b)** Montre que A est inversible et détermine la matrice inverse A^{-1} de A.

EXERCICE 3

E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 3 muni d'une base $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.
Soit f l'endomorphisme de E défini par $f\left(\vec{i}\right)=\vec{i}$; $f\left(\vec{j}\right)=f\left(\vec{k}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{j}+\vec{k}\right)$.

1. Détermine une base de $\ker f$.
2. Détermine une base de $\operatorname{Im} f$.
3. Démontre que tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de $\ker f$ et d'un vecteur de $\operatorname{Im} f$.
4. Que peux-tu dire des sous-espaces vectoriels $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$?
5. **(a)** Vérifie que $f\circ f=f$.
   - **(b)** Démontre que $\vec{u}\in\operatorname{Im} f\Leftrightarrow f\left(\vec{u}\right)=\vec{u}$.

EXERCICE 4

On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}4 & -6\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ et $P=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

1. Montre que la matrice P est inversible, puis détermine P^{-1}.
2. Montre que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D.
3. Déduis-en une expression de A^n en fonction de $n\in\mathbb{N}^*$.

EXERCICE 5

E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont une base est $\mathscr{B}=\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Soit f l'endomorphisme de E qui à tout vecteur $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ associe $f\left(\vec{u}\right)=\left(-x-y+2z\right)\vec{i}+\left(2x-y+z\right)\vec{j}+\left(x-2y+3z\right)\vec{k}$.

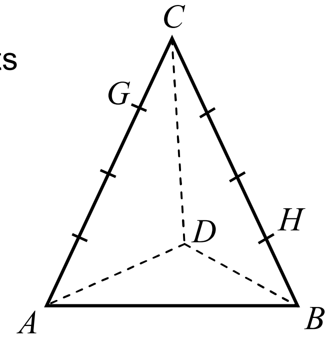
1. Détermine la matrice M de f dans la base $\mathscr{B}$.
2. **(a)** Détermine le noyau $\ker f$ de f. (Précise une base de $\ker f$)
   (b) Déduis-en la dimension de $\operatorname{Im} f$, image de f. f est-elle bijective ? Justifie la réponse.
3. On considère les vecteurs $\overrightarrow{e_1}=2\vec{j}-\vec{k}$; $\overrightarrow{e_2}=3\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$; $\overrightarrow{e_3}=\vec{i}-\vec{k}$.
   (a) Démontre que la famille $\mathscr{B}'=\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\right)$ est une base de l'espace vectoriel E.
   (b) Détermine la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$

EXERCICE 6

On désigne par $\mathscr{L}\left(\mathbb{R}^2\right)$ la famille des endomorphismes f_λ de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice M_λ relativement à la base canonique $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ de $\mathbb{R}^2$ est de la forme $\begin{pmatrix}-1+\lambda & 1+\lambda\\ \lambda(1-\lambda) & \lambda\end{pmatrix}$ où λ est un réel.

1. À quelle condition sur λ, f_λ est-il un automorphisme ?
2. Détermine une équation cartésienne du noyau et de l'image de f_{-2}.
3. Soit g l'application linéaire définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par $g(x,y)=\frac{1}{2}\left(-x+3y,\frac{1}{2}x+y\right)$.
   g appartient-elle à $\mathscr{L}\left(\mathbb{R}^2\right)$? Justifie.

EXERCICE 7



Sur la figure ci-contre, $CABD$ est un tétraèdre régulier. G et H sont des points tels que : $\overrightarrow{CG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{CH}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$ et L le milieu du segment $[CD]$.

1. Montre que les droites (GH) et (AB) sont sécantes en un point I.
2. $\vec{i},\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont des vecteurs unitaires, respectivement colinéaires et de même sens que les vecteurs $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   On suppose que l'espace $\mathscr{E}$ est rapporté au repère $\mathscr{R}=\left(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ et que $AC=4$.
   Détermine les coordonnées des points G,H et I dans le repère $\mathscr{R}$.
3. Soit E l'espace vectoriel associé à l'espace affine $\mathscr{E}$; $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ une base de E et f l'endomorphisme de E tel que $f\left(\vec{i}\right)=\vec{j}$; $f\left(\vec{j}\right)=-2\vec{j}$ et $f\left(\vec{k}\right)=\vec{k}$.
   (a) Justifie que f n'est pas un isomorphisme de E.
   (b) Détermine le noyau et l'image de f ; donne une base pour chacun d'eux.