Ministère des Enseignements Secondaires
GROUPE « AGIR COMPETENT »
LYCEE CLASSIQUE D'EDEA
Tel : 697 26 38 45 / 682 80 90 67
Responsable : T. N . AWONO MESSI

Année scolaire : 2025-2026
Classe : T^{le} C, TI
Durée : 4h Coefficient : 7/4
Prof : T. N. AWONO MESSI

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGES N° 6 : CLASSE DE T^{le} C, TI

ESPACES VECTORIELS ET APPLICATIONS LINÉAIRES EN DIMENSION 3 (2)

EXERCICE 1

On considère dans $\mathbb{R}^3$, les sous ensembles F_1 et G définis par : $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x - y - z = 0\}$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, y = z = 0\}$. Soit $F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + y + z = 0\}$ et $H = Vect\{(1,1,1)\}$.

1. Montre que F_1 et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. **(a)** Montre que F_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Trouve deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $F_2 = Vect(\vec{u}, \vec{v})$.
   (c) Détermine $F_2 \cap H$ et montre que $F_2 + H = \mathbb{R}^3$. Tire une conclusion.

EXERCICE 2

On considère l'application
$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z) \longmapsto (x+y, x-2z)$$

1. Montre que f est une application linéaire.
2. Détermine l'image réciproque $f^{-1}(\{0\})$. f est-elle injective ?
3. Détermine l'image $f(\mathbb{R}^3)$. f est-elle surjective ?

EXERCICE 3

Soit $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base canonique de $E = \mathbb{R}^3$. On définit un endomorphisme φ de E par : $\varphi(\vec{i}) = -\vec{i} + 2\vec{k}$, $\varphi(\vec{j}) = \vec{j} + 2\vec{k}$ et $\varphi(\vec{k}) = 2\vec{i} + 2\vec{j}$.

1. Écris la matrice A de φ relativement à la base $\mathscr{B}$, puis calcule A^2 et A^3.
2. On note $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Donne les coordonnées de $\varphi(\vec{u})$ dans la base $\mathscr{B}$.
3. Détermine $\ker \varphi$ et $\operatorname{Im} \varphi$. Précise une base de chacun de ces sous-espaces vectoriels.

EXERCICE 4

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

1. Calcule M^2.
2. Détermine $\ker f$; en donne une base et sa dimension.
3. Détermine $\operatorname{Im} f$; en donne une base et sa dimension.
4. Détermine une base de l'espace vectoriel $\ker f \cap \operatorname{Im} f$.

EXERCICE 5

E est espace vectoriel de base $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit f l'endomorphisme de E tel que : $f(\vec{i}) = \vec{i} + \vec{j}$, $f(\vec{j}) = -\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ et $f(\vec{k}) = 2\vec{k}$.

1. Écris la matrice de f relativement à la base $\mathscr{B}$.
2. f est-il un automorphisme ? Détermine $f\left(2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}\right)$ et tire une conclusion.
3. Donne l'écriture analytique de f.
4. Détermine $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ en précisant leurs bases respectives.

EXERCICE 6

E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont une base est $\mathscr{B}=\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Soit φ l'endomorphisme de E qui à tout vecteur $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ associe le vecteur $\varphi\left(\vec{u}\right)=(-x+2y)\vec{i}+(2x-4y+z)\vec{j}+x\vec{k}$.

1. Ecris la matrice M de φ dans la base $\mathscr{B}$.
2. Montre que φ est un automorphisme de E , puis déduis-en $\operatorname{Im}\varphi$ et $\ker\varphi$.
3. On considère les vecteurs $\vec{e_1}=\vec{i}-2\vec{j}$ et $\vec{e_2}=2\vec{j}-4\vec{k}$.
4. **(a)** Montre que $\mathscr{B}'=\left(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{j}\right)$ est une base de E.
   (b) Ecris la matrice de φ dans la base $\left(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{j}\right)$.

EXERCICE 7

Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des fonctions numériques définies, continues et indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.

Soit E le sous espace vectoriel de $\mathscr{F}$ engendré par les fonctions f_1, f_2 et f_3 définies par :

$f_1(x)=e^x$, $f_2(x)=e^x\cos x$ et $f_3(x)=e^x\sin x$.

1. Montrer que $\mathscr{B}=\left(f_1,f_2,f_3\right)$ forme une base de E.
2. Soit φ l'application de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{F}$ telle que $\varphi(f)=f'-f$ où f' est la dérivée de f.
   (a) Montrer que φ est un endomorphisme de E.
   (b) Déterminer le noyau et l'image de φ.

EXERCICE 8

L'espace vectoriel E est rapporté à une base $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, φ est l'endomorphisme de E défini par :
$\varphi\left(\vec{i}\right)=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$, $\varphi\left(\vec{j}\right)=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ et $\varphi\left(\vec{k}\right)=3\vec{j}-3\vec{k}$.

1. Ecris la matrice de φ dans cette base.
2. Détermine une base de $\ker\varphi$, puis justifie que φ n'est pas bijectif.
3. **(a)** Montre que $\operatorname{Im}\varphi$ est un plan vectoriel de E.
   (b) Vérifie que $\varphi\left(\vec{k}\right)=2\varphi\left(\vec{i}\right)-\varphi\left(\vec{j}\right)$, puis déduis-en une base de $\operatorname{Im}\varphi$.

EXERCICE 9

Soit $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ une base d'un espace vectoriel E. Soit f un endomorphisme de E.

1. Pour $\lambda\in\mathbb{R}$, on considère l'ensemble E_λ des vecteurs $\vec{u}$ de E tels que $f\left(\vec{u}\right)=\lambda\vec{u}$.
   (a) Démontre que E_λ est un sous-espace vectoriel de E.
   (b) On suppose que f vérifie l'égalité $f\circ f=2f$.
   Démontre que $\vec{u}\in\operatorname{Im} f$ si et seulement si $\vec{u}\in E_2$.
2. On suppose ici qu'on a : $f\left(\vec{i}+\vec{j}\right)=2\vec{i}+2\vec{j}$; $f\left(\vec{i}-\vec{j}\right)=2\vec{i}-2\vec{j}$; $f\left(\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}\right)=\vec{0}$.
   Démontre que $f\circ f=2f$.