Ministère des Enseignements Secondaires
GROUPE « AGIR COMPETENT »
LYCEE CLASSIQUE D'EDEA
Tel : 697 26 38 45 / 682 80 90 67
Responsable : T. N . AWONO MESSI

Année scolaire : 2025-2026
Classe : T^le C, TI
Durée : 4h Coefficient : 6/4
Prof : T. N. AWONO MESSI

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGES N° 5 : CLASSE DE T^le C, TI

ESPACES VECTORIELS ET APPLICATIONS LINÉAIRES EN DIMENSION 3 [1]

EXERCICE 1

On considère dans $\mathbb{R}^3$, les sous ensembles F et G définis par : $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / 2x+y-z=0\}$ et $G=\{(x-y,2x+y+4z,3y+2z)/x,y,z\in\mathbb{R}\}$.

1. Montre que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Donne une base et la dimension de F, puis de G.
3. F est-il égal à $\mathbb{R}^3$? G est-il égal à $\mathbb{R}^3$?

EXERCICE 2

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

$E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / 3x-5y+z=0\}$; $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / 2x-3y+5z=1\}$

$G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / 2x+3y+z\geq 0\}$; $H=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x+y-z=x+y+z=0\}$

EXERCICE 3

On note $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère les vecteurs $\vec{u}=(1,1,1)$, $\vec{v}=(1,-1,0)$ et $\vec{w}=(-1,1,-1)$.

1. Montre que $\mathscr{B}=(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Détermine les coordonnées de $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ et $\vec{e_3}$ dans la base $\mathscr{B}$.

EXERCICE 4

On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ définis par : $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / 3x+2y+z=0\}$ et $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x+3y+z=0 \text{ et } x-y+2z=0\}$.

1. Montre que E est un plan vectoriel.
2. Est-ce que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

EXERCICE 5

Dans l'espace vectoriel réel $(E,+,\bullet)$, on considère les vecteurs $\vec{u}=(\cos a,\cos b,\cos c)$, $\vec{v}=(\sin a,\sin b,\sin c)$ et $\vec{w}=(\sin(x+a),\sin(x+b),\sin(x+c))$ où $a,b,c\in\mathbb{R}$.

Montre que la famille $\mathscr{B}=(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est liée.

EXERCICE 6

Soit les ensembles : $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x=y=z\}$; $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x-2y+z=0\}$ et $G=\{(a-b,a+b,2a-3b)/a\in\mathbb{R} \text{ et } b\in\mathbb{R}\}$.

1. Montre que E , F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Détermine les sous-espaces vectoriels $E \cap F$, $E \cap G$ et $F \cap G$.

EXERCICE 7

1. Montre que les vecteurs $\overrightarrow{e_1} = (2,-1,4)$, $\overrightarrow{e_2} = (3,1,2)$ et $\overrightarrow{e_3} = (0,2,-1)$ engendrent $\mathbb{R}^3$.
2. Montre que $\vec{u} = (4,0,-2)$, $\vec{v} = (-8,1,5)$ et $\vec{w} = (2,0,0)$ sont linéairement indépendants.

EXERCICE 8

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, on pose $\overrightarrow{u_1} = (-4,3,2)$, $\overrightarrow{u_2} = (-4,0,1)$ et $\overrightarrow{u_3} = (2,1,0)$.

1. Les familles de vecteurs suivantes $\left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right)$, $\left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\right)$ sont-elles libres ? génératrices de E? bases de E ? Lorsqu'elles sont liées, précise une relation de dépendance linéaire.
2. Détermine une équation du sous-espace vectoriel F engendré par $\left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right)$.
3. Montre que $G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x-2y+z=0 \text{ et } 3x-y-2z=0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de E et détermine une base de G.
4. Montre que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.

EXERCICE 9

Soit f l'application qui à tout vecteur $\vec{u} = (x,y,z)$ de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ associe le vecteur $f\left(\vec{u}\right) = (3x-y-2z, 2x-2z, x-y)$.

1. Montre que l'application f est un endomorphisme de E.
2. Écris la matrice A de f dans la base canonique de E.
3. Détermine $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$. Précise une base de chacun de ces sous-espaces vectoriels.
4. Montre que $H = \left\{\vec{u} \in E \,/\, f\left(\vec{u}\right) = 2\vec{u}\right\}$ est un sous-espace vectoriel de E.
5. Montre que les vecteurs $\overrightarrow{e_1} = (1,1,1)$, $\overrightarrow{e_2} = (1,0,1)$ et $\overrightarrow{e_3} = (1,1,0)$ forment une base de E.
6. Détermine la matrice D de f dans la base $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right)$.

EXERCICE 10

On considère les fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 définies sur $I =]0;+\infty[$ par $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = x\ln x$ et $f_4(x) = x^2 \ln x$. On note E l'espace vectoriel engendré par f_1, f_2 , f_3 et f_4.

1. On suppose que a,b,c et d sont des réels tels que : $af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4 = 0$.
   - **(a)** Montre que $a+b=0$.
   - **(b)** Montre que pour tout $x > 1, \dfrac{a}{x\ln x} + \dfrac{b}{\ln x} + \dfrac{c}{x} + d = 0$. Déduis-en que $d = 0$.
   - **(c)** Montre que pour tout $x > 0, \dfrac{a}{x} + b + c\dfrac{\ln x}{x} = 0$. Déduis-en que $b = 0$.
   - **(d)** Que peux-tu dire de la famille (f_1, f_2, f_3, f_4)?
2. On note φ l'application qui à toute fonction f de E associe la fonction $\varphi(f) = g$ définie par : pour tout $x > 0, g(x) = xf'(x)$.
   - **(a)** Montre que φ est une application linéaire.
   - **(b)** Détermine $\varphi(f_1)$, $\varphi(f_2)$, $\varphi(f_3)$ et $\varphi(f_4)$.
   - **(c)** Montre que φ est un automorphisme de E.