REPUBLIQUE DU CAMEROUN

L.C.E. / COSAPIE X

Année scolaire : 2022 / 2023

Niveau : Tle C et Tle D

COURS DE MATHEMATIQUES MODULE 26

Chapitre : NOTION DE GRAPHE

Agir compétent : Modéliser les situations du monde réel par des graphes
Exécuter les algorithmes de parcours de graphes
Interpréter les résultats obtenus des algorithmes de parcours

Leçon : QUELQUES VOCABULAIRES

(durée : 2 heures)

A- SITUATION PROBLEME :

Au terme de sa visite au Lycée Technique d'Edéa, le délégué régional nouvellement promu désire faire une visite surprise au collège Saint Pie X. Il contacte alors le principal du collège. Mais le délégué trouve des difficultés à comprendre la description de l'itinéraire qui conduit au collège tel que le lui décrit le principal.

Le principal répond à cet appel devant vous. Quelle aide peux-tu apporter afin de permettre au délégué de se rendre aisément au collège ?

B- ACTIVITES

1. Fais une maquette des quartiers PONGO, MBANDA, QUARTIER D'AMOUR, QUARTIER ADMINISTRATIF qui présente les routes que l'on peut empreinte du LTE au COSAPIE X.
2. Utilise les points et les lignes pour simplifier la représentation de la question 1.
3. Fais une description de la figure obtenue au 2.
4. Dessine un graphe qui représente un réseau orienté de pistes cyclables que tu empreintes plus souvent pour partir de ton Domicile pour le Collège.

C- RESUME

Vocabulaire

Graphe : ensemble de points et de lignes reliant certains de ces points.

Boucle : arrête dont les extrémités sont confondues.

Graphe simple : graphe sans boucle tels que, entre deux sommets, il y a au plus une arête.

(Les graphes non orientés étudiés dans ce cours sont en général des graphes simples.)

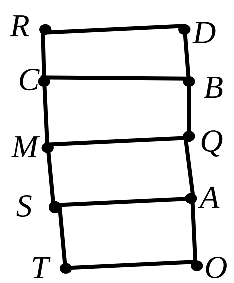
Ordre d'un graphe : nombre des sommets.

Degré d'un sommet : nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité.

Théorème

La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égale au double du nombre total d'arêtes. C'est un nombre pair.

Exemple : le graphe (3) ci-dessous représente un réseau non orienté de route reliant dix points du marché central d'Edéa.



Le graphe (3) comporte 13 arêtes :

La somme des degrés de tous les sommets est :

$2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 2 + 2 = 26 = 2 \times 13$.

sommet	R	D	C	B	M	Q	S	A	T	O
degré	2	2	3	3	3	3	3	3	2	2

Graphe complet : lorsque toutes les paires de sommets sont des paires de sommets adjacents, le graphe est complet.

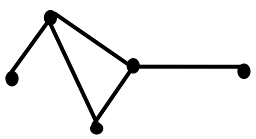
Sous-graphe d'un graphe : graphe composé de certains sommets et des arrêtes qui relient ces sommets.

Chaine d'un graphe : deux sommets étant choisis, une suite d'arêtes mise bout à bout reliant ces deux sommets est une chaine.

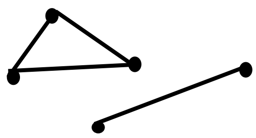
Graphe connexe : lorsque, pour chaque pair de sommets d'un graphe, il existe une chaine reliant les deux sommets, le graphe est connexe.

Exemple et contre-exemple

Graphe connexe



Graphe non connexe



Chaine orientée d'un graphe orienté : dans la suite des arrêtes orientées, l'extrémité terminale de l'une est toujours l'extrémité initiale de la suivante.

Longueur d'une chaine : nombre d'arêtes constituant la chaine.

Cycle d'un graphe : chaine dont les extrémités coïncident, composée d'arêtes toutes distinctes. On peut repasser plusieurs fois par le même sommet.

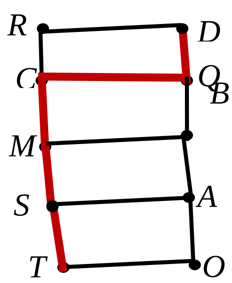
Pour un graphe orienté, on parle de **cycle orienté.**

Graphe en forme d'arbre : un graphe qui ne comporte pas de cycle.

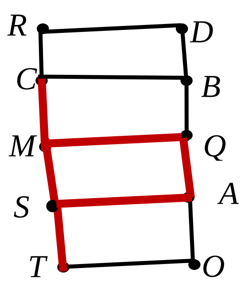
Exemples

Dans le graphe (3) il y a plusieurs chaines reliant les sommets T et D.

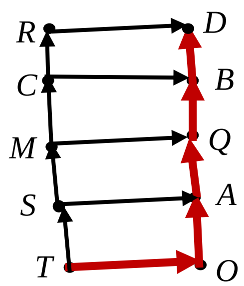
La chaine composée des arêtes TS , SM , MC , CB et BD est notée par la liste des sommets $TSMCBD$.



Chaine $TSMCBD$ de longueur 5.



Chaine $TSMQASMC$ de longueur 7 .



Chaine orientée $TOAQBD$ de longueur 5.

Pour reconnaitre un cycle, il faut penser qu'une arête ne peut être prise deux fois, et que l'on doit arriver au sommet que l'on est parti.

Ainsi, dans le graphe (3) , $SMQAS$ est un cycle distinct du cycle $ASMQA$.

$SMQA$ n'est pas un cycle car les extrémités de la chaine sont différentes.

$TSMQAST$ n'est pas un cycle car l'arête ST est prise deux fois.

Le graphe (3) n'est pas un arbre car il comporte des cycles.

D- EXERCICES

1. Quel est le nombre maximal d'arêtes d'un graphe non orienté d'ordre n ?
2. Un magasin embauche cinq étudiants : A, B , C, D et E pour compléter l'équipe des caissières pour la fin de l'année.
   Le responsable envisage de les affecter aux caisses 1 , 2 , 3 , 4 et 5 mais il estime qu'il ne pourra affecter, d'une part, ni B, ni E aux caisses 1 et 2, et, ni C, ni D aux caisses 4 et 5.
   Représenter par un graphe les différentes possibilités d'affectation des étudiants.

<u>Leçon</u> : QUELQUES PROPRIETES ET ALGORITHMES

(durée : 2 heures)

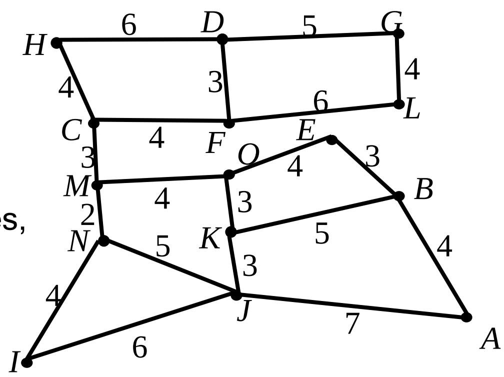
A- PREREQUIS

1. Définir : chaine d'un graphe.
2. Dessiner un graphe en forme d'arbre d'ordre 6.

B- SITUATION PROBLEME

A l'occasion de l'organisation d'une grande veillée mortuaire, un technicien a fait un devis et le plan d'électrification de la cour. Suivant les positions des tentes à la cour, ci-dessous on a une proposition de représentation du réseau de câbles reliant 15 ampoules. Les sommets représentent les positions des ampoules, les arêtes les morceaux de câble électrice qui relient les ampoules. Sur chaque arête est inscrite la longueur (en mètre) du câble.

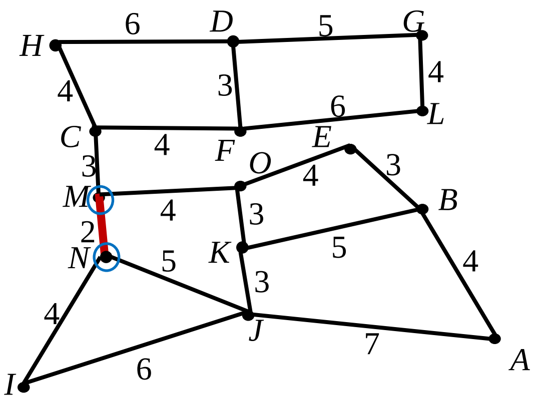
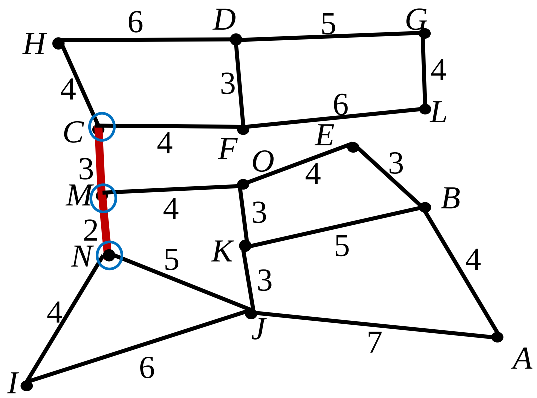
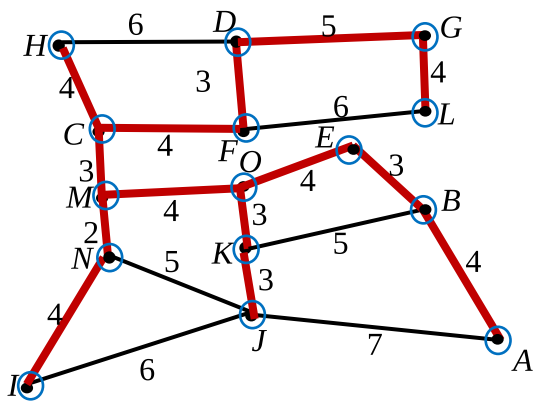
L'on possède suffisamment d'ampoules mais pas assez de câble électrique.



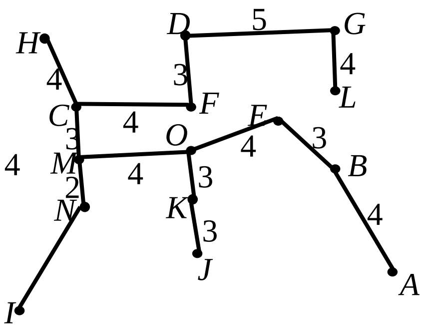
C- ACTIVITE

1. Recherche d'un arbre sous-graphe du graphe ci-dessus qui comporte toutes ses arêtes et qui utilise une longueur minimale du câble.
   Par **l'algorithme de PRIM**

Instruction	Exemple

<table>
<tr>
<td>1° Trouver l’arête avec le plus petit poids dans le graphe.
L’assombrir et encercler ses sommets (s’il y en a plusieurs en choisir 1.)</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>2° Trouver l’arête avec le plus petit poids parmi les arêtes non assombris restants
ayant un sommets encerclé et un sommet non encerclé. Assombrir cet arête et encercler son sommet non encerclé.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>3° Répéter l’étape 2° jusqu’à ce que tous les sommets soient encerclés .</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

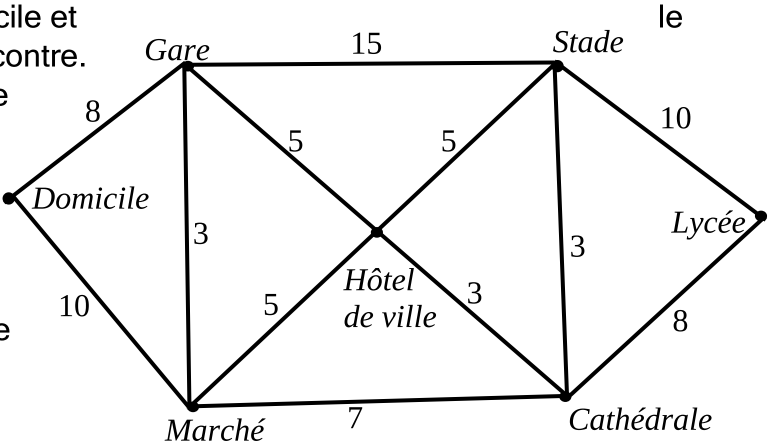
Finalement on obtient le sous-graphe du graphe (4) :



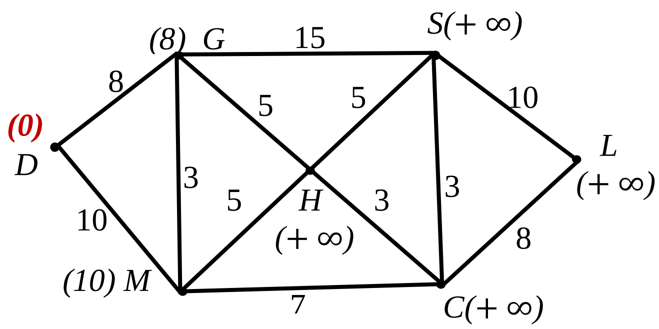
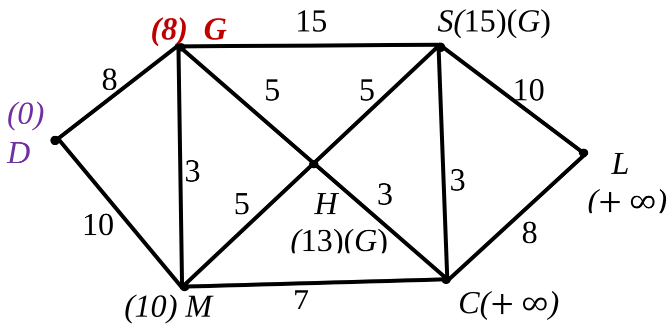
C’est un arbre couvrant de poids minimal du graphe (3)

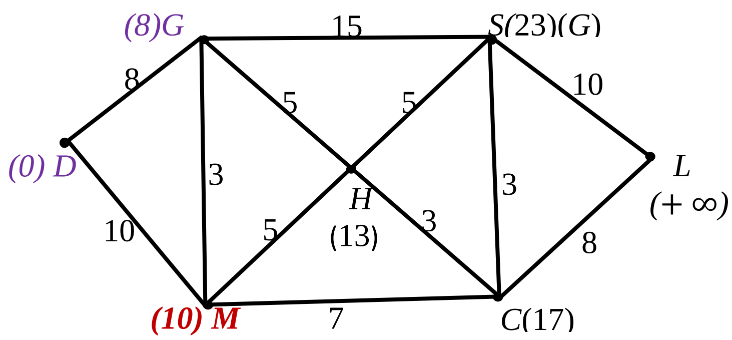
2. La longueur de câbles minimale nécessaire pour alimenter les 15 ampoules est de : 4+2+3+4+4+4+3+3+3+4+5 +4+3+4 ; soit 47 mètres de câble.

3. BENOIT habite une grande ville riche en moyens de transport collectif, rapides et fréquents. Ses itinéraires possibles entre son domicile et le lycée sont représentés par le graphe ci-contre. Sur chaque tronçon est inscrites la durée moyenne de transport (en minutes, attentes comprises). Les sommets représentent les stations où BENOIT peut effectuer un changement. BENOIT recherche le trajet le plus rapide entre son Domicile et le Lycée.

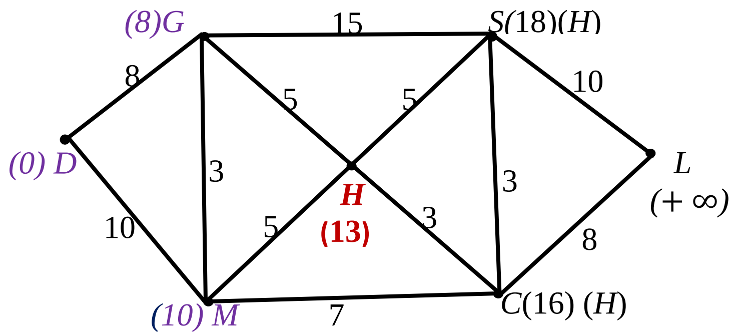


Recherche d'une plus courte chaine
Par <u>**l'algorithme de DIJKSTRA**</u>

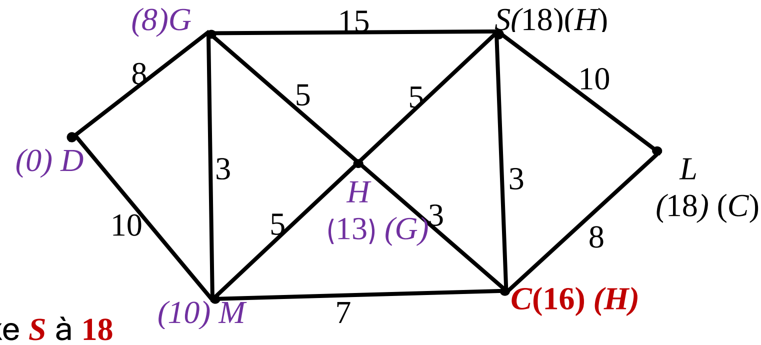
Instructions	**Exemple**
1° Initialisations : on fixe à 0 la marque de D Marquer chacun des sommets adjacents à D par le poids de l'arête joignant ce Sommet à D. Marquer les autres sommets par+ ∞.	On fixe ***D*** à **0** 
2° Regarder tous les sommets de marque non fixée, repérer celui qui qui a la plus petite marque et la fixer : soit X ce sommet. Pour chaque sommet Y adjacent à X, et de marque non fixée, calculer la somme « marque de X + poids de l'arête » Si cette somme est inférieure à la marque de Y , barrer la marque de Y et la remplacer par cette somme en indiquant la provenance de cette nouvelle somme dite améliorée.	On fixe ***G*** à **8**  Sommets de marque non fixée, adjacents à G . M: 8 + 3 = 11 Moins bon On garde 10 H: 8 + 5 = 13 On barre + ∞ On marque (13)(G) S: 8 + 15 = 23 On barre + ∞ On marque (23)(G)
3° Itération : on recommence à partir du 2° jusqu'à épuisement des sommets On fixe ***M*** à **10**	



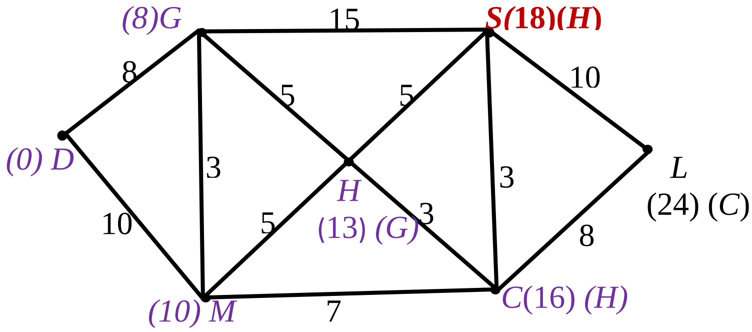
On fixe ***H*** à **13**



On fixe ***C*** à **16**



On fixe ***S*** à **18**



Il reste L comme sommet
18+10=28, moins bon on garde
24

Fin de l'algorithme : toutes les marques ayant été améliorée, la marque fixée du sommet Y est le poids d'une plus courte chaine entre les sommets D et Y.

Ainsi une plus courte chaine entre D et L a pour poids 24 (en min), obtenue par l'itinéraire

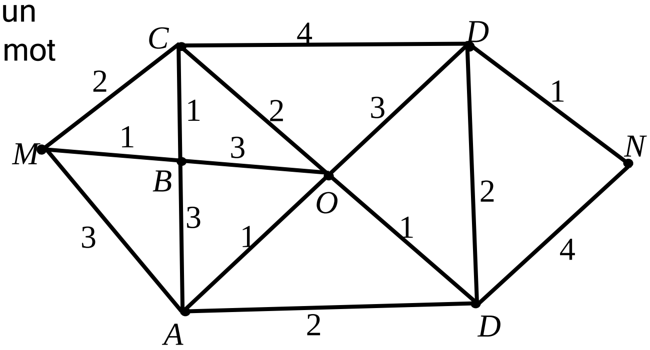
D-G-H-C-L, lue en remontant dans les schémas et les sommets indiqués entre parenthèses.

On peut placer les opérations successives de cet algorithme au fur et mesure dans un tableau, en suivant sur le graphe pour ajouter à chaque marque le poids des arêtes.

Sommet de marque fixée à chaque étape	Sommets et marque améliorées						
	D	G	M	H	C	S	L
D :0	0	8 (D)	10 (D)	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
G : 8				13 (G)		23 (G)	
M : 10					17 (M)		
H :13					16 (H)	18 (H)	
C 16:							24 (C)
S : 18	0	8 (D)	10 (D)	13 (G)	16 (H)	18 (H)	24 (C)

Remarque : pour appliquer l'algorithme de DIJSTRA à un graphe orienté, on remplace le mot « adjacent » par le mot « suivant ».

4. Recherche une plus coute chaine reliant les sommets A et N du graphe pondéré ci-contre.



D- RESUME

Définitions

Arbre couvrant d'un graphe : sous graphe d'un graphe connexe constitué de tous les sommets du graphe et qui a la forme d'un arbre.
Longueur d'une chaine : nombre d'arêtes qui la composent.

Distance de deux sommets : plus petite longueur des chaines reliant ces sommets.

Diamètre d'un graphe : plus grande distance constatée entre deux sommets parmi toutes les paires de sommets.

Graphe pondéré : lorsqu'un nombre positif est affecté à chacune de ses arêtes.

Poids d'une arête : nombre positif qui est affecté quel que soit sa signification.

Poids d'une chaine : somme des poids des arêtes qui la composent.

Plus courte chaine entre deux sommets donnés : chaine de poids minimal, parmi toutes les chaines reliant les deux sommets, quelle que soit la signification du poids.

Propriété : Un graphe est connexe si et seulement il contient un arbre couvrant.

E- EXERCICES

1. Rechercher une plus courte chaine allant du sommet M au sommet N de ce graphe pondéré orienté.
2. Même question pour le graphe pondéré orienté déduit du graphe précédent en changeant le sens de l'arête qui va du sommet A au sommet B et de l'arête qui va du sommet O au sommet A.