

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES N°:02.

Examinateur : M.SCEO Olivier

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES

[15 POINTS]

Exercice 1 : 04.75 points

- Vérifier que : $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$ (0,25pt)
- On considère l'équation $(\varphi): \cos^2 x + \left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right) \cos x - \frac{\sqrt{2}}{4} = 0$
 - Résoudre dans $]-\pi; \pi]$ l'équation (φ) . (0,75pt)
 - Placer sur le cercle trigonométrie les points images solutions de l'équation (φ) . (0,5pt)
 - Déduire la solution de l'équation $\cos^2 x + \left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right) \cos x - \frac{\sqrt{2}}{4} > 0$ dans $[0; 2\pi[$. (0,5pt)
- Démontrer que tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\tan x \times \sin 2x = 1 - \cos 2x$. (0,25pt)
 - Déduire la valeur exacte de $\tan \frac{\pi}{8}$ et $\tan \frac{\pi}{12}$. (0,5pt)
- x et y étant deux nombres réels de l'intervalle $[0; \pi]$. Résoudre le système

$$(S): \begin{cases} \cos x \cos y = \frac{\sqrt{3}+1}{4} \\ \sin x \sin y = \frac{\sqrt{3}-1}{4} \end{cases}$$
 (0,75pt)
- On donne $Q(x) = (\sqrt{2} + \sqrt{6}) \cos 2x + (\sqrt{2} - \sqrt{6}) \sin 2x$; $\alpha = \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{4}$ et $\beta = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{4}$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \alpha \text{ ou } \beta \text{ et } \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \alpha \text{ ou } \beta$$
 - Déterminer les nombres réels r et θ tels que : $r \sin(2x + \theta) = Q(x)$. (0,5pt)
 - Résoudre dans $]-\pi; \pi]$ l'équation $Q(x) = -2$. (0,75pt)

Exercice 2 : 07 Points

- On pose $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq p \leq n$
 - Démontrer que $pC_n^p = nC_{n-1}^{p-1}$ (0,5pt)
 - Déduire que $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n = n \times 2^{n-1}$ (0,5pt)
- Un clavier de **huit touches** permet de composer le code d'entrée d'un bâtiment à l'aide d'une lettre suivie d'un nombre de trois chiffres distincts ou non. (0,5pt)
 - Combien de codes différents peut-on former ? (0,5pt)
 - Combien y a-t-il de codes ne contenant pas le chiffre 7 ? (0,5pt)
 - Combien y a-t-il de codes comportant au moins une fois le chiffre 5 ? (0,5pt)
 - Combien y a-t-il de codes dont les chiffres sont trois distincts ? (0,5pt)
- Répond par **vrai** ou **faux**. (0,25ptx3=0,75pt)
 - Le nombre de menus différents qu'on peut composer si on a le choix entre 3 entrées, 2 plats et 4 desserts est 24.
 - Le mot **PROBATOIRE** compte 90720 Anagrammes.
 - Le nombre de façon de choisir 3 femmes et 2 hommes parmi 10 femmes et 5 hommes est : $C_{10}^3 + C_5^2$.
- Le plan est rapporté à un repère orthonormé (o, \vec{i}, \vec{j}) . Soit le cercle $(C): x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0$ et la droite $(D_{a,b}): x + y - a^2 - b^2 - 1 = 0$. On désigne par Ω le centre du cercle (C) .

4	5	6
7	8	9
X	Y	

On considère le système $(S): \begin{cases} ax - by = 0 \\ x - \sqrt{2}y = 0 \end{cases}$; l'équation $(E): -x^2 + bx - a = 0$ et on pose

$$G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline a & b \\ \hline \end{array}$$

- a) Exprime en fonction de a et b la distance Ω à la droite $(D_{a,b})$. (0,75pt)
- b) On dispose de deux urnes U_1 contenant des boules numérotés $0; 1; \sqrt{2}$ et U_2 contenant les boules numérotés $-1; -1; 0; 2; 3$ et 3 . Une opération consiste à tirer deux boules l'une dans l'urne U_1 et l'autre dans l'urne U_2 . On désigne par a le numéro de la boule tirée de U_1 et b celui de la boule tirée dans U_2 . Déterminer le nombre de tirages pour que :
- $(D_{a,b})$ et (C) soient tangents. (0,5pt)
 - $(D_{a,b})$ et (C) soient disjoints. (0,5pt)
 - (S) admette une infinité de solution. (0,5pt)
 - G soit isobayante des A et B . (0,5pt)
 - (E) admet exactement deux solutions distinctes (0,5pt)

Exercice 3 :

02 .75 Points

Soit ABC un triangle équilatéral de cote 5 cm et de centre de gravité G_0 . Soient D, E , et F trois points du plan tels que : $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$, $E = \text{bar} \{(A; 2); (C; -1)\}$; $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$

- Construire le triangle ABC et y placer les points D, E et F . (0.75pt)
- Soit k un réel. Déterminer l'ensemble des valeurs du réel k pour laquelle le barycentre des points pondérés $\{(A, -5k^2 + 1); (B, 2k^2 + 3k); (C, 2k - 3)\}$ existe. (0.5pt)
- On désigne par G le barycentre des points pondérés $G = \{(A, 2); (B, -4); (C, -1)\}$.
 - Déterminer et construire le point G . (0.5pt)
 - Montrer que les points C, D et G sont alignés. (0.5pt)
- Montrer que les droites (AF) , (BE) et (CD) sont concourantes. (0.5pt)

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES

[04 POINTS]

Situation :

L'entreprise **BOSS**, spécialisée dans le marketing et l'aménagement des bureaux, prépare son installation dans un nouveau siège social. Pour accélérer les travaux, Le responsable marketing a décidé d'embaucher des stagiaires pour les opérations de terrain et confie à l'ingénieur menuisier **NGUANA** l'aménagement de deux Zones : Z_1 et Z_2 avec du bois d'ébène qui coute **5000F** le m^2 .

Les stagiaires sont payés **6 000 FCFA** par jour pour les hommes et **7 000 FCFA** par jour pour les femmes. Le nombres d'hommes et de femmes correspond aux longueurs des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle de périmètre **24 m** et d'aire **24 m²**. Le responsable veut recruter plus d'hommes que de femmes.

La zone Z_1 est la partie comprise entre un rectangle $ABCD$ et le cercle circonscrit à ce rectangle. Les sommets de ce rectangle sont les points images des solutions sur $] -\pi; \pi]$ de l'équation trigonométrique : $\cos(4x) - 5\cos(2x) + 3 = 0$ dans un repère où l'unité est **20 m**. L'ingénieur **NGUANA** doit faire le devis de ces travaux en excluant sa main d'œuvre. Le coût du bois est proportionnel à l'aire de Z_1 .

La Zone Z_2 quant à elle est constitué de **10 bandes**. Dans le plan muni d'un repère orthonormé (o, \vec{i}, \vec{j}) , on considère les points $E(1; -3)$ et $F(1; 3)$. Chaque bande est représentée par l'ensemble (Σ) de points M tel que $-5 \leq \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF} \leq 16$. **NB :** On prendra $\pi = 3,1$ et $\sqrt{3} = 1,7$

Tâches :

- Le montant de **110 000 FCFA** pourra-t-il suffire pour payer les stagiaires recrutés pour une journée ? (1.5 Pts)
- Déterminer le cout du bois d'ébène de la zone Z_1 . (1.5 Pts)
- Déterminer le cout du bois d'ébène de la zone Z_2 . (1.5 Pts)

Présentation : 0.5 point