Collège Jean TABI d'Etoudi
Département de maths
BP 4174-Yaoundé
Tél/Fax : 222.21.60.53
N/Réf : CJT/25-26/DH/HVN/CSM

Année scolaire 2025-2026
Période n°2
Classe : Terminale C
Durée : 4H
Coef. : 7

DEVOIR HARMONISE DE MATHEMATIQUES DU 24/11/2025

Partie A : EVALUATION DES RESSOURCES (15 points)

Exercice 1 : (5 points)

Soit h la fonction définie sur $]-1;1[$ par : $h(x) = -1 - \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

1. Montrer que h réalise une bijection de $]-1;1[$ sur $\mathbb{R}$. (0,5 pt)
2. Montrer que h^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $(h^{-1})'(x) = \frac{-2}{\pi(1+(x+1)^2)}$. (1 pt)

Soit la fonction H telle que pour tout x de $\mathbb{R}^*$: $H(x) = h^{-1}(x-1) + h^{-1}\left(\frac{1}{x} - 1\right)$.

3. Montrer que H est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et déterminer $H'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$. (1 pt)
4. Calculer $H(1)$ et $H(-1)$. En déduire que : $H(x) = \begin{cases} -1 \text{ si } x > 0 \\ 1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$. (1 pt)

Soit v, la fonction définie pour tout entier naturel non nul n, par : $v(n) = \sum_{k=1}^{n}\left(h^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) + h^{-1}\left(-\frac{1}{k}\right)\right)$

5. Donner la valeur de $H\left(1+\frac{1}{k}\right)$ et en déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}^* : h^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) + h^{-1}\left(-\frac{1}{k+1}\right) = -1$. (0,5 pt)
6. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $v(n) = n - h^{-1}\left(-\frac{1}{n+1}\right)$. (0,5 pt)

   Puis, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v(n)}{n}$. (0,5 pt)

Exercice 2 : (5 points)

E étant un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, dont une base est $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Considérons les vecteurs $\vec{e_1} = \vec{i} - \vec{k}$ et $\vec{e_2} = \vec{j} + \vec{k}$.

f est l'endomorphisme de E tel que : $f(\vec{i}) = \vec{i} + \vec{k}$, $f(\vec{j}) = \vec{j} - \vec{k}$ et $f(\vec{k}) = 2\vec{k}$.

Soient $E_1 = \{\vec{u} \in E / f(\vec{u}) = \vec{u}\}$ et $E_\lambda = \{\vec{u} \in E / f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}\}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. a) Montrer que E_1 est un sous espace vectoriel de E dont précisera une base. (1,25 pt)

   On admet dans la suite qu'il en est de même pour E_λ, pour tout $\lambda \in \mathbb{R} - \{1\}$.

   b) Démontrer qu'il existe une seule valeur de λ pour laquelle E_λ est une droite vectorielle. (1 pt)
2. Montrer que $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{k})$ est une base de E. (0,75 pt)
3. On considère l'endomorphisme u de E défini par : $u = f - 2Id_E$.

   a) Ecrire la matrice de u dans la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{k})$. (0,75 pt)

   b) Déterminer $\ker u$ et $\operatorname{Im} u$. (1 pt)

   c) u est-il un automorphisme ? Justifiez votre réponse. (0,25 pt)

Exercice 3 : (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Soit le nombre complexe $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Ecrire z sous sa forme exponentielle. (0,5 pt)
2. Ecrire sous forme algébrique z^3 et z^6. (0,5 pt)

3. Pour tout entier naturel n, on note $\mathrm{M_n}$ le point d'affixe z^n.
   a) Montrer que pour tout entiers naturels p et q, on a :
      $\mathrm{p} \equiv \mathrm{q}[6]$ si et seulement si $\mathrm{M_p} = \mathrm{M_q}$. (0,5 pt)
   b) Montrer que $\mathrm{M_nM_{n+1}} = \mathrm{OM_n} = 1$, pour tout entier naturels n. (0,75 pt)
   c) Déduire des questions précédentes, le lieu géométrique E des points $\mathrm{M_n}$ lorsque n décrit $\mathbb{N}$. (0,75 pt)
   d) Déterminer l'ensemble F des entiers naturels n tels que $\mathrm{M_n}$ appartient à la droite de repère $(O, \vec{u})$. (0,5 pt)
4. Soit n un entier naturel, on pose $A_n = z^n + (\bar{z})^n$.
   a) Montrer que $A_n = 2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$. (0,5 pt)
   b) Déterminer l'ensemble G des entiers naturels n tels que $A_n \in \mathbb{Z}$. (1 pt)

<u>Partie B</u> : EVALUATION DES COMPETENCES (5 points)

<u>**Situation**</u> :

M FOTSO a acquis un terrain pour y bâtir une salle de fêtes ultramoderne, pouvant accueillir 1000 personnes. Passionné de mathématiques, il a fait appel à un architecte à qui il demande de s'inspirer de concepts mathématiques pour la conception du bâtiment ainsi que son aménagement. Ce dernier décide donc de représenter le plan de la salle dans un repère orthonormé complexe (O ; u, v). Les différents points clés de la construction (entrées, piliers de soutien, scène, etc…) sont modélisés par des points, dont les affixes vérifient des propriétés bien précises.

La stabilité du bâtiment est assurée par trois piliers principaux notés A, B et C, lesquels, doivent former un triangle rectangle pour que la structure soit en parfait équilibre. L'architecte se propose à cet effet de les placer à des points dont les affixes (parmi lesquelles une est réelle) vérifient l'équation :
$z^3 + (1-6i)z^2 + (11-12i)z + 51 + 18i = 0$.

Une fois la salle bâtie, des agents d'entretien (constitués d'hommes et de femmes) doivent être recrutés pour nettoyer les 1000 fauteuils fixés dans la salle de sorte que chaque femme en nettoie 20 et chaque homme en nettoie 25 la veille des jours de spectacle. Ces employés recevront un salaire journalier de 6000 Francs par femme et 8000 Francs par homme. M. FOTSO souhaite minimiser ses dépenses en recrutant plus d'hommes que de femmes.

Chaque place assise doit être numérotée, et un système de sécurité (pour les invités VIP) devra être créé tel qu'une place de numéro N soit considérée comme sécurisée si $15N \equiv 9[21]$. M. FOTSO souhaite qu'il y ait un minimum de 140 places sécurisées.

<u>**Tâches**</u> :

1- Le choix fait par l'architecte garantit-il la stabilité de la salle de fête ? (1,5 pt)
2- Combien d'hommes et de femmes doit recruter M. FOTSO pour minimiser la dépense relative à l'entretien des fauteuils ? (1,5 pt)
3- Le système de sécurité mis sur pied garantit-il le minimum de places VIP souhaité ? (1,5 pt)

Présentation : 0,5 point