

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Partie A : Evaluation des ressources 15pts

Exercice 1 : 2points

Répondre par vrai ou faux, tout résultat non justifié clairement ne sera pas accepté.

- $|2+i| = \sqrt{3}$.
- $\overline{\left(\frac{1+i}{1-i}\right)} = \frac{1+i}{1-i}$.
- La forme algébrique de $\frac{1}{3+2i}$ est $\frac{3-2i}{13}$.
- Le nombre complexe $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, vérifie $1 + j + j^2 = 0$.

Exercice 2 : 5points

- a. Calculer $i^2; i^3; i^4; i^8$. 1pt
- b. Soit la fonction f définie sur \mathbb{N} par $f(n) = i^n$. Déduire que f est périodique de période 4. 0,5pt
- 2) On pose $S_n = 1 + i + i^2 + \dots + i^n$.
 - Calculer $S_1; S_2; S_3$. 1,5pt
 - Vérifiez que $S_n - iS_n = 1 - i^{n+1}$. Déduisez-en S_n . 2pts

Exercice 3 : 3points

On considère le polynôme complexes défini par $P(z) = (z^2 + 3z)^2 + (3z + 5)^2$.

1- Démontrer que $P(z) = [z^2 + 3(1+i)z + 5i][z^2 + 3(1-i)z - 5i]$. 1pt

2- Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 + 3(1+i)z + 5i = 0$. 1pt

3- En déduire les solutions de $P(z) = 0$. 1pt

Exercice 4 : 5 points

On considère le polynôme : $P(z) = 2z^4 - 6z^3 + 9z^2 - 6z + 2$

- Vérifier que 0 n'est pas une racine de P . 0,5pt
- Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$.
 - Exprimer $P(\bar{z}_0)$ et $P\left(\frac{1}{z_0}\right)$ en fonction de $P(z_0)$. 1pt
 - En supposant que z_0 est une racine de P , déduire de ce qui précède qu'il en est aussi de même pour \bar{z}_0 et $\frac{1}{z_0}$. 1pt.
 - Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : (E) $2z^2 - 6z + 5 = 0$. 1pt
 - Montrer que : $\forall z \in \mathbb{C}^* \ P(z) = z^2 \left[2\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 6\left(z + \frac{1}{z}\right) + 5 \right]$. 0,5pt
 - Déduire des questions précédentes toutes les racines de P dans \mathbb{C} . 1pt

Partie B : Evaluation des compétences 5pts

LUC a acquis deux terrains rectangulaire.

Sur le terrain 1, dont les dimensions (en mètre) sont la partie réelle et la partie imaginaire de la solution z de l'équation : $(10 + 30i)z - 20i\bar{z} = -150 + 200i$ où $z = x + iy$, il plante une variété de cacao qui produits en moyenne 200kg tous les 0,25 hectare dont le kilogramme est actuellement vendus à 6800 F.

Sur le terrain 2, dont les dimensions (en décamètres) sont la partie réelle et la partie imaginaire de la solution z de l'équation : $|z| - \bar{z} = 1 + 3i$ où $z = x + iy$, il décide sécuriser en l'entourant du fil barbelé dont le rouleau de 5m coutre 1500 et le technicien demande 20000 F pour sa main d'œuvre. En vue de répartir équitablement son héritage à ses trois enfants ANNE, JEAN et JOEL après son décès, il émet le vœu que ses maisons et ses voitures se répartissent selon les solutions de l'équation $z^3 - (4 + 10i)z^2 + (-28 + 29i)z + 21i + 51 = 0$ où $z = x + iy$ avec x et y qui désignent respectivement pour chaque solution le nombre de maisons et de voitures de chaque enfant ; Pour éviter les conflits de succession, il précise que ANNE n'a pas droit à la maison et que JOEL l'aîné a plus de maisons que JEAN.

Taches

1. Combien obtiendra LUC de la vente de son cacao ?	1,5pt
2. Combien dépensera LUC pour sécuriser le terrain 2 ?	1,5pt
3. De combien de maison et de voiture hériteront les enfants de LUC ?	1,5pt

Présentation : 0,5pt

Examinateur : Luc ABOUGNE, PLEG MATHS