DELEGATION DU NORD — *Délégation Régionale du Nord* — ANNÉE SCOLAIRE **2024-2025**

LYCÉE BILINGUE DE NGONG — 1ère C &D

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES — Durée : ……

Examinateur : M. KAKA DAIROU

TRAVAUX DIRIGES SUR LA TRIGONOMETRIE

PARTIE A EVALTION DES RESOURCES

EXERCICE 1

Demontrer les egalites suivantes que $\forall \varphi \in IR$

a) $(\cos\varphi + \sin\varphi)^2 - (\cos\varphi - \sin\varphi)^2 = 4\cos\varphi\sin\varphi$

b) $\cos^4\varphi + \sin^4\varphi = 1 - 2\cos^2\varphi\sin^2\varphi$

c) $\cos^4\varphi - \sin^4\varphi + 2\cos^2\varphi + 4\sin^2\varphi = 3$

d) $\cos^4\varphi - \sin^2\varphi = \cos^4\varphi + 3\cos^2\varphi + 2$

g) $\cos^4\varphi - \sin^4\varphi = \cos 2\varphi$

h) $(\cos\varphi + \sin\varphi)^2 + (\cos\varphi - \sin\varphi)^2 = 2$

i) $\cos^4\varphi + \sin^2\varphi\cos^2\varphi - \cos^4\varphi = 0$

j) $(\sin\varphi - \cos\varphi)(1 - \cos\varphi\sin\varphi) = \sin^3\varphi - \cos^3\varphi$

k) $\frac{2\sin 2\varphi - 2\cos 2\varphi}{1 + 3\sin^2\varphi - \cos 2\varphi} = \frac{2}{5}\left(2 + \frac{1}{\tan\varphi}\right)$ l) $\frac{\sin\varphi}{1+\cos 2\varphi} = \frac{\cos\varphi}{1+\sin 2\varphi}$

m) $\sqrt{1 + \sin(4\varphi)} = |\cos(2\varphi) + \sin(2\varphi)|$

n) $\cos^6\varphi + \sin^6\varphi = 1 - 3\cos^2\varphi\sin^2\varphi$

o) $4\cos^3\varphi = \cos 3\varphi + 3\cos\varphi$

p) $8\cos^4\varphi = 3 + 4\cos 2\varphi + \cos 4\varphi$

q) $4\sin^3\varphi = -\sin 3\varphi + 3\sin\varphi$

r) $8\sin^4\varphi = 3 - 4\sin 2\varphi + \sin 4\varphi$

s) $\cos\varphi\sqrt{1 + \tan^2\varphi} = 1$; u) $\cos 2\varphi = \frac{1 - \tan^2\varphi}{1 + \tan^2\varphi}$

u) $\sin 2\varphi = \frac{2\tan^2\varphi}{1 - \tan^2\varphi}$; v) $\tan 2\varphi = \frac{2\tan^2\varphi}{1 - \tan^2\varphi}$

w) $\left(1 + \tan\varphi + \frac{1}{\cos\varphi}\right)\left(1 + \tan\varphi - \frac{1}{\cos\varphi}\right) = \tan\varphi$

x) $(1 + \sin\varphi + \cos\varphi)^2 = 2(1 + \sin\varphi)(1 + \cos\varphi)$

EXERCICE 2

1- *Soit* $\phi \in IR$, *démontrer que :* $2\cos^2(\phi) = 1 + \cos(2\phi)$.

2- *En admettant que* $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; *montrer que* $\cos^2\left(\frac{7\pi}{24}\right) = \frac{4+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}$ et $\sin^2\left(\frac{7\pi}{24}\right) = \frac{4-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{8}$

3- *Déduire les valeurs exactes de* $\cos\left(\frac{7\pi}{24}\right)$ *et* $\sin\left(\frac{7\pi}{24}\right)$.

4- *Résoudre dans* IR *l'équation* (E_{11}): $\sqrt{4+\sqrt{2}-\sqrt{6}}\cos(\phi) - \sqrt{4+\sqrt{2}+\sqrt{6}}\sin(\phi) = -\sqrt{2}$.

EXERCICE 3

Pour tout nombre réel η

1- On donne $K(\eta) = (\sqrt{2}+1)\cos^2\left(\frac{3}{2}\eta\right) + (\sqrt{2}-1)\sin^2\left(\frac{3}{2}\eta\right) + 2\sin\left(\frac{3}{2}\eta\right)\cos\left(\frac{3}{2}\eta\right) - \sqrt{2}$

a- Montrer que $K(\eta) = \sin(3\eta) + \cos(3\eta)$.

b- **Déduire** que $\forall \in \eta$, $K(\eta) = \sqrt{2}\cos\left(3\eta - \frac{\pi}{4}\right)$.

2- Résoudre dans $]-\pi ; \pi]$ l'équation (E): $\sin(3\eta) + \cos(3\eta) = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

3- Représenter les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

4- Calculer le périmètre polygone obtenu.

EXERCICE 4

1- *On* considere les expressions suivants : $K(\omega) = \tan(\omega) - \sqrt{2}\cos(\omega)$. $H(y)$: $y^2\sqrt{2} = \sqrt{1 - y^2}$

a- Déterminer la contrainte sur $H(y)$

b- Montrer que résoudre $H(x)$ revient a resoudre l' équation E_0: $2r^2 + r - 1 = 0$

2- On suppose que $\omega \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

a- Montrer que $K(\omega)$ est équivaut a $A(\omega) = \sin(\omega) - \sqrt{2}\cos^2(\omega)$

b- Montrer que $A(\omega)$ est équivaut a $H(y)$

c- Montrer que $K(\omega) = 0$ est equivaut a $H(y)$

d- Résoudre dans IR l'équation E_0 puis déduire la solution de l'équation $H(y) = 0$

3- Résoudre alors l'équation $K(\omega) = 0$ dans $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ puis placer les images des solution sur le cercle trigonométrie

EXERCICE5 .... 4,25pts

On considère l'équation (E): $[4\mathcal{C}os^2(\eta) - 2\sqrt{6}\mathcal{C}os(\eta) + 1][2\sqrt{3}\mathcal{C}os(2\eta) - \sqrt{3}\mathcal{C}os(\eta) + 3sin(\eta)] = \mathcal{O}$. dans IR

1- Vérifier que : $\mathcal{C}os\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ est solution de (E_0): $4y^2 - 2\sqrt{6}y + 1 = \mathcal{O}$, puis déduire l'autre solution

2- Déduire la résolution dans IR de l'équation (E_0): $4\mathcal{C}os^2(\eta) - 2\sqrt{6}\cos(\eta) - 3 = \mathcal{O}$.

3- Montrer que $\sqrt{3}\mathcal{C}os(\eta) - 3sin(\eta) = p\mathcal{C}os(\eta + \phi)$; $(p;\phi) \in IR^2$.

4- Déduire la résolution dans IR de l'équation (E_1): $2\sqrt{3}\mathcal{C}os(2\eta) - \sqrt{3}\mathcal{C}os(\eta) + 3sin(\eta) = \mathcal{O}$

5- Déduire les solutions dans IR de l'équation (E).

EXERCICE5 ....

On suppose que $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$; $\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ et que $\frac{\pi}{8} = 2 \times \frac{\pi}{16}$

1- Démontrer que : $2\cos(\varpi) = 1 + \sin(2\varpi)$

2- Calculer la valeur exacte de $\cos^2\left(\frac{\pi}{16}\right)$ et $\sin^2\left(\frac{\pi}{16}\right)$ *et déduire* $\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{16}\right)$.

3- Soit $G = bar\left\{\left(A, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cos(x)\right); \left(B, \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\sin(x)\right); \left(C, -\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)\right\}$ et on pose

$A(x) = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cos(x) + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\sin(x)$

a- Déterminer $(\lambda, \phi) \in IR$ *tels que* $A(x) = \lambda\cos(7x + \phi)$

b- Résoudre dans $[-\pi;\pi]$ l'équation $A(x) - \sqrt{2-\sqrt{2}} = 0$

c- Déterminer la valeur de x pour lequel G existe.

4- Pour $x = \frac{\pi}{16}$ montrer que $G = bar\left\{\left(A, 2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right); \left(B, 2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right); \left(C, -2\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)\right\}$

EXERCICE6 ....

Pour tout nombre réel ω

1- On donne $K(\eta) = (\sqrt{2}+1)cos^2\left(\frac{3}{2}\eta\right) + (\sqrt{2}-1)sin^2\left(\frac{3}{2}\eta\right) + 2\,sin\left(\frac{3}{2}\eta\right)cos\left(\frac{3}{2}\eta\right) - \sqrt{2}$

a- Montrer que $K(\eta) = \sin(3\eta) + \cos(3\eta)$.

b- **Déduire** que $\forall \in \eta$, $K(\eta) = \sqrt{2}\cos\left(3\eta - \frac{\pi}{4}\right)$.

2- Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ l'équation (E): $\sin(3\eta) + \cos(3\eta) = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

a- Représenter les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

b- Calculer le périmètre polygone obtenu.

EXERCICE7 ....

1- On pose $A(\eta) = \cos^4(\eta) - \sin^4(\eta)$ *et* $\forall \eta \neq k\frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$ $B(\eta) = \frac{\sin(5\eta)}{\sin(\eta)} - \frac{\cos(5\eta)}{\cos(\eta)}$

a- Montrer que $A(\eta) = \cos(2\eta)$ et que $B(\eta) = 4\cos(2\eta)$

b- Résoudre l'équation $B(\eta) - 3A(\eta) + \sin(2\eta) = \sqrt{3}$ dans $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$

2- Démontrer que $\tan(2\vartheta) = \frac{2tan(\vartheta)}{1-tan^2(\vartheta)}$

a- En remarquant que $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$, Calculer $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$

b- Résoudre l'équation (S): $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ \frac{x}{y} = \sqrt{2} - 1 \end{cases}$.

c- **Déduire que** $cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et que $sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

3- Résoudre dans IR L'équation (ψ): $\sqrt{2-\sqrt{2}}\,cos(x) + \sqrt{2+\sqrt{2}}\,sin(x) = \sqrt{2}$

EXERCICE8

1- **On suppose que** $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$; $\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ et que $\frac{\pi}{8} = 2 \times \frac{\pi}{16}$

a- Démontrer que $2\cos(\varpi) = 1 + \sin(2\varpi)$

b- Calculer la valeur exacte de $cos^2\left(\frac{\pi}{16}\right)$ *et* $sin^2\left(\frac{\pi}{16}\right)$ *et déduire* $\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{16}\right)$.

2- Soit $G = \text{bar}\left\{\left(A, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cos(x)\right); \left(B, \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\sin(x)\right); \left(C, -\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)\right\}$ et on pose

$A(x)=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cos(x) + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\sin(x)$

a- Déterminer $(\lambda, \phi) \in IR$ *tels que* $A(x) = \lambda\cos(x+\phi)$

b- Résoudre dans $[-\pi;\pi]$ **l'équation** $A(x) - \sqrt{2-\sqrt{2}} = 0$

c- Déterminer la valeur de x pour lequel **G** existe.

3- **Pour** $x = \frac{\pi}{16}$ **montrer que** $G = \text{bar}\left\{\left(A, 2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right); \left(B, 2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right); \left(C, -2\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)\right\}$

EXERCICE9

Soit l'équation $(E_{22}) : 4\lambda^2 - (10-2\sqrt{2})\lambda - 5\sqrt{2} = 0$

1- Montrer que: E_{22} admet deux solutions distinctes.

2- Montrer que $\frac{5}{2}$ est solution de **(E)** puis déduire sans résoudre l'équation l'autre solution

3- On considère sur $]-\pi ; \pi]$ l'équation $(E_{22}) : 2\cos(4x) - (10-2\sqrt{2})\cos(2x) + 2 - 5\sqrt{2} = 0$

a- En posant $X = \cos(2x)$, montrer que E_{22} et E_{11} sont équivalentes.

b- Résoudre **(E),** puis placer ses solutions sur le cercle trigonométrique

EXERCICE10

1- Pour tout $\varphi \in IR$, Montrer : $\frac{1}{\cos^2(\varphi)} = 1 + \tan^2(\varphi)$.

2- Montrer que pour tout $\varphi \in IR$, $\sqrt{3}\cos(2\varphi) + \sin(2\varphi) = 4\cos^2\left(\varphi + \frac{\pi}{12}\right) - 2$.

3- Déduire que pour tout $\varphi = 0$, $\frac{1}{1+\tan^2\left(\frac{\pi}{12}\right)} = 2 + \sqrt{3}$ et que $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$.

4- On pose $\forall\, \varphi \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\setminus \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$, $K(\varphi) = \frac{\cos(\varphi)+\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)-\sin(\varphi)}$

a- Montrer que, $K(\varphi) = \tan\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)$, puis retrouver la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$

5- **a**. Montrer que $\forall\, \varphi \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\setminus \left\{-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right\}$ $K(\varphi) = \frac{1+\sin(2\varphi)}{\cos(2\varphi)}$.

b. Déduire la résolution dans $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ de l'équation (E): $\sqrt{3}\cos(2\varphi) = \sin(2\varphi) + 1$.

c. Résoudre dans $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ l'équation (E_{24}): $(2-\sqrt{3})\sin(2\varphi) + \cos(2\varphi) = 1$.

EXERCICE11

On considère les expressions $X = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $Y = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

1- Montrer que $Y = \frac{1}{4}$.

2- Montrer que pour tout réels, $\sin(\eta) + \cos(\eta) = \sqrt{2}\cos\left(\eta - \frac{\pi}{4}\right)$ et Déduire que $X = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

3- **a**-vérifier que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ *et* $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ sont les solutions l'équation $(E_{33}) : x^2 - x\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{1}{4} = 0$.

b- Résoudre (E_{33}) puis déduire les valeurs de : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ *et* $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$. Et Vérifier que $\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$.

4- Transformer en $p\cos(2\eta + \psi)$ *l'expression* $K(\eta) = (2-\sqrt{3})\sin(2\eta) + \cos(2\eta)$.

5- Montrons que $K(\eta) = 2p\cos^2\left(\eta - \frac{\pi}{24}\right) - 1$

EXERCICE12

On souhaite déterminer les valeurs exactes de $p = \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{13\pi}{9}\right)$; $q = \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{7\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{13\pi}{9}\right)$

$r = \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{7\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{13\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{13\pi}{9}\right)$ .On pose $a = \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$; $b = \cos\left(7\frac{\pi}{9}\right)$; $c = \cos\left(\frac{13\pi}{9}\right)$

1- Résoudre dans $[0; [$ l'équation $\cos(3x) = \frac{1}{2}$.

2- Montrer que $c(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$.

3.1. Déduire que les réels **a, b et c** sont solutions les unique solutions de l'équation $8X^3 - 6X - 1 = 0$.

3.2. Déduire de la question 3-1 que $8X^3 - 6X - 1 = (X-a)(X-b)(X-c)$.

4- Développer $8(X-a)(X-b)(X-c)$ *et* déduire les valeurs de **p ; q et r.**

EXERCICE13

Soit pour tout $\phi \in IR$ $K(\phi) = \mathcal{C}os^2(\phi) + \sqrt{3}\,\mathcal{C}os(\phi)\,\mathrm{Sin}(x) + 3\,\mathrm{Sin}^2\phi - 4 = \mathcal{O}$

1- Montrer que pour tout $\in IR$, $K(\phi) = 2\,\mathrm{Sin}\,\phi\,\mathcal{C}os\left(\phi + \frac{\pi}{6}\right)$.
2- Montrer que $2\sin p\cos q = \sin(p+q) + \sin(p-q)$.
3- Déduire que : $K(\phi) = \mathrm{Sin}\left(2\phi + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}$.
4- Calculer $K\left(\frac{\pi}{12}\right)$ puis deduire la valeur exacte de $\mathcal{C}os\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
5- Résoudre dans $[-\pi ; \pi[$ l'équation $2K(\phi) = -1$.

EXERCICE14

On considère l'équation(E_I): $-2\mathcal{C}os^2(\eta) + (\sqrt{2} - \sqrt{3})\,\mathrm{Sin}(\eta) - \frac{\sqrt{6}}{2} + 2 = 0$.

1- Montrer que $\sqrt{3} + \sqrt{2} = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$.
2- Résoudre dans IR l'équation $4\lambda^2 + 2(\sqrt{2} - \sqrt{3})\lambda - \sqrt{6} = 0$
3- Montrer que l'équation (E_I) est équivalente à (E_{II}) : $4\mathrm{Sin}^2(\eta) + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})\,\mathrm{Sin}(\eta) - \sqrt{6} = 0$.
4- En déduire sur dans l'intervalle $[0;\ 2\pi[$ les solutions de l'équation(E_I).
5- Placer les points images des solutions de l'équation (E_I) sur le cercle trigonométrique. **Unité : 2 cm.**
6- Quelle est la nature exacte du polygone obtenu ? Justifier.

EXERCICE 15 (EXTRAIT PROBATOIRE « C » 2003) :

1. Déterminer les valeurs exactes du $\mathcal{C}os\left(\frac{11\pi}{6}\right)$et $sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)$
2. En déduire que $\mathcal{C}os^2\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$ *et* $sin^2\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$
3. Déterminer les valeurs exactes de $\mathcal{C}os\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ en justifiant les réponses
4. Résoudre dans l'intervalle $[0 ; 2\pi]$ l'équation : $\sqrt{2-\sqrt{3}}\,sin(\omega) + \sqrt{2+\sqrt{3}}\,\mathcal{C}os(\omega) = \sqrt{2}$

EXERCICE 16 (EXTRAIT PROBATOIRE « C » 2004)

On considère dans $[0 ; 2\pi]$ les équations : (E) : $\mathcal{C}(\eta)sin(\eta) + \mathcal{C}os^2(\eta) = \mathcal{C}os(2\eta)$ et à

(E') : $sin^2(\eta) + sin(\eta)\mathcal{C}os(\eta) = \mathcal{O}$

1. a) Montrer que les équations (E) et (E') sont équivalentes dans $[0 ; 2\pi]$

 b) Résoudre dans $[0 ; 2\pi]$ l'équation (E).

2. Placer sur le cercle trigonométrique les points images des solutions de cette équation. On prendra 3cm comme unité de longueur.

EXERCICE 17 (EXTRAIT PROBATOIRE « C » 2005)

1. Ecrire $(1+\sqrt{3})^2$ sous la forme a + b$\sqrt{3}$.
2. Résoudre dans IR l'inéquation (I') : $x^2 + (1 - \sqrt{3})x - \sqrt{3} < 0$.
3. Déduire dans $]-\pi ; \pi[$, l'ensemble des solutions de l'inéquation (I) : $\tan^2\alpha + (1 - \sqrt{3})\tan\alpha - \sqrt{3} < 0$.

EXERCICE 18 (EXTRAIT PROBATOIRE « C » 2007)

1. Résoudre de IR×IR le système $\begin{cases} 2x + 5y = -4 \\ 3x - 2y = 3,5 \end{cases}$.
2. En déduire dans $[-\pi ; \pi]^2$ les solutions du système $\begin{cases} 2\sin x + 5\cos y = -4 \\ 3\sin x - 2\cos y = 3,5 \end{cases}$

EXERCICE 19 (EXTRAIT PROBATOIRE « C » 2011)

1. Soit θ un nombre réel.
   a. Développer $\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)^2$
   b. En déduire que $\cos^4\theta + \sin^4\theta = \dfrac{1}{2}\left(1+\cos^2 2\theta\right)$
   c. Resoudre dans $]-\pi,\pi[$ l'équation $\cos^4\theta + \sin^4\theta = \dfrac{5}{8}$

EXERCICE 20 (EXTRAIT PROBATOIRE « C » 2013

I- Montrer que pour tout réels

3. On considère la fonction polynôme p définie pour tout réel x par $p(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$.
   (a) Calculer $p(-1)$; en déduire que $p(x) = (x+1)(ax^2+bx+c)$ où a, b et c sont des réels que l'on déterminera. [1pt]
   (b) Résoudre alors dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2\sin^3 2x + 5\sin^2 2x + \sin 2x - 2 = 0$. [1,5pt]

EXERCICE 21 (EXTRAIT PROBATOIRE « C » 2014) :

1- *Calculer* $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2$ *puis resoudre dans IR² le système* $\begin{cases} a+b = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ ab = \frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$

2) *En déduire dans* $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\times \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ *les solutions du système* $\begin{cases} 2\sin x + 2\sin y = \sqrt{3}+1 \\ 4\sin x\sin y = \sqrt{3} \end{cases}$

EXERCICE 22 (EXTRAIT PROBATOIRE « C » 2015) :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $4x^2 - 2x - 1 = 0$.

   Pour toute la suite, on pose $x = \cos\dfrac{\pi}{5}$ et $y = \sin\dfrac{\pi}{5}$.
2. Exprimer $\sin\dfrac{2\pi}{5}$ en fonction de x et y.
3. (a) Justifier que $\cos\dfrac{2\pi}{5} = 1 - 2y^2 = 2x^2 - 1$.
   (b) En déduire que $\sin\dfrac{3\pi}{5} = y\left(4x^2 - 1\right)$.
4. (a) Justifier que $\sin\dfrac{2\pi}{5} = \sin\dfrac{3\pi}{5}$.
   (b) En déduire que : $4x^2 - 2x - 1 = 0$.
   (c) Déduire alors que : $\cos\dfrac{\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$ et $\sin\dfrac{\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

EXERCICE 24 (EXTRAIT PROBATOIRE « C » 2017

On considère l'équation (E) : $2\sqrt{2}\cos^2 x + (2-\sqrt{2})\cos x - 1 = 0$ et le polynôme $P(x) = 2\sqrt{2}x^2 + (2-\sqrt{2})x - 1$ de variable réelle x.

1- Calculer $P(\frac{1}{2})$.
2- Vérifier que le polynôme P(x) admet 2 racines distinctes.
3- En utilisant la somme ou le produit des racines, déterminer l'autre racine.
4- En déduire dans l'intervalle $[0;2\pi[$, l'ensemble solutions de l'équation (E).
5- Placer les points images des solutions de (E) sur un cercle trigonométrique.

EXERCICE 25 (EXTRAIT PROBATOIRE « C » 2021

1- Verifier que : $\left(\sqrt{3}+1\right)^2 = 4 - 2\sqrt{3}$
2- Résoudre dans IR l'équation : $2y^2 + \left(1+\sqrt{3}\right)y - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$.
3- En déduire sur dans $[0;2\pi[$ les solutions de l'équation (E_1): $2\cos^2 x + \left(1+\sqrt{3}\right)\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

EXERCICE 26 (EXTRAIT PROBATOIRE « C » 2022

1. Résoudre dans $]-\pi;\pi[$ l'équation $A\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

2. Exprimer $Cos^2t + \tan^2t + sin^2t$ en fonction de $Cost$.

3. Déterminer A et φ s que $\sqrt{3}Cos(2t) - \sin(2t) = ACos(2t - \varphi)$

EXERCICE 27(EXTRAIT PROBATOIRE « C » 2023

1- Calculer $(\sqrt{2}+1)^2$

2- Résoudre dans IR l'équation : $4x^2 + 2(\sqrt{3} - 1)\,x - \sqrt{2} = 0$.

3- En déduire sur dans$]-\pi;\pi]$ les solutions de l'équation (E_1): $4\sin^2x + 2(\sqrt{3} - 1)\sin x - \sqrt{2} = 0$

4- Placer les points A, B, C et D. Images respectives des réels $-\frac{3\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{6}$ sur le cercle trigonométrique

5- Calculer l'aire du quadrilatère ABCD

EXERCICE 28(EXTRAIT PROBATOIRE « D » 2021

1- Démontrer que : $Cos\left(\frac{\pi}{12}\right) Cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + sin\left(\frac{\pi}{12}\right) sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}Cos\left(\frac{\pi}{12}\right) Cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) - sin\left(\frac{\pi}{12}\right) sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 0$

2- Déduire que la valeur exacte de $Cos\left(\frac{\pi}{12}\right) Cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1}{4}$

3- Résoudre dans $[0; 2\pi[$l'equation $Cos\left(\frac{\pi}{12}\right) Cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1}{4}$

4- Déduire dans $]0; 2\pi]$ $Cos(x) - Cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) > 0$

EXERCICE 29(EXTRAIT PROBATOIRE « D » 2022

Soit P le polynôme défini par : $P(x) = -2x^2 + 3x + 2$.

1. a. Déterminer la forme canonique de $P(x)$.
   b. En déduire que 2 et -1/2 sont les solutions dans R de l'équation $P(x) = 0$.

2. On considère l'équation (E) : $\cos(2x) + 3\sin(x) + 1 = 0$ et l'inéquation (I) : $\cos(2x) + 3\sin(x) + 1 < 0$
   a. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(2x) + 3\sin(x) + 1 = -2\sin^2(x) + 3\sin(x) + 2$.
   b. Résoudre alors dans R, l'équation (E).

3. Résoudre dans $[0;2\pi[$, l'inéquation (I).

EXERCICE 30(EXTRAIT PROBATOIRE « D » 2023

On considère l'équation (E): $(2cos^2x - (2+\sqrt{2})\,Cos\,x + \sqrt{2})(\sqrt{3}\,Cos\,x + \sin x - 1) = 0$ dans IR

1- Vérifier que 1 et $\frac{\sqrt{2}}{2}$ sont les solutions de l'équation : (E_{24}): $x^2 - \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)x + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

2- Déduire la résolution dans IR de l'équation (E_0) $2Cos^2x - (2 + \sqrt{2})Cos\,x + \sqrt{2} = 0$

3- Montrer que : $\sqrt{3}Cos(x) + sin(x) = 2Cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

4- Déduire la résolution dans IR de l'équation $\sqrt{3}\,Cos\,x + \sin x - 1 = 0$

5- Déduire les solutions dans IR de l'équation (E)

EXERCICE 31(EXTRAIT PROBATOIRE « D » 2024

1- Démontrer que pour tous réel x, on a : $-2 + C(x) < 0$

2- Démontrer que pour tous réel x, on a : $-3C(x) - 2sin^2x = (1 + 2Cosx)(-2 + Cos\,x)$

3- **Résoudre dans** $[0; [$ **l'equation** $-3Cos(x) - 2sin^2x = 0$

4- **Résoudre dans** $[0; [$ **l'equation** $-3Cos(x) - 2sin^2x > 0$

EXERCICE 31

On donne $Cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ et l'équation (E) : $\frac{2}{1+\tan^2x} + (1-\sqrt{2})Cos\,x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

1- Sachant que $2\times\frac{3\pi}{10} = \frac{3\pi}{5}$ Calculer les valeurs exactes de $\cos\frac{3\pi}{10}$ *et* $\sin\frac{3\pi}{10}$

2- Démontrer les égalités suivantes : $(1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$; $\frac{1}{1+\tan^2x} = Cos^2x$

3- Montrer que (E) est équivalente à : $2Cos^2x + (1-\sqrt{2})Cos\,x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

4- Résoudre (E) et placer les solutions sur le cercle trigonométrique 1

5- Résoudre dans $[0 ; 2\pi]$ l'inéquation : $2Cos^2x + (1-\sqrt{2})Cos\,x - \frac{\sqrt{2}}{2} \geq 0$

EXERCICE 32

1) Sachant que $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$ calculer les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$
2) Sachant que $\frac{\pi}{4}=2\times\frac{\pi}{8}$ calculer les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$
3) On considère $A(x)=\cos x+\sqrt{3}\sin x$
   a) Montrer que $A(x)=\alpha\cos(x+\beta)$ α et β étant des réels à déterminer.
   b) Résoudre dans $[0,2\pi]$ l'équation $A(x)=\sqrt{2}$
4) Soit le polynôme $p(x)=4\sin^2 2x-4(1+\sqrt{3})\sin x.\cos x+\sqrt{3}$
   a) Calculer $(1-\sqrt{3})^2$
   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $4x^2-2(1+\sqrt{3})x+\sqrt{3}=0$
   c) Montrer que $p(x)=4\sin^2 2x-2(1+\sqrt{3})\sin 2x+\sqrt{3}$
   d) En déduire dans $[-\pi,\pi]$ les solutions de l'équation trigonométrique $p(x)=0$
   e) Déduire de tout ce qui précède la résolution de l'inéquation $p(x)\leq 0$ dans $[-\pi,\pi]$.

EXERCICE 33

1) Soit α un nombre réel de l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\cos\alpha=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
   a- Vérifier que $\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$. En déduire la valeur de $\sin\alpha$.
   b- Calculer $\cos 2\alpha$ et en déduire la valeur de α.
2) Soit (E) l'équation $x\in R$, $\left[(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos 2x+(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin 2x\right]^2=4$
   a- Démontrer que l'équation (E) est équivalente à $\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{4}$
   b- Résolvez alors l'équation et placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.
3) Résolvez dans $]-\pi;\pi]$ l'inéquation $\left[(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos 2x+(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin 2x\right]^2\geq 4$

EXERCICE 34

2- On suppose que $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$; et que $\frac{3\pi}{5}=2\times\frac{3\pi}{10}$
   a- Montrer $2\cos^2(x)=1+\cos(2x)$ *et que* $2\sin^2(x)=1-\cos(2x)$. 0,5pt
   b- Calculer la valeur exacte de $\cos^2\left(\frac{3\pi}{10}\right)$ *et* $\sin^2\left(\frac{3\pi}{10}\right)$ *et déduire* $\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)$. 1pt

3- Soit $\mathcal{G}$ un point tels que $\mathcal{G}=bar\left\{\left(A;\sqrt{5-\sqrt{5}}\cos(3x)\right),\left(B;\sqrt{3+\sqrt{5}}\sin(3x)\right);(C.-\sqrt{2})\right\}$ et on pose $A=\sqrt{5-\sqrt{5}}\cos(3x)+\sqrt{3+\sqrt{5}}\sin(3x)$.
   a- Déterminer $(\lambda,\phi)\in IR$ *tels que* $A(x)=\lambda\cos(3x+\phi)$. 1pt
   b- **Résoudre dans** $[0;2\pi]$ **l'équation** $A(x)-\sqrt{2}=0$ 1pt
   c- Déterminer la valeur de x pour lequel G existe. 0,25pt
   d- Pour $x=\frac{\pi}{10}$ montrer que $\mathcal{G}=bar\{(A;5-\sqrt{5}),(B;3+\sqrt{2}),(C,-4)\}$ 0,25pt

EXERCICE 35) UNIQUEMENT PC-

I- Soit l'équation (E) d'inconnu z définie par : $z^2-2(\sin\eta+\cos\eta)z+2\sin(2\eta)=0$. avec $\eta\in IR$
   Montrer que pour tout $\eta\in IR$: $4(\sin\eta+\cos\eta)^2-8\sin 2\eta=[2(\sin\eta-\cos\eta\eta)]^2$
   a- Déduire le discriminant de l'équation ci-dessus
   b- Résoudre alors L'équation (E). on notera **x et y** ces deux solutions.

2- Dans le plan muni du repère $(O;I;J)$, on considère le point $M(x;y)$ tel que $\overrightarrow{OM}=2\cos\eta\vec{i}+\sin\eta\vec{j}$.
   a- Montrer que $M(x;y)$ vérifient l'ensemble (Σ) des poin du plan tels que: $x^2+y^2-4=0$
   b- Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (Σ) puis tracer (Σ) dans $(O;I;J)$,

EXERCICE 36

ABC est un triangle non rectangle. On note $mes\widehat{C} = C$; $mes\widehat{B} = B$ et $mes\widehat{C} = C$

1. Démontrer que $\tan A + \tan B + \tan C = \tan C . \tan B . \tan C$
2. Démontrer que $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\left(\frac{A}{2}\right).\cos\left(\frac{B}{2}\right).\cos\left(\frac{C}{2}\right)$
3. Démontrer que $\cos A . \cos B . \cos C = 1 + 4\sin\left(\frac{A}{2}\right).\sin\left(\frac{B}{2}\right).\sin\left(\frac{C}{2}\right)$
4. Démontrer que $\cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C = 1 - \cos A . \cos B . \cos C$
5. Démontrer que *si* $\cos A = \cos B . \cos C$ alors $\tan A = \tan B + \tan C$
6. Démontrer que $\cos\left(\frac{B+C}{2}\right) = \sin\left(\frac{A}{2}\right)$ et $\tan\left(\frac{B+C}{2}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{A}{2}\right)}$

EXERCICE 37

1. Résoudre l'equation (E): $4x^2 + 2(1-\sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$
2. Déduire la solution de l'inéquation (I) : $\frac{4}{1+\tan^2 x} + 2(1-\sqrt{2})cosx + \sqrt{2}cosx\sqrt{1+tan^2x} = 0$
3. Apres avoir calculer $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$, *résoudre dans IR l'equation* (E_{II}): $4x^2 + 2(\sqrt{3}+\sqrt{2})x + \sqrt{6} = 0$
4. Déduire la solution l'equation (E_I): $-4Sin^2x + 2(\sqrt{3}+\sqrt{2})Cosx + \sqrt{6} = 0$

EXERCICE 38

On considère l'expression réelle E (x) définie par

$$E(x) = \cos^2 3x + 2\sin 3x \cos 3x - \sin^2 3x$$

1. a) Montrer que $E(x) = \cos 6x + \sin 6x$

   b) Montrer que $E(x) = \sqrt{2}\cos\left(6x - \frac{\pi}{4}\right)$

2. a) Résoudre dans IR l'équation $E(x) = -1$

   b) Représenter les images des solutions de cette équation sur un cercle trigonométrique.

EXERCICE 39

On considère l'équation E_{11}: $[Cos(\delta) - \sqrt{3}Sin(\delta) - \sqrt{2}][1 + Cos(2\delta)sin(\delta) - Cos(\delta)sin(2\delta)] = 0$.

1- Montrer que : $Cos(2\delta)sin(\delta) - Cos(\delta)sin(2\delta) = 1 - sin(\delta)$

2- Montrer que : $Cos(\delta) - \sqrt{3}Sin(\delta) - \sqrt{2} = 2Cos\left(\delta + \frac{\pi}{3}\right)$

3- Résoudre dans $[-2\pi ; [$l'équation E_{21} $2Cos\left(\delta + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}$.

4- Résoudre dans $[-2\pi ; [$ l'équation $1 + sin(\delta) = 0$

5- Déduire dans $[-2\pi ; 2\pi[$les solutions de l'inéquation

I_{11} :$[Cos(\delta) - \sqrt{3}Sin(\delta) - \sqrt{2}][1 + Cos(2\delta)sin(\delta) - Cos(\delta)sin(2\delta)] \geqslant 0$

EXERCICE 400

On considère (E): $x \in \mathbb{R}, 8x^3 - 4\sqrt{3}x^2 - 2x + \sqrt{3} = 0$

1. Vérifier que $\frac{1}{2}$ est une solution de (E).
2. Trouver toutes les solutions de (E).
3. Résoudre dans $[0; 2\pi]$, l'équation :

$$(E'): 8sin^3x - 4\sqrt{3}sin^2x - 2sinx + \sqrt{3} = 0.$$

Placer les solutions sur le cercle trigonométrique.

EXERCICE 41

L'équation (E): $3Cos^2(2\vartheta) - Sin^2(2\vartheta) + 1 = 0$.

1- Montrer que l'équation (E) est équivalent à (E') : $cos(4\vartheta) + 1 = 0$.

2- Soit l'équation (E_{2025}) définie par : $]-\pi ; \pi]$ $\left[\frac{1}{2}Cos(\eta) + \frac{\sqrt{3}}{2}sin(\eta) - \frac{1}{2}\right]\left[\frac{1}{2}Cos(\eta) + \frac{\sqrt{3}}{2}sin(\eta) + \frac{1}{2}\right]$

a- Montrer que (E_{2025}) est équivalent a $sin^2\left(\eta + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{4}$

b- Déduire la résolution de $E_{2025} = \frac{1}{2}$ dans $]-\pi ; \pi]$ puis placer les images des solutions sur le cercle trigonométrique

EXERCICE 42

Pour tout nombre réel ψ, On donne $\tan(\psi) = \sqrt{2} - 1$.

1- Montrer que $\tan(2\psi) = \frac{2\tan(\psi)}{1+\tan^2(\psi)}$ puis déduire la valeur exacte de (ψ).

2- Soit l'équation (E_{26}) définie par : $\sqrt{2}\sin^2(\psi) - (\sqrt{2}-2)\cos^2(\psi) = 2\cos(\psi)\sin(\psi)$ dans $]-\pi;\pi]$

a- Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ (E_{26})] puis placer les images des solutions sur le cercle trigonométrique (1 unite=3cm).

b- Donner la nature du quadrilatère obtenu calculer sa surface.

EXERCICE 43

1- Résoudre dans IR les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{3} \\ \sin x + \sin y = \frac{1}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y = \frac{\pi}{4} \\ \tan x + \tan y = -2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{3} \\ \tan x \tan y = -1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{3} \\ \frac{\cos x}{\cos y} = 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \cos 2x = \cos y \\ x - y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ f) $\begin{cases} x - 2y = \frac{\pi}{4} \\ \sin x = \sin y \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = \frac{2\pi}{3} \\ \tan x = \tan y \end{cases}$ d) $\begin{cases} \sin(2x - y) = 0 \\ \cos(x - 2y) = 0 \end{cases}$

2- En remarquant que : $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ et que $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$

a- montrer que : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et : $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

3- On se propose de résoudre l'équation suivante : (E): $\begin{cases} \sin(z) = \sin(z) + \cos(z) - \frac{1}{2} \\ y = z - \frac{\pi}{4} \end{cases}$

a- Montrer que (E) est équivalent à (E') : $2\cos^2(y) - \sqrt{2}\cos(y) - \frac{1}{2} = 0$

b- Résoudre (E') puis déduire les solutions de (E)

EXERCICE 44

Résoudre dans l'intervalle I les inéquations suivantes :

a) $2\sin x \leqslant \sqrt{3}$; $I =]-\pi;\ \pi]$ b) $2\sin x \leqslant -1$; $I =]0;\ 2\pi]$ C) $\tan x \leqslant 1$; $I =]0;\ 2\pi]$

d) $\begin{cases} 2\sin x \leqslant \sqrt{2} \\ 2\sin x + 1 \geqslant 0 \end{cases}$; $I =]0;\ 2\pi]$ e) $\begin{cases} 2\sin x < \sqrt{3} \\ 2\cos x \geqslant 1 \end{cases}$ I = IR) f) $\begin{cases} 2\sin 2x < \sqrt{3} \\ 2\cos 2x \geqslant 1 \end{cases}$; I = IR

g) $\frac{1-2\cos x}{2\sin x - \sqrt{3}} \geqslant 0$; $I =]-\pi;\ \pi]$ h) $\frac{2\cos 2x - 1}{1+2\cos 2x} < 0$; $I =]0;\ 2\pi]$

EXERCICE 45

1. **Déterminer la mesure principale d'un angle orienté dont une mesure est $-\frac{303\pi}{8}$.**
2. **$\forall x \in \mathbb{R}$, démontrer que $\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$.**
3. **a. Déterminer les valeurs exactes de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$ en remarquant que $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$.**

   b. En déduire $\cos^2\left(\frac{7\pi}{24}\right) = \frac{4+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}$ et $\sin^2\left(\frac{7\pi}{24}\right) = \frac{4-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{8}$.

   c. Déterminer en justifiant, les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{24}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{24}\right)$.

   d. Résoudre dans $[0,\ 2\pi[$ l'équation $\sqrt{\frac{4+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}}\cos x + \sqrt{\frac{4-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{8}}\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.
4. **Résoudre dans $]-\pi,\ \pi] \times]-\pi,\ \pi]$ le système $\begin{cases} 2\cos x + 2\sin y = 1 + \sqrt{2} \\ \cos x - \sin y = \frac{1-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$.**

EXERCICE 46

On considère le polynôme Π définie par : $\Pi(x) = 4x^3 - 2(\sqrt{3} + 1 - \sqrt{2})x^2 + (\sqrt{3} - \sqrt{2} - \sqrt{6})x + \frac{\sqrt{6}}{2}$

1. Montrer $\frac{\sqrt{2}}{2}$ est racine de Π.
2. Déterminer les réels **p et q** tels que : $\Pi(x) = \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(4x^2 - px + q)$
3. On suppose à la suite que : $\Pi(x) = x^2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)x + \frac{\sqrt{3}}{4}$
4. Résoudre l'équation $Q(x) = 0$. 4b) Résoudre alors l'équation : $\Pi(x) = 0$.
5. Déduire la résolution de l'équation $4\sin^3\phi - 2(\sqrt{3} + 1 - \sqrt{2})\sin^2\phi + (\sqrt{3} - \sqrt{2} - \sqrt{6})\sin\phi + \frac{\sqrt{6}}{2} = 0$.

EXERCICE 47

Résoudre dans ℝ chacune des équations s

(1) $\cos x - \sin x = \sqrt{2}$;

(2) $\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x - 1 = 0$;

(3) $\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$;

(4) $\sqrt{2}(\cos x + \sin x) = -1$;

(5) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = -1$;

(6) $\sqrt{3}\sin x + 3\cos x = 1$;

(7) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = -\sqrt{2}$;

(8) $3\cos 5x - 4\sin 5x = 3$;

(9) $-6sin^2 5x - 4\sin 5x = 2$;

(10) $sin^2 3x - sin^2 x = 0$;

(11) $\cos 4x + sin^2 x - 2 = 0$;

(12) $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 1$;

a) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$;

b) $\sin 3x = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$;

c) $\sin\left(-x + \frac{3\pi}{2}\right) + \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$;

d) $\cos\left(-x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos 3x = 0$;

e) $-2cos^2 x + \cos x + 6 = 0$;

f) $sin^2 2x - \sqrt{3}\sin 2x + \frac{3}{4} = 0$;

g) $cos^2\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$;

h) $4cos^2 x + 3sin^2 2x = 0$;

i) $2\cos 2x + 4\cos x - 1 = 0$;

j) $\sin 2x - 2\sin x\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$;

k) $3\cos x - \sqrt{3}\sin x + \sqrt{6} = 0$;

l) $\cos 2x - \sin 2x = -1$.

EXERCICE 48

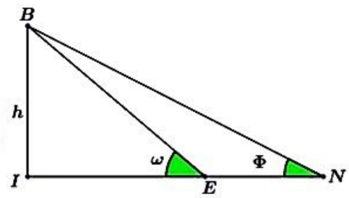
Soit $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{IR}$, *on considere l'expression* $(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{Cos}(3\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{Sin}^4(3\boldsymbol{\theta})$

1- *Montrer que* $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{1} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{Sin}^2(\mathbf{6}\boldsymbol{\theta})$.   [*On rappelle que* $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$]

2- *Résoudre dans*$]-\boldsymbol{\pi};\boldsymbol{\pi}]$ *l'équation* $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{1}$ *puis représente les images des solutions sur le cercle*

ÉVALUATIONS DES COMPETENCES 1 :

M. KAKA est un Ingénieur Topographe qui veut mesurer la hauteur d'une colline pour cela, il dispose un théodolite (Instrument qui de mesure d'un angle). Il effectue deux mesures entre deux points E et N tels que NE = l = 10m (voir fig 1)



Tache 1 : Montrer que la hauteur de la colline est donnée par la formule $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{l} \times \frac{\boldsymbol{tan(\omega)tan(\phi)}}{\boldsymbol{tan(\omega)-tan(\phi)}} = \boldsymbol{l} \times \frac{\mathbf{sin(\omega)\,sin(\phi)}}{\mathbf{sin(\omega-\phi)}}$**)**. Application numérique : $\boldsymbol{\omega} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}$ *et* $\boldsymbol{\phi} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}$.

ÉVALUATIONS DES COMPETENCES 2 :

Après *La mort de* M. MAXWELL, son fils KAKA décide absolument clôturer le terrain d'héritage pour sécuriser. Pour cela doit acheter du fil barbelé pour la clôture de ce terrain, sachant que ***5 mètres*** de fil barbelé coute ***10.000FCFA*** ce terrain a une forme de polygone dont les sommets sont des images des solutions de l'équation $\mathbf{cos(6x) = 1}$ dans $]-\boldsymbol{\pi};\boldsymbol{\pi}]$ Sur le cercle trigonométrique, **I unité est égale à 5m.**

TÂCHE 1 : *Combien dépensera M. KAKA la clôture du terrain de son terrain ?*

ÉVALUATIONS DES COMPETENCES 4 :

M. Maxwell dispose un terrain T₁ a la forme d'un carrée dont les sommets sont les solutions dans $]-\pi,\pi]$ de l'équation $\mathbf{2Cos^2(x) - 1 = 0}$. Il souhaite défricher son terrain le mètre-carré de défrichage est estimé a 2000F

Danse sa maison, **M.KAKA** voudrais clôturer à l'aide d'un fil barbelé de trois rangé l'espace pour l'élevage des dindons. Cette **espace est l'ensemble délimité par les points M vérifiant la relation :** $\begin{cases} x = 5 + 100\sin t\cos t \\ y = 43 - 100\sin^2 t \end{cases}$ $t \in$ **IR** l'unité est le mètre et sachant le fil barbelé coute **1600FCFA le mètre.**

S'agissant de sa piscine, elle a une forme circulaire de rayon **5m.** Le technicien requis pour la tâche lui propose une décoration sur le sol ayant la forme d'un polygone dont les sommets sont situés sur cette portion circulaire et sont images des solutions dans **[0;2π[** de l'équation $(\boldsymbol{E}): -\boldsymbol{4sin^2x} + \mathbf{2}(\sqrt{\mathbf{3}} - \sqrt{\mathbf{2}})\boldsymbol{cos\,x} + \mathbf{4} - \sqrt{\mathbf{6}} = \mathbf{0}$, et dont le mètre carré coûte 3955FCFA

Tache 1 **: Déterminer le budget nécessaire pour la décoration du sol de la piscine.**

TÂCHE **2**: Donner une estimation du coût de défrichage pour ce terrain

TACHE3: Déterminer le budget nécessaire pour la clôture de l'espace réservée pour l'élevage de M.KAKA

RÉSUMÉ SUR LA TRIGONOMÉTRIE

Lignes trigonométriques

- $Cos(x+2k\pi) = Cos(x)$
- $sin(x+2k\pi) = sin(x)$;
- $Cos^2(a) + sin^2(a) = 1$
- $\tan(-x) = \tan(x)$
- $\tan(\pi - x) = -\tan(x)$
- $\tan(\pi + x) = \tan(x)$

- $sin(-x) = sin(x)$
- $sin(x+\pi) = -sin(x)$
- $sin(\pi - x) = sin(x)$
- $sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = Cos(x)$
- $sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = Cos(x)$

- $Cos(-x) = Cos(x)$
- $Cos(x+\pi) = -Cos(x)$
- $Cos(\pi - x) = -Cos(x)$
- $Cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -sin(x)$
- $Cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = sin(x)$

Formules d'addition

- $Cos(a+b) = Cos(a)Cos(b) - sin(a)sin(b)$
- $Cos(a-b) = Cos(a)Cos(b) + sin(a)sin(b)$
- $sin(a+b) = sin(a)Cos(b) - sin(a)sin(b)$
- $sin(a+b) = sin(a)Cos(b) - Cos(a)sin(b)$
- $\tan(a+b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1-\tan(a)\times\tan(b)}$
- $\tan(a-b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1+\tan(a)\times\tan(b)}$

Formules de duplication

- $Cos(2a) = Cos^2(a) - sin^2(a)$
- $sin(2a) = 2Cos(a)sin(a)$
- $\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$

Formules de linearisation

- $2Cos^2(a) = 1 + Cos(2a)$
- $2sin^2(a) = 1 - Cos(2a)$

FORMULE DE TRANSFORMATION DE PRODUIT EN SOMME

- $Cosp\,Cosq = \frac{1}{2}[Cos(p+q) + Cos(p-q)]$;
- $sinp\,sinq = -\frac{1}{2}[Cos(p+q) - Cos(p-q)]$.
- $sinp\,Cosq = \frac{1}{2}[sin(p+q) + sin(p-q)]$.
- $Cosp\,sinq = \frac{1}{2}[sin(p+q) - sin(p-q)]$.

FORMULE DE TRANSFORMATION DE SOMME EN PRODUIT

- $Cosp + Cosq = 2Cos\left(\frac{p+q}{2}\right)Cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $sinp + sinq = 2sin\left(\frac{p+q}{2}\right)Cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.
- $Cosp - Cosq = -2sin\left(\frac{p+q}{2}\right)sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $sinp - sinq = 2sin\left(\frac{p-q}{2}\right)Cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$.

EQUATION DU TYPE : $Cos\,x = Cos\,a$; $sin\,x = sin\,a$ et $tan\,x = tan\,a$

- $Cos\,x = Cos\,a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = -a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

  $sin\,x = sin\,a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \pi - a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

- $\tan x = \tan a \Leftrightarrow x = a + k\pi, \in \mathbb{Z}$, pour x et $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

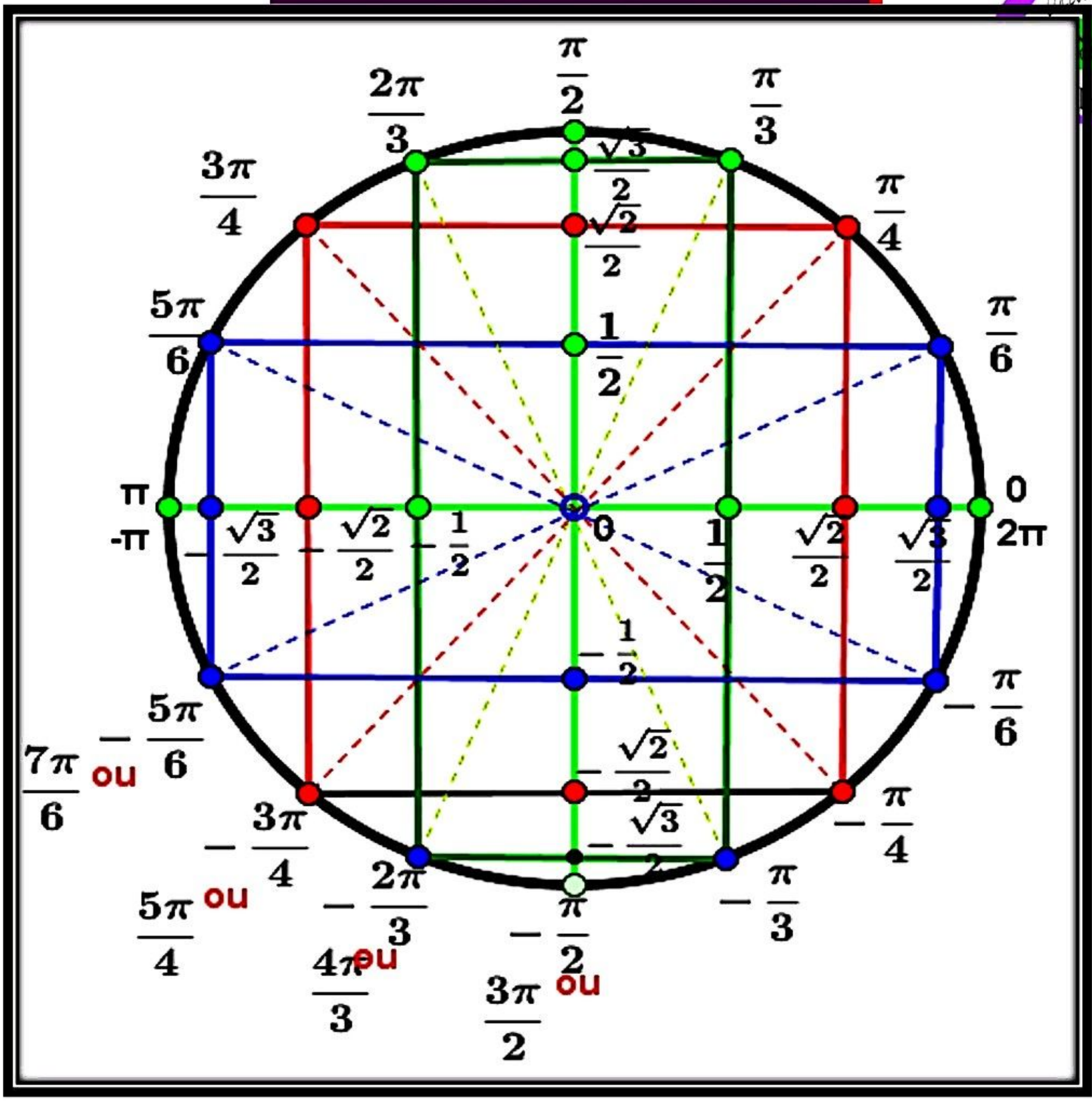
EQUATION DU TYPES : $a\,Cos\,x + b\,sin\,x + c = 0$

Méthode

Pour réduire l'expression : $a\,Cos\,x + b\,sin\,x$, on peut procéder de la façon suivante :

- *On écrit :* $a\,Cos\,x + b\,sin\,x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}cos\,x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}sin\,x\right)$
- *On détermine un nombre réel a tel que :* $\begin{cases} cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$
- *On écrit ensuite :* $a\,Cos\,x + b\,sin\,x = \sqrt{a^2+b^2}\,(cos\alpha\,cosx + sin\alpha\,sinx)$
- *Donc :* $a\,Cos\,x + b\,sin\,x = \sqrt{a^2+b^2}\,cos(x-\alpha)$
- *On résout l'équation :* $\cos(x-\alpha) = \beta$ avec $\beta = \frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE.



soit $\alpha \in \left\{0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right\}$

$$\mathcal{C}os(\alpha) = \frac{\sqrt{\text{nombre de doigts au dessus de } \alpha}}{2}$$

$$sin(\alpha) = \frac{\sqrt{\text{nombre de doigts au dessous de } \alpha}}{2}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sqrt{\text{nombre de doigts au dessous de } \alpha}}{\sqrt{\text{nombre de doigts au dessus de } \alpha}}$$

« Le but n'est pas d'être meilleurs que les autres, mais c'est d'atteindre son objectif »