



EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice1 :

5.75pts

1. On considère le polynôme de variable complexe  $P$  définie par :

$$P(z) = z^3 + (1+i)z^2 + (4-i)z - 6i + 12$$

1.1. Montrer que le polynôme  $P$  admet une racine imaginaire pure  $z_0$  que l'on précisera. 1pt

1.2. Déterminer les complexes  $a, b$  et  $c$  pour que  $P(z) = (z - z_0)(az^2 + bz + c)$ . 1pt

1.3. Résoudre dans l'équation  $P(z) = 0$  1pt

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé  $(o, \vec{u}, \vec{v})$  on donne les points A, B et C d'affixes respectifs :  $z_A = -3i$ ,  $z_B = -2$  et  $z_C = 1 + 2i$

a. placer les points A, B et C dans le repère. 0.75pt

b. écrire sous forme exponentielle le complexe  $Z = \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$  1pt

c. En déduire la nature exacte du triangle ABC 0.5pt

Exercice2 :

5pts

1. On donne  $s_n = \sum_1^n k(k + 1)$

a) Ecrire  $s_n$  sans le symbole  $\sum$ . 0.5pt

b) Calculer  $s_1$  et  $s_2$  0.5pt

c) Démontrer récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, s_n = \frac{n((n+1)(n+2))}{3}$  1pt

2. Soient  $(D) : 4x + 3y - 2 = 0$  et  $(D') : 3x - 4y + 5 = 0$  deux droites du plan

a) Déterminer les coordonnées d'un directeur et d'un point appartenant à chacune de ces droites 1pt

b) Donner la représentation paramétrique de chacune de ces droites 0.5pt

c) Montrer que  $(D)$  et  $(D')$  sont perpendiculaires 0.5pt

d) Déterminer les coordonnées de  $\Omega$  point d'intersection de  $(D)$  et  $(D')$  0.5pt

e) Calculer la distance de  $B(1)$  par rapport à  $(D)$  0.5pt

Exercice3 :

3.5pts

On donne les nombres complexes suivants :  $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ ;  $z_2 = -1 - i$  et  $Z = \frac{z_1}{z_2}$

1. Ecrire  $z_1$  et  $z_2$  sous forme exponentielle. 1pt

2. Ecrire  $Z$  sous forme trigonométrique. 0.75pt

3. Ecrire  $Z$  sous forme algébrique . 0.75pt

4. Déduire la valeur exacte de  $\cos(\frac{7\pi}{12})$  et  $\sin(\frac{7\pi}{12})$ . 0.5pt

Exercice4 : 6.25pts

A) Le plan est rapporté à un repère orthonormé  $(o, \vec{u}, \vec{v})$ . Soit  $M$  un point du plan d'affixe  $z \neq -2i$  et  $Z$  le nombre complexe défini par :

$Z = \frac{z-2+i}{z+2i}$ . on pose  $z = x + iy$  avec  $x$  et  $y$  des nombres réels

1. Montrer que  $IRe(Z) = \frac{x^2+y^2-2x+3y+2}{x^2+(y+2)^2}$  et  $Im(Z) = \frac{-x+2y+4}{x^2+(y+2)^2}$  1pt
  2. Déterminer et construire l'ensemble  $(\mathcal{E})$  des points  $M(z)$  pour que  $Z$  soit un réel 0.75pt
  3. Déterminer et construire l'ensemble  $(\mathcal{L})$  des points  $M(z)$  pour que  $Z$  soit un imaginaire pur 0.75pt
- B) Soit  $z_n$  la suite de nombre complexes définie par  $z_0 = 1 + i$  et  $z_{n+1} = \frac{1}{2}iz_n$ . on pose  $u_n = |z_n|$  et  $v_n = \arg(z_n)$
1. Calculer  $u_1$  et  $v_1$  0.5pt
  2. Montre que la suite  $u_n$  est une progression géométrique et préciser sa raison et son premier terme. 0.5pt
  3. Montre que la suite  $v_n$  est une progression arithmétique et préciser sa raison et son premier terme 0.5pt
  4. Expliciter les suites  $u_n$  et  $v_n$  0.75pt
  5. Calculer la somme  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$  0.5pt
  6. Calculer la limite de la suite  $v_n$ , que peut-on conclure 0.5pt

Présentation : 1pt