



EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Exercice1 :

5.75pts

1. On considère le polynôme de variable complexe P définie par :

$$P(z) = z^3 + (1 + i)z^2 + (4 - i)z - 6i + 12$$

- 1.1. Montrer que le polynôme P admet une racine imaginaire pure z_0 que l'on précisera. 1pt

- 1.2. Déterminer les complexes a, b et c pour que $P(z) = (z - z_0)(az^2 + bz + c)$. 1pt

- 1.3. Résoudre dans l'équation $P(z) = 0$ 1pt

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé (o, \vec{u}, \vec{v}) on donne les points A, B et C d'affixes respectifs : $z_A = -3i, z_B = -2$ et $z_C = 1 + 2i$

- a. placer les points A, B et C dans le repère. 0.75pt

- b. écrire sous forme exponentielle le complexe $Z = \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ 1pt

- c. En déduire la nature exacte du triangle ABC 0.5pt

Exercice2 :

5pts

1. On donne $s_n = \sum_{k=1}^n k(k+1)$

- a) Ecrire s_n sans le symbole \sum . 0.5pt

- b) Calculer s_1 et s_2 0.5pt

- c) Démontrer récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, s_n = \frac{n((n+1)(n+2))}{3}$ 1pt

2. Soient $(D) : 4x + 3y - 2 = 0$ et $(D') : 3x - 4y + 5 = 0$ deux droites du plan

- a) Déterminer les coordonnées d'un directeur et d'un point appartenant à chacune de ces droites 1pt

- b) Donner la représentation paramétrique de chacune de ces droites 0.5pt

- c) Montrer que (D) et (D') sont perpendiculaires 0.5pt

- d) Déterminer les coordonnées de Ω point d'intersection de (D) et (D') 0.5pt

- e) Calculer la distance de $B\left(\frac{1}{2}\right)$ par rapport à (D) 0.5pt

Exercice3 :

3.5pts

On donne les nombres complexes suivants : $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$; $z_2 = -1 - i$ et $Z = \frac{z_1}{z_2}$

1. Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle. 1pt

2. Ecrire Z sous forme trigonométrique. 0.75pt

3. Ecrire Z sous forme algébrique . 0.75pt

4. Déduire la valeur exacte de $\cos(\frac{7\pi}{12})$ et $\sin(\frac{7\pi}{12})$. 0.5pt

Exercice4 : _____ 6.25pts

A) Le plan est rapporté à un repère orthonormé (o, \vec{u}, \vec{v}) . Soit M un point du plan d'affixe $z \neq -2i$ et Z le nombre complexe défini par :

$Z = \frac{z-2+i}{z+2i}$. on pose $z = x + iy$ avec x et y des nombres réels

1. Montrer que $\operatorname{Re}(Z) = \frac{x^2+y^2-2x+3y+2}{x^2+(y+2)^2}$ et $\operatorname{Im}(Z) = \frac{-x+2y+4}{x^2+(y+2)^2}$ 1pt

2. Déterminer et construire l'ensemble (\mathcal{E}) des points $M(z)$ pour que Z soit un réel 0.75pt

3. Déterminer et construire l'ensemble (\mathcal{L}) des points $M(z)$ pour que Z soit un imaginaire pur .0.75

B) Soit z_n la suite de nombre complexes définie par $z_0 = 1 + i$ et $z_{n+1} = \frac{1}{2}iz_n$. on pose $u_n = |z_n|$ et $v_n = \arg(z_n)$

1. Calculer u_1 et v_1 0.5pt

2. Montre que la suite u_n est une progression géométrique et préciser sa raison et son premier terme. 0.5pt

3. Montre que la suite v_n est une progression arithmétique et préciser sa raison et son premier terme 0.5pt

4. Expliciter les suites u_n et v_n 0.75pt

5. Calculer la somme $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ 0.5pt

6. Calculer la limite de la suite v_n ,que peut-on conclure 0.5pt

Présentation : 1pt