



## ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

### PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES

15points

#### Exercice 1 : 05 points

- Soit  $z$  et  $z'$  deux nombres complexes tels que  $z = 1 + i$  et  $z' = 2 - 3i$ 
  - Détermine le conjugué de  $\frac{z'}{z}$  sous la algébrique. 0,5pt
  - Détermine le module de  $\frac{z'}{z^4}$ . 0,75pt
- Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes (On donnera les solutions sous la forme algébrique)
  - $-\bar{z} + 2iz + 1 = 0$ ;    b)  $iz - 2 = 3z - i$ ;    c)  $-i|z|^2 + 2z - 2i = 0$ . 1,25pt
- Résoudre dans  $\mathbb{C}^2$  le système suivant :  $(S) : \begin{cases} -z + 2iz' = 5 + 2i \\ 2iz - 3z' = -2 + 4i \end{cases}$ . 1pt
- On donne les nombres complexes  $z_1 = \frac{3 - 2i}{4 + 5i}$  et  $z_2 = \frac{-3 - 2i}{4 - 5i}$ .
  - Exprimer  $z_2$  en fonction  $\bar{z}_1$ . 0,5pt
  - En déduire sans calculer que  $z_1 - z_2$  est un nombre réel et  $z_1 + z_2$  est un imaginaire pur.

#### Exercice 2 : 05 points

On considère le polynôme  $P$  défini par  $P(z) = 9z^4 - 24z^3 + 50z^2 - 24z + 41$

- Démontrer que pour tout nombre complexe  $z_0$ , on a :  $P(\bar{z}_0) = \overline{P(z_0)}$ . 1pt
- En déduire que si  $z_0$  est une racine de  $P$ , alors  $\bar{z}_0$  est aussi une racine de  $P$ . 0,5pt
- Calculer  $P(i)$ . Que peut-on conclure? 0,5pt
- En déduire l'autre racine  $P$ . 0,25pt
- Déterminer trois nombres complexes  $a, b$  et  $c$  tel que  $P(z) = (z^2 + 1)(az^2 + bz + c)$ . 0,75pt
- Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $P(z) = 0$ . 1pt
- Déterminer l'ensemble des points  $M(x; y)$  tels que  $|2z - 2 + i| = |2iz - 3i|$  1pt

#### Exercice 3 : 05 points

I. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$

On considère l'expression  $P(z) = z^3 + (2 - 2i)z^2 + (2 + 4i)z - 12i$

- Montrer que l'équation  $P(z) = 0$  admet une solution imaginaire pure  $z_0$  que l'on déterminera.
- Déterminer les racines de  $\delta = 12 - 16i$ . 0,5pt

3. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^2 + (2 - 4i)z - 6 = 0$ . **0,5pt**

4. Déterminer le polynôme  $Q$  de degré 2 tel que  $P(z) = (z - z_0)Q(z)$ . **0,75pt**

5. En-Déduire la résolution dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $P(z) = 0$  **0,5pt**

II. On pose  $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

(a) Donner  $j^2$  et  $j^3$  sous forme algébrique. **0,75pt**

(b) En déduire l'écriture algébrique de  $j^{12}$  et de  $j^9$ . **0,5pt**

(2) Montrer que  $1 + j + j^2 = 0$ . **0,75pt**

## **PARTIE B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES**

**05points**

Emmanuel possède trois terrains dont il veut absolument clôturer pour leur sécurité. Emmanuel décide d'utiliser du fil barbelé vendu à 3500FCFA le rouleau de 5m. Il souhaite également vendre le deuxième terrain à 1000F le mètre carré. Les terrains sont décrits ainsi, avec  $z = x + iy$  : Le premier terrain est délimité par les points  $M(x, y)$  du plan tels que  $\frac{z - 4 - 6i}{z - 2i}$  est un imaginaire pur. Le deuxième terrain est délimité par les points  $M(x, y)$  du plan tels que  $|z - 3 - i| = 5$ . Le troisième terrain a la forme d'un rectangle dont les dimensions sont les parties réelle et imaginaire de la solution de l'équation  $(1 + 4i) + (3 - 4i)\bar{z} = 4 - 8i$ , avec  $z = x + iy$ .

### **Tâches :**

1. Déterminer le montant à dépenser par Emmanuel pour l'achat du fil barbelé devant permettre de clôturer le premier terrain. **1,5pt**

2. Déterminer le prix de vente du deuxième terrain. **1,5pt**

3. Déterminer le montant à dépenser par Emmanuel pour l'achat du fil barbelé devant permettre de clôturer le troisième terrain. **1,5pt**