Cette épreuve, étalée sur deux pages, est notée sur 20 points. Toutes les questions sont obligatoires.

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES : (15 points)

EXERCICE 1 : (3,75 points)

1. Soit $a,b \in \mathbb{Z}$ et $n \geq 2$. Montre que si $a \equiv b[n]$, alors $a^n \equiv b^n\left[n^2\right]$. **0,5pt**
2. Résous dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $37x + 54y = 3$. **0,75pt**
3. Démontre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = 9^{n+1} + 2^{6n+1}$ est divisible par 11. **0,75pt**
4. Détermine tous les entiers relatifs x vérifiant $3x - 2 \equiv 0[5]$ et $|x| < 10$. **0,5pt**
5. Un nombre X s'écrit $\overline{121}^4$ en base 4 et $\overline{221}^n$ en base n, $n \in \mathbb{N}^*$. Détermine n. **0,5pt**
6. Résous dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ le système : $\begin{cases} PGCD(a;b) = 6 \\ PPCM(a;b) = 240 \end{cases}$. **0,75pt**

EXERCICE 2 : (3,75 points)

A) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $B_n = \left(1 + \dfrac{i}{\sqrt{3}}\right)^n - \left(1 - \dfrac{i}{\sqrt{3}}\right)^n$.

1. Montre que $B_n = \dfrac{2^{n+1}}{\left(\sqrt{3}\right)^n} i \sin\left(\dfrac{n\pi}{6}\right)$. **0,75pt**
2. Déduis-en B_n lorsque n est multiple de 6 puis, justifie que $B_{2023} = -i\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2023}$. **0,75pt**

B) Soit θ un réel de l'intervalle $]0;\pi[$ et Ω le point d'affixe $\omega = 3 + 3i$.

1. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_\theta) : z^2 - 2z\cos\theta + 2(1 + \sin\theta) = 0$. **0,75pt**
2. Écris le complexe $z_1 = i + e^{i\theta}$ sous forme trigonométrique. **0,5pt**
3. En prenant $\theta = \dfrac{\pi}{6}$, écris z_1 sous forme algébrique puis montre que $|z_1|^2 = 2 + \sqrt{3}$. **0,5pt**
4. Détermine l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z tels que $|(1+i)z - 6i| = 2\sqrt{2}$. **0,5pt**

EXERCICE 3 : (4,5 points)

Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$.

1. Etudie les variations de f et dresse son tableau de variations. **0,5pt**
2. Montre que f réalise une bijection de $[0;1]$ sur un intervalle J que tu préciseras. **0,25pt**
3. Montre que f^{-1} est dérivable sur $I = \left[0;\dfrac{1}{2}\right[$ et que $\forall x \in I, \left(f^{-1}\right)'(x) = -\dfrac{4}{\pi\sqrt{1-4x^2}}$. **0,75pt**
4. **(a)** Montre que pour tout $x \in [0;1]$, on a : $|f'(x)| \leq \dfrac{\pi}{4}$. **0,5pt**

   (b) Montre que l'équation $f(x) = x$ admet dans $[0;1]$ une solution unique α. **0,5pt**

   (c) Montre que pour tout $x \in [0;1]$, on a : $|f(x) - \alpha| \leq \dfrac{\pi}{4}|x - \alpha|$. **0,5pt**
5. Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 0,5$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq U_n \leq 1$. **0,5pt**

(b) Montre que pour tout $n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\pi}{4}|U_n - \alpha|$. **0,5pt**

(c) Déduis-en que pour tout $n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^n$ puis, détermine alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$. **0,5pt**

EXERCICE 4 : (3 points)

Les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} x_0 = 3 \text{ et } x_{n+1} = 2x_n - 1 \\ y_0 = 1 \text{ et } y_{n+1} = 2y_n + 3 \end{cases}$.

1. Démontre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n = 2^{n+1} + 1$. **0,5pt**
2. Justifie à l'aide d'un théorème que x_n et x_{n+1} sont premiers entre eux pour tout $n \in \mathbb{N}$. **0,5pt**
3. **(a)** Démontre que, pour tout $n \in \mathbb{N}, 2x_n - y_n = 5$ puis exprime y_n en fonction de n. **1pt**

   (b) Étudie suivant les valeurs de l'entier naturel p le reste de la division de 2^p par 5. **0,5pt**
4. On pose $\delta_n = PGCD(x_n ; y_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montre que $\delta_n = 1$ ou $\delta_n = 5$. **0,5pt**

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES (5 points)

SITUATION :

Une boulangerie fabrique, conditionne et vend ses produits dans une grande localité. Le coût total journalier de production de x centaines de pains est donné par la fonction f définie sur $I = [1;50]$ par $f(x) = \frac{x^3}{15} - \frac{12}{5}x^2 + \frac{194}{5}x + 120$ (en milliers de FCFA). Pour pouvoir réaliser un bénéfice, le boulanger doit minimiser le coût marginal (c'est-à dire $f'(x)$) de production journalier de ses pains.

M. ATEBA, l'agent financier de cette boulangerie a mis en place le service de livraison de leurs produits dans la localité. Après quelques années d'activités, il cherche à déterminer lequel des facteurs N (nombre de boutiques où il livre leurs produits) ou X (frais de publicité) a influencé le plus leur chiffre d'affaires Y. Pour cela, il a dressé le relevé statistique des cinq dernières années qui est consigné dans le tableau suivant :

Années	2020	2021	2022	2023	2024
Nombre de boutiques livrées n_i	10	20	40	70	100
Frais de publicité en millions x_i	1	1,7	1,9	2	2,5
Chiffre d'affaires en millions y_i	37,5	61,5	97,5	180	270,4

Le boutiquier ALI commande des pains et des gâteaux chaque jour pour 7000 FCFA. Le pain est livré à 130 FCFA l'unité et le gâteau à 90 FCFA. Il y a plus de pains que de gâteaux et on livre plus de 7 gâteaux chaque jour. ALI revend le pain à 125 FCFA l'unité et le gâteau à 150 FCFA l'unité et épargne tout le bénéfice obtenu pendant les 24 jours d'ouverture de sa boutique sur un mois, car il souhaite faire une tontine mensuelle de 35.000 FCFA.

Tâches :

1. Quelle quantité de pains la boulangerie doit-elle produire par jour pour minimiser son coût marginal de production ? **1,5pt**
2. Quelle est la variable qui influence le chiffre d'affaires de cette boulangerie ? **1,5pt**
3. Le souhait du boutiquier ALI sera-t-il réalisé? **1,5pt**

Présentation générale : 0,5pt