



ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES.

Durée : 03h

Coef. 4

L'épreuve comporte deux parties indépendantes et obligatoires. La qualité de la copie et la présentation des résultats seront pris en compte dans l'évaluation de la copie de l'élève.

Partie A : ÉVALUATION DES RESSOURCES : 15,5 points.

EXERCICE 1 : (4points)

- 1) On donne les nombres complexes suivants : $a = \frac{(2-2i)(3-4i)}{1+i}$ et $b = (1-i)^8$
 - a) Ecrire sous forme algébrique le conjugué de chacun des nombres complexes a et b. **1pt**
 - b) Calculer le module de chacun des nombres complexes a et b. **1pt**
- 2) On donne les nombres complexes $z_1 = \frac{3-2i}{4+5i}$ et $z_2 = \frac{-3-2i}{4-5i}$
 - a) Exprimer z_2 en fonction de $\bar{z}_1$ **0,5pt**
 - b) En déduire sans calculer que $z_1 - z_2$ est un nombre réel et $z_1 + z_2$ est un imaginaire pur. **0,5pt**
- 3) Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ du système d'équation $\begin{cases} 2iz - z' = -7 - 2i \\ -3z + 2z' = 3 + 2i \end{cases}$ (on écrira les solutions sous forme algébrique) **1pt**

EXERCICE 2 : (6,5points)

I/ On considère le polynôme complexe P défini par : $P(z) = 2z^4 + 6z^3 + 9z^2 + 6z + 2$.

- 1) Montrer que $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$ **0,75pt**
- 2) Soit z_0 une racine de P .
 - a) Montrer que $z_0 \neq 0$. **0,5pt**
 - b) En déduire que $\bar{z}_0$ est aussi une racine de P . **0,25pt**
 - c) Montrer que $\frac{1}{z_0}$ et $\frac{1}{\bar{z}_0}$ sont aussi les racines de P . **0,75pt**
- 3) Calculer $P(1-i) = 0$ et conclure. **0,5pt**
- 4) En déduire alors l'ensemble solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$. **1pt**

II/ On pose $Z = \frac{z-2i}{z+2}$ où $z = x + iy \neq -1$ et $Z = X + iY$.

- 1) Montrer que $X = \frac{x^2+y^2+2x-2y}{(x+2)^2+y^2}$ et $Y = -\frac{2x-2y+4}{(x+2)^2+y^2}$ **1pt**
- 2) Déterminer l'ensemble (C) des points $M(x, y)$ du plan muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$ pour lesquels Z est un nombre complexe imaginaire pur. **0,5pt**
- 3) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (D) des points $M(x, y)$ du même plan pour lesquels $|Z| = 1$. **0,5pt**
- 4) Construire (C) et (D) dans le repère $(o, \vec{u}, \vec{v})$. **1pt**

EXERCICE 3 : (4,5points)

On considère le polynôme complexe f défini par : $f(z) = z^3 + (2 - 3i)z^2 + (-5 + 11i)z - 6 + 6i$.

- 1) Montrer que f admet une racine réelle à préciser. 0,75pt
- 2) Vérifier que $f(2i) = 0$. 0,25pt
- 3) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^2 + (3 - 2i)z - 6i = 0$.
- a) Montrer que le discriminant de cette équation est $\Delta = 5 + 12i$. 0,25pt
- b) Déterminer sous forme algébrique les racines carrées de Δ . 0,75pt
- c) En déduire alors l'ensemble solution de l'équation (E). 0,5pt
- 4) Déterminer alors le nombre complexe w vérifiant $f(z) = (z - 2i)(z + 3)(z - w)$. 0,5pt
- 5) En déduire alors l'ensemble solution de l'équation $f(z) = 0$. 0,75pt
- 6) En déduire l'ensemble solution dans $\mathbb{C}^2$ du système d'équation $\begin{cases} z + z' = -3 + 2i \\ zz' = -6i \end{cases}$ 0,75pt

Partie B : ÉVALUATION DES COMPETENCES : 4,5 points**Situation**

M. Abou est propriétaire d'une ferme avicole située sur un terrain trapézoïdale ABCD qu'il avait acheté à 6500 FCFA le mètre carré. Dans un repère orthonormé d'unité 1dam les sommets A et B ont leurs coordonnées respectives (a, b) et (a', b') tels que les nombres complexes $z_1 = a + ib$ et $z_2 = a' + ib'$ soient solutions de l'équation $z^2 - 7z + 16 - 2i = 0$ avec $a < a'$. Les autres sommets sont $C(0, -2)$ et $D(-2, 2)$.

Pour les besoins en eau de cette exploitation estimés à 25 mètre-cubes par jour, il a fait construire un puits de profondeur 10m et délimité par l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $z\bar{z} - 2(z + \bar{z}) = -3,99$ (avec $z = x + iy$) qui se remplit chaque matin aux 4 cinquièmes de tout son volume.

M. Abou pour ravitailler la ferme en aliments doit faire chaque semaine trois voyages (aller-retour) avec sa camionnette entre la provenderie située au point E d'abscisse -7 appartenant à l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan vérifiant $|z + 2i| = |z + 2 - 2i|$ (avec $z = x + iy$) et le magasin de la ferme situé en C. Le coût de chaque voyage est estimé à $1000x + 300000$ FCFA où x est le nombre de décimètres parcourus par la camionnette pour ce voyage.

On prendra $\pi = 3,14$ et on arrondira les résultats à l'unité près.

Tâches

- 1) Combien M. Abou dépense par semaine pour ravitailler la ferme en aliments? 1,5pt
- 2) Le puits que M. Abou a fait construire est-il capable de satisfaire les besoins journaliers en eau de la ferme? 1,5pt
- 1) Combien M. Abou avait-il dépensé pour l'achat de ce terrain? 1,5pt

Présentation : 0,5pt