

EVALUATION HARMONISEE N°1

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Partie A : EVALUATION DES RESSOURCES

[15 points]

EXERCICE 1 : 04,5 points

I. Pour chacune des questions ci-dessous, écrire le numéro de la question suivi de la lettre correspondante à la réponse juste.

1. Le module du nombre complexe $z = \frac{3+i}{4-i\sqrt{2}}$ est égal à :

- a) $\frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{3}}$ b) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ c) $\frac{5}{9}$ 0,5 pt

2. Le nombre complexe z tel que $-2z + i\bar{z} = 3$ vaut

- a) $z = 1 + i$ b) $z = -2 + i$ c) $z = -2 + 2i$ 0,5 pt

II. On considère le nombre complexe $u = \sqrt{2+\sqrt{2}} - i\sqrt{2-\sqrt{2}}$

- a) Déterminer la forme algébrique de u^2 puis calculer le module de u^2 0,75 pt
b) En déduire le module de u 0,25 pt

III. Soit $z = x + iy$ un nombre complexe. On pose $Z = \frac{z}{z+2i}$ avec $z \neq -2i$.

- a) Déterminer la forme algébrique de Z lorsque $z = 1 - 3i$ 0,5 pt
b) Montrer que $Re(Z) = \frac{x^2+y^2+2y}{x^2+(y+2)^2}$ et $Im(Z) = \frac{2x}{x^2+(y+2)^2}$ où $Re(Z)$ et $Im(Z)$ désignent respectivement les parties réelles et imaginaires de Z 1 pt
c) En déduire l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z tel que $Z \in i\mathbb{R}$ 1 pt

EXERCICE 2 : 05,5 points

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O, \overline{u}; \overline{v})$ d'unité 2cm sur les axes.

- Déterminer les racines carrées du nombre complexe $8 - 6i$ 0,5 pt
- On considère le polynôme P défini par $P(z) = z^3 - (1-i)z^2 + 2(1+i)z + 8i$
 - Démontrer que P admet une racine imaginaire pure que l'on déterminera 0,75 pt
 - Trouver deux complexes b et c tels que $P(z) = (z - 2i)(z^2 + bz + c)$ 1 pt
 - En déduire toutes les racines du polynôme P 1 pt
- On considère les points A, B et C d'affixes respectives $-1 - i, 2 - 2i$ et $2i$
 - Placer les points A, B et C dans le repère 0,75 pt
 - Déterminer l'affixe z_D du point D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme 0,5 pt
 - Soit (C) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 1| = \sqrt{2}$
Vérifier que $A \in (C)$ puis déterminer et construire (C) dans le repère 1 pt

EXERCICE 3 : 05 points

I. On considère les fonctions g et h définies pour $x > 0$ telles que

$$\left|g(x) - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{x+1} \quad \text{et} \quad h(x) - \frac{2}{3} \geq \frac{x^2+5}{x}$$

Déterminer les limites des fonctions g et h en $+\infty$

1 pt

II. Calculer chacune des limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 + x + 3})$ 0,75 pt

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x + \sin x}{x^2 + 1} \right)$ 0,5 pt

III. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 3x + 8$

- 1) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations 1 pt
- 2) Déterminer l'image de $] -\infty; -1[$ par la fonction f 0,25 pt
- 3) Justifier que f réalise une bijection de $]1; +\infty[$ vers un intervalle J à préciser 0,5 pt
- 4) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [2; 3]$ 0,5 pt
- 5) Donner un encadrement de α d'ordre 2 0,5 pt

Partie B : EVALUATION DES COMPETENCES

[05 points]

Déployer un raisonnement logique et communiquer à l'aide du langage mathématique en appel aux équations, inéquations et systèmes pour déterminer les dimensions d'un terrain, un problème de partage et le taux de remise sur un article.

Situation :

L'unité de longueur est de 10 m et le plan est muni d'un repère orthonormé.

JEAN possède un grand terrain ayant la forme d'un quadrilatère ABCD où $A(-2)$, $B(i)$, $C(z_1)$ et $D(z_2)$. z_1 et z_2 étant les solutions de l'équation $z^2 + 3iz - 3 + i = 0$ telles que $\text{Re}(z_1) > 0$. Il souhaite sécuriser ce terrain en l'entourant à l'aide d'un fil barbelé vendu à 1200 FCFA le mètre.

Sur ce terrain, JEAN envisage faire la culture du poivre sur un espace de ce terrain délimité par l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|4z + 2 - 2i\sqrt{3}| = |2 + 2i|$. 30 plants de poivre couvrent 20m^2 et au marché, un plant de poivre coûte 600 FCFA.

Jean envisage également créer un espace vert sur ce terrain. Cet espace a la forme d'un triangle équilatéral ABC. Les sommets A, B et C de ce triangle étant les solutions de l'équation $(z - 2)(z^2 + 2z + 4) = 0$. Cet espace sera recouvert d'un gazon vendu à 1500 FCFA le m^2 .

On prendra $\pi = 3,14$ et $\sqrt{3} = 1,7$

1. Quel montant devra déboursier JEAN pour l'achat du fil barbelé ? 1,5pt
2. Quel montant devra déboursier JEAN pour l'achat des plants de poivre ? 1,5pt
3. Quel montant devra déboursier JEAN pour la création de son espace vert ? 1,5pt

Présentation : 0,5 pt