

TRAVAUX DIRIGES N°4 : CLASSE DE TD & TI CONGES DE NOEL

EXERCICE 1 :

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 + 2z^2 - 16 = 0$

1. (a) Montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation $(z - 2)(z^2 + 4z + 8) = 0$

(b) Déterminer toutes les solutions de (E) sous forme exponentielle.

2. On munit le plan complexe d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$

(a) Placer les points A, B et D d'affixes respectives $a = -2 - 2i$, $b = 2$ et $d = -2 + 2i$ dans le repère.

(b) Donner en justifiant la nature exacte du triangle ABD

(c) Calculer l'axe c du point C tel que ABCD soit un parallélogramme. Placer C.

EXERCICE 2 :

Un hôtel de ville africaine établit un lien entre le taux d'occupation des chambres (exprimé en %) et le montant des frais de publicités (exprimé en centaine de milliers de FCFA). Les résultats de cette étude ont été consignés dans le tableau suivant :

Frais de publicité	30	27	32	25	35	22	24	35
Taux de participation	52	45	67	55	76	48	32	72

1. Donner une équation de la droite d'ajustement par la méthode de Mayer.

2. Estimer le taux d'occupation de cet hôtel si les frais de publicité étaient de 4000 000 FCFA

EXERCICE 3 :

Monsieur AWONO vient de s'acquérir un terrain du côté de FOTO dans la ville de DSCHANG.

Ce terrain a la forme d'un triangle dont un des sommets a pour affixe $2 + 3i$ et les deux autres

les sommets sont solutions dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes de l'équation

$z^2 + (2 + 3i)z - 2(1 - 2i) = 0$. L'unité de longueur étant de 10m. Il souhaite protéger ce

terrain en l'entourant avec deux rangées de fil barbelé dont le mètre coûte 1200 FCFA.

Quel est le montant nécessaire pour l'achat du fil barbelé ?

EXERCICE 4 :

Monsieur AWONO est enseignant vacataire dans un établissement privé. Le tableau suivant donne l'évolution du montant du taux horaire des enseignants dans cet établissement.

Année	2015-2016	2016-2017	2017-2018	2018-2019	2019-2020
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5
Taux horaire y_i	2000	2200	2500	2700	2950

Si cette tendance se poursuit, quel serait le taux horaire de M. AWONO cette année scolaire dans cet établissement ?

EXERCICE 5 :

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ ensemble des nombres complexes, l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$

2. En déduire dans $\mathbb{C}$ la résolution de $(-iz + 3 + 3i)^2 - 2(-iz + 3 + 3i) + 2 = 0$.

3. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $1 + i$, $1 - i$ et $2 - 2i$.

a) Démontrer que les points A, B et C sont sur le cercle de centre I d'axe 3 et de rayon $\sqrt{5}$

b) Calculer le rapport $\frac{z_C - z_I}{z_A - z_I}$ et en déduire la nature exacte du triangle AIC.

EXERCICE 6 :

(w_n) est une suite géométrique à termes positifs telle que $\begin{cases} w_1 \times w_2 \times w_3 = 64 \\ w_2 \times w_0 = 64 \end{cases}$

Quelle est la valeur de w_0 ? Quelle est la raison q ? Exprimez w_n en fonction de n

EXERCICE 7 :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points A, B C et D d'affixes respectives $a = -1 + i$, $b = -1 - i$, $c = 2i$ et $d = 2 - 2i$.

1. Donner en justifiant la nature du triangle BCD.
2. Justifier que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle (C) dont on précisera le centre Ω et le rayon puis le construire.
3. Déterminer l'affixe e du point E symétrique du point B par rapport à Ω . Quelle est la nature du quadrilatère CBDE ?
4. Déterminer et construire l'ensemble (D) des points $M(z)$ tel que $|\bar{z} + 2i| = |2 - 2i - z|$

EXERCICE 8 :

On définit la suite des nombres complexes (z_n) par $\begin{cases} z_0 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z_{n+1} = (1 - \sqrt{3}i) z_n \end{cases}$

1. Ecrire z_0 et z_1 sous la forme trigonométrique.
2. On pose pour tout entier naturel n , $r_n = |z_n|$ et $\theta_n = \arg(z_n)$
 - a. Montrer que (r_n) est une suite géométrique.
 - b. Montrer que (θ_n) est une suite arithmétique.
 - c. En déduire l'écriture de z_n en fonction de n .

EXERCICE 9 :

Soit h la fonction définie sur $I =]-\frac{1}{2}, +\infty[$ par $h(x) = \frac{x}{(2x+1)^3}$

1. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $x \in I$, $h(x) = \frac{a}{(2x+1)^2} + \frac{b}{(2x+1)^3}$
2. En déduire la primitive de h qui s'annule en 0.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos^2 x \times \sin^5 x$

3. Montrer que $g(x) = \sin x \cos^2 x - 2 \sin x \cos^4 x + \sin x \cos^6 x$.

En déduire la primitive de g qui prend la valeur 0 en π .

On considère la fonction h définie sur $]2, +\infty[$ par $h(x) = \frac{x^3 - x^2 - 8x + 8}{(x-2)^2}$

1. Justifier que h admet des primitives sur $]2, +\infty[$
2. Trouver trois réels a , b et c tels que pour tout $x \in]2, +\infty[$, $h(x) = ax + b + \frac{c}{(x-2)^2}$
3. Trouver la primitive H de h qui prend la valeur 18 en 4.

EXERCICE 10 :

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 12x - 2$

1. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $0 < \alpha < 1$
3. Donner un encadrement d'ordre 2 de α

En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x

EXERCICE 11 :

Monsieur **BOND** dispose de deux terrains. Le terrain 1 situé à **ODZA** est un domaine EFGHI où les points E, F, G, H et I ont pour affixes respectives z_0 , z_1 , z_2 , z_3 et z_4 avec $z_0 = 2$ et pour tout

entier n , $z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$. Il souhaite protéger ce terrain avec 3 rangées de fil barbelé dont le mètre coûte 5 000 FCFA.

Le terrain 2 situé à **OLEMBE** dont la forme est délimitée par l'ensemble des points M d'affixe z tel que $\frac{z-7+4i}{z+1-2i}$ soit imaginaire pur. Il souhaite revendre ce terrain à une entreprise à raison de 15 000 FCFA le m^2 .

1. Quel montant est nécessaire pour l'achat du fil barbelé ?

2. Quel sera le montant obtenu après la vente des terrains ?

NB : Dans tout l'exercice, l'unité sur les axes est de 10 m. Prendre $\pi = 3,14$

EXERCICE 12 :

On considère la suite numérique définie par $0 \leq u_1 \leq \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel non nul n ,

$$u_{n+1} = u_n - (u_n)^2$$

1. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

2. Soit $f(x) = x - x^2$

a. Dresser le tableau de variation de f sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

b. Dédire en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$

c. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.

3. On pose pour tout entier naturel n non nul, $v_n = n \times u_n$

a. Vérifier que pour tout entier n , $f\left(\frac{1}{n+1}\right) < \frac{1}{n+2}$ puis que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$

b. Dédire que (v_n) est une suite majorée.

Montrer que $v_{n+1} - v_n = u_n[1 - (n+1)u_n]$ puis déduire le sens de variation de la suite (v_n) .

EXERCICE 13 :

1. Déterminer les racines carrées du nombre complexe $5+12i$

2. On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation (E) :

$$iz^3 - 3z^2 - (3+i)z - 2 - 6i = 0$$

a. Démontrer que (E) admet une solution imaginaire pure z_0 à préciser

b. Trouver trois nombres complexes a , b et c tels que pour tout nombre $z \in \mathbb{C}$,

$$iz^3 - 3z^2 - (3+i)z - 2 - 6i = (z - z_0)(az^2 + bz + c)$$

c. Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.

3. Soit A , B et C les points d'affixes respectives $a = -1+2i$, $b = 1-i$ et $c = -2i$

a. Déterminer l'affixe d du point D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.

b. Soit G le barycentre du système $\{(A, 1); (B, -1); (C, 2)\}$. Déterminer l'ensemble des points M d'affixes z tel que $\|\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{CM}\| = |\sqrt{2} - i\sqrt{2}|$

EXERCICE 14 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{u_n+2}$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $0 < u_n < 2$

2. a. Montrer que pour tout entier n , $u_{n+1} - u_n = \frac{(1+u_n)(2-u_n)}{2+u_n}$

b. En déduire la monotonie de la suite (u_n) puis que $1 \leq u_n < 2$

c. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3. On pose pour tout entier naturel n , $v_n = \frac{u_n+1}{u_n-2}$

- Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
- Donner l'expression de u_n en fonction de n .

EXERCICE 15 :

On considère les nombres complexes $z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 2 - 2i$

- Donner le module et un argument de z_1 et de z_2 puis en déduire la forme trigonométrique du quotient $\frac{z_1}{z_2}$
- Donner la forme algébrique du quotient $\frac{z_1}{z_2}$

En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

EXERCICE 16 :

(u_n) est une suite arithmétique telle que $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 9 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 35 \end{cases}$

- Calculer la raison r , le premier terme u_0 et donner l'expression de u_n en fonction de n
- Soit (v_n) la suite définie par $v_n = 2^{u_n}$
 - Montrer que v_n est une suite géométrique.
 - Calculer le produit $P = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$

EXERCICE 17 :

Le tableau suivant donne la superficie (en m^2) et le prix (en milliers de francs CFA) de 10 appartements vendus récemment dans le centre d'une petite ville.

Superficie x_i	42	46	48	52	55	75	80	90	100	120
Prix y_i	330	370	400	430	450	660	680	780	850	1050

- Représenter le nuage de points de cette série dans le plan rapporté à un repère orthogonal. Prendre 1 cm pour 10 m^2 en abscisse et 1 cm pour 100 000 FCFA en ordonnée.
- Calculer les coordonnées du point moyen G de ce nuage de point.
- Montrer qu'une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrées est $y = 9,1086x - 44,89$.
- Dans cette question, on utilisera l'équation obtenue à la question 3) pour faire des estimations.
 - Estimer le prix d'un appartement de 150 m^2
 - Estimer (au mètre carré près), la surface d'un appartement coûtant 1 600 000 FCFA.

EXERCICE 18 :

Une entreprise fabrique et commercialise un type d'objets : les objets de type A. Pour les objets de type A, la capacité journalière de production est comprise entre 0 et 18 objets. On suppose que toute la production est vendue. Le coût de production en milliers de francs CFA de t objets de type A est $C(t) = t^3 - 25t^2 + 280t + 400$ et la recette de la vente de t objets de type A est $R(t) = 480t - 20t^2$. L'entreprise désire réaliser un bénéfice maximal. Quelle est la valeur de ce bénéfice maximal ? Combien d'objets faut-il vendre pour l'atteindre ?

EXERCICE 19 :

I. On pose pour tout nombre complexe z , $P(z) = z^3 - 2z + 4$

- Démontrer que le polynôme P admet une racine réelle $z_0 = \alpha$ que l'on déterminera
- Trouver deux réels a et b tels que $P(z) = (z + \alpha)(z^2 + az + b)$
- Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$

II. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -2$, $z_B = 1 + i$ et $z_C = 1 - i$.

1. Calculer $\frac{z_C+2}{z_B+2}$ puis déduire la nature exacte du triangle ABC
2. Déterminer l'affixe du point D pour que ABCD soit un parallélogramme
3. Soit (Γ) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 1| = 1$.
 - a) Vérifier que les points A et B appartiennent à (Γ)
 - b) Déterminer et construire (Γ)

EXERCICE 20 :

Partie A On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3 + x^2 - 1$

1. Dresser le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0, 1[$
3. Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.
4. Donner suivant les valeurs de x , le signe de $g(x)$.

Partie B On définit pour tout réel $x \neq 0$, la fonction f par $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 1}{3x}$

1. Montrer que pour tout réel $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{3x^2}$
2. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}^*$
3. Montrer que $f(\alpha) = \frac{\alpha}{6} + \frac{1}{2\alpha}$ et en déduire que $0 \leq f(\alpha) \leq \frac{2}{3}$
4. Etudier les branches infinies de f

Construire la courbe (C_f) de f sur $\mathbb{R}^*$

EXERCICE 21 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n^3 + 1)$. On définit sur $I = [0, 1]$ la fonction f par $f(x) = \frac{1}{4}(x^3 + 1)$

1. Etudier les variations de f puis montrer que $f(I) \subset I$
2. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n \in I$
3. Soit g la fonction définie sur I par $g(x) = f(x) - x$. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur I .
4. Montrer que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$ puis que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{4}|u_n - \alpha|$

En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$ et déduire que (u_n) converge.

EXERCICE 22 :

I. Une société fabrique et commercialise des produits cosmétiques. Les relevés en millions de francs CFA des frais publicitaires mensuels de la société et son chiffre d'affaires mensuel sont consignés dans le tableau suivant :

Frais de publicité	1	2	3	4	5
Chiffre d'affaires	60	66	69	76	81

Le directeur commercial veut investir d'avantage dans la publicité pour que son chiffre d'affaires atteigne les 100 millions francs CFA. En supposant que l'évolution du chiffre d'affaires en fonction des frais publicitaires reste inchangé, déterminer combien doit investir cette société dans la publicité afin d'atteindre les 100 millions FCFA

II. Monsieur AWONO fondateur d'un établissement scolaire a recruté des enseignants. Il leur propose un salaire annuel de 750 000 FCFA. Après quelques mois de travail, une grève des enseignants pour la revalorisation de leur salaire amène le fondateur à faire deux propositions de contrats au choix afin de relever les salaires.

- Le premier contrat stipule que les enseignants auront chaque année une augmentation de 4% du salaire de l'année précédente.
- Le deuxième contrat consiste à faire chaque année une augmentation forfaitaire de 30 000 FCFA.

Monsieur Ousman professeur de Français veut s'engager pour 9 ans mais hésite quant au choix du contrat. Aider monsieur Ousman à faire le bon choix de contrat.

EXERCICE 23 :

- I. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$
1. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation
 2. Démontrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in [1, 2]$ tel que $g(\alpha) = 0$
 3. Donner un encadrement d'ordre 2 de α
 4. Donner le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x
- II. On définit la fonction f par $f(x) = \frac{x^3+1}{x-1}$ On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.
1. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition
 2. Déterminer trois réels a , b et c tels que $\forall x \in D_f, f(x) = x^2 + ax + b + \frac{c}{x-1}$
 3. En déduire les branches infinies de f
 4. Montrer que pour tout $x \in D_f, f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$ et en déduire le tableau de variation de f
 5. Exprimer $f(\alpha)$ en fonction de α

Démontrer que la restriction h de la fonction f sur $] -\infty, 1]$ est une bijection de $] -\infty, 1]$ vers un intervalle J que l'on déterminera.

EXERCICE 24 :

On considère les nombres complexes $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 2 - 2i$

1. Déterminer la forme algébrique de $z = z_1 \times z_2$
 2. Déterminer la forme trigonométrique de $z = z_1 \times z_2$
 3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$
-
1. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé, on donne $A(-2 + i)$, $B(4 - 2i)$ et $C(1 + 7i)$. Donner la nature exacte du triangle ABC
 2. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'équation $z - 2 + 3i = i(2\bar{z} - 3i) + 5i$
 3. Déterminer deux nombres complexes a et b tels que $\begin{cases} a + b = -4 + i \\ ab = 1 + 13i \end{cases}$
 4. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|2iz - 4 + 2i| = 6$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on associe pour tout point M d'affixe $z = x + iy$, le point M' d'affixe $z' = x' + iy'$ tel que $z' = \frac{z+2i}{z-2}$

1. Déterminer x' et y' en fonction de x et de y
2. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit un imaginaire pur

Déterminer l'ensemble (Δ) des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$