Ministère des Enseignements Secondaires
GROUPE « LES COMPETENTS »
Sis à NGOUSSO ELEVEUR derrière le collège ST AUGUSTIN
Tél : 676 273 940 / 680 374 314 / 675 421 947

Année Scolaire 2021-2022
Epreuve : Mathématiques
Examinateur : Serge TCHIO

TRAVAUX DIRIGES N°5 : CLASSE DE T^{le} C, D & TI
FONCTION STRICTEMENT CONTINUES

EXERCICE 1 :

A. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 12x - 2$

1. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $0 < \alpha < 1$
3. Donner un encadrement d'ordre 2 de α
4. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x

B. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+4}$

1. Montrer que $f(\alpha) = \frac{3-12\alpha}{\alpha^2+4}$
2. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{x \times g(x)}{(x^2+4)^2}$
3. Déduire le sens de variation de f et dresser le tableau de variation de f

EXERCICE 2 :

A. On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$

1. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\beta \in]1, 2[$

B. Soit g la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$

1. Montrer que l'équation $g(x) = x$ est équivalente à l'équation $f(x) = 0$
2. Montrer que si $x \in]1, 2[$ alors $g(x) \in]1, 2[$
3. Justifier que g est dérivable et calculer g'
4. Montrer pour tout $x \in]1, 2[$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$ puis déduire que $|g(x) - \beta| \leq \frac{1}{2}|x - \beta|$

EXERCICE 3 :

Soit f la fonction définie sur $I =]-2, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x+2} - \sqrt{x+3}$

1. Dresser le tableau de variation de f sur I
2. Montrer que f réalise une bijection de I vers un intervalle J à préciser.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]-2, -1[$
4. Calculer $f(1)$ et déduire $(f^{-1})'\left(-\frac{5}{3}\right)$
5. On considère la fonction g définie sur $[-2, -1]$ par $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}} - 2$
   - **a.** Montrer que α est solution de l'équation $g(x) = x$
   - **b.** Montrer que pour tout $x \in [-2, -1]$, $g(x) \in [-2, -1]$
   - **c.** Montrer que pour tout $x \in [-2, -1]$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$ puis que $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

EXERCICE 4 :

On donne $g(x) = x\sqrt{x^2+1} - 1$

1. Calculer le limites de g en $-\infty$ et $+\infty$
2. Déterminer la dérivée g' de g et dresser le tableau de variation de g
3. Montrer qu'il existe un unique α tel que $g(\alpha) = 0$ puis que $0,7 < \alpha < 0,8$
4. Donner le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x
5. Soit $f(x) = \frac{x^3}{3} - \sqrt{x^2+1}$

a. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que $f'(x) = \frac{x \times g(x)}{\sqrt{x^2+1}}$

b. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$

c. Montrer que $f(\alpha) = \frac{\alpha^4 - 1}{3\alpha}$ puis que $-0{,}35 < f(\alpha) < -0{,}24$

EXERCICE 5

Ecrire simplement :

$A = \frac{4\sqrt[3]{\sqrt{4}} \times 2\sqrt{2}}{\sqrt[6]{2}}$ $\quad B = 4\sqrt{\sqrt{1024}} - \sqrt[3]{125} + \sqrt{\sqrt{27}} \times \sqrt[4]{3}$ $\quad C = \frac{\sqrt[15]{3} \times \sqrt[3]{9} \times (\sqrt{9})^2}{\sqrt[3]{27} \times \left(\sqrt[3]{\sqrt{3}}\right)^2}$

EXERCICE 6 :

Soit f la fonction définie sur $[0,1[$ par $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x^2}}$ On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

1. Etudier la dérivabilité de f à droite de 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu
2. Etudier les variations de h et dresser son tableau variation
3. Tracer la courbe (C_f) dans le repère.
4. Montrer que f réalise une bijection de $[0,1[$ vers un intervalle à préciser.
5. Déterminer explicitement f^{-1}
6. Dresser le tableau de variation de f^{-1} et construire la courbe de f^{-1}

EXERCICE 7 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(2x)$. On note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f.

1. Calculer pour tout réel x, $f'(x)$, $f''(x)$ et $f^{(3)}(x)$
2. Montrer par récurrence que pour tout réel x et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}(x) = 2^n \sin\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right)$

EXERCICE 8 :

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'image de l'intervalle I par f

a. $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$ $\quad I =]3, +\infty[$ $\qquad$ b. $f(x) = x^3 - 3x + 1$ $\quad I = [-4, 4]$

EXERCICE 9 :

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{1}{u_n} + \frac{u_n}{2}$ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{2}$ Ci-dessous on donne le tableau de variation de f

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geq \sqrt{2}$
2. Pour entier naturel n, exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de u_n puis donner le sens de variation de la suite (u_n)
3. Justifier que (u_n) est convergente et déterminer sa limite l.