

TRAVAUX DIRIGES N°4 : CLASSE DE T^{le} C, D & TI

NOMBRES COMPLEXES - SUITES NUMERIQUES

EXERCICE 1 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3u_{n+1} = 2u_n - \frac{n}{3^n}$

1. Calculer u_1 et u_2
2. Montrer par récurrence que pour tout entier n , $u_n = \frac{n+1}{3^n}$
3. Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 9u_{n+1} - 3u_n$
 - a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$
 - b. Exprimer u_n en fonction de n .
 - c. On pose $s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$. Montrer par récurrence que $s_n = \frac{9}{4} - \frac{2n+3}{4 \times 3^{n-1}}$

EXERCICE 2 :

On considère le nombre complexe $w = -\sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

1. Donner l'écriture trigonométrique de w^2 et en déduire l'écriture algébrique de w
2. En déduire une écriture trigonométrique de w
3. Donner les valeurs exactes de $\cos \frac{7\pi}{8}$ et $\sin \frac{7\pi}{8}$

EXERCICE 3 :

Soit l'équation $(E) : z^3 - (1 + 2i)z^2 - 3z + 2i - 1 = 0$

1. Montrer que -1 est solution de l'équation (E) .
2. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E)
3. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = i$, $z_B = 2 + i$ et $z_C = -1$.
 - a. Placer les points A, B et C dans le repère.
 - b. Donner la forme trigonométrique de $\frac{z_A}{z_A - z_B}$ puis déduire la nature du triangle ABO .
 - c. Calculer l'affixe du point D image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.
 - d. Calculer l'affixe du point E tel que $ABCE$ soit un parallélogramme
4. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\| = 6$
5. Soit s la transformation du plan dans le plan d'expression analytique $\begin{cases} x' = x - y + 2 \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$
 - a. Montrer que l'écriture complexe de s est $z' = (1 + i)z + 2 - i$
 - b. Donner les éléments caractéristiques de s

EXERCICE 4 :

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on donne $z_A = \frac{3}{2} + 6i$,

$z_B = \frac{3}{2} - 6i$, $z_C = -3 - \frac{1}{4}i$, $z_P = 3 + 2i$ et le vecteur $\vec{w}$ d'affixe $z_{\vec{w}} = -1 + \frac{5}{2}i$

1. Déterminer l'affixe z_Q du point Q image du point B par la translation de vecteur $\vec{w}$.
2. Déterminer l'affixe z_R du point R image du point P par l'homothétie de centre C et de rapport $-\frac{1}{3}$
3. Déterminer l'affixe du point S image du point P par la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$
4. Placer les points P, Q, R et S et démontrer que $PQRS$ est un parallélogramme.
5. Calculer $\frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q}$ et déduire la nature exacte de $PQRS$.

EXERCICE 5

- I. 1. Déterminer le module et un argument de $u = \frac{8+8i}{\sqrt{3}+i}$
2. Déterminer les racines cinquièmes de u .
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^3 = 4\sqrt{2}(-1+i)$
- II. 1. Linéariser $\cos^3 x \times \sin^3 x$
2. En utilisant d'une part la formule de Moivre et d'autre part le développement usuel de $(a+b)^4$, développer $(\cos x + i \sin x)^4$ puis en déduire les expressions de $\cos 4x$ et $\sin 4x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$

EXERCICE 6 :

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, On considère les points A et B d'affixes respectives $1+3i$ et $2i$.

1. Soit s la similitude directe plane qui de centre B qui transforme O en A . On note z' l'affixe de M' image du point M d'affixe z par s .
 - a. Déterminer l'écriture de z' en fonction de z
 - b. En déduire le rapport et l'angle de s .
2. Soit r la transformation du plan dans lui-même telle que $z' = iz + 3$
 - a. Donner la nature exacte de r et donner ses éléments caractéristiques (on notera Ω le centre de r)
 - b. Donner la nature du triangle $A\Omega B$.

EXERCICE 7 :

z désigne un nombre complexe. On pose $a = z^2 - 2\bar{z} + 1$

1. Déterminer l'ensemble des points dont l'affixe z est telle que a soit un nombre réel.
2. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $a = 0$
3. Soit $A(1)$, $B(-1+2i)$ et $C(-1-2i)$. Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle.

EXERCICE 8 :

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_B = \bar{z}_A$ et $z_C = -3$.

1. Ecrire les complexes z_A , z_B et z_C sous forme exponentielle.
2. Placer les points A , B et C dans le plan
3. Montrer que le triangle est équilatéral.
4. Soit f la transformation du plan dans le plan qui à tout point d'affixe z associe le point d'affixe z' tel que $z' = \frac{1}{3}iz^2$ On note O' , A' , B' et C' les images respectives des points O , A , B et C .
 - a. Donner la forme exponentielle des affixes des points A' , B' et C' .
 - b. Démontrer que les points O , A et B' sont alignés.
 - c. Soit G l'isobarycentre des points O , A , B et C et G' son image par f . Déterminer les affixes des points G et G' .